UMA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE AS REGULARIDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE TRÊS E SUAS RELAÇÕES

Goerch,H.C.
UNIFRA-Santa Maria, RS
Herton2002goerch@yahoo.com.br

Resumo

Ensinar Matemática como um produto acabado, tem-se revelado problemático para sucessivas gerações de professores. Muitos alunos acham que a disciplina não faz qualquer sentido e que não vale à pena esforçarem-se para aprendê-la.
Neste trabalho desenvolvemos uma investigação matemática acerca das potências de expoente 3(três), suas regularidades e associação com os trios de números, buscando as relações existentes entre as familiaridades das potências e suas coincidências numéricas, como uma forma de incentivar a investigação matemática e propor alternativas ao ensino
O objetivo deste trabalho é propor aos alunos do Ensino Fundamental ou Médio que encontrem padrões numéricos entre as potências Matemáticas.

Palavras-chave: Coincidências numéricas; Regularidade; Tendências; Trios de números.

1. INTRODUÇÃO

Uma investigação matemática é sempre uma viagem ao desconhecido, embora já possa ter sido feita por outros, e dá a oportunidade de fazer Matemática do mesmo modo que os matemáticos a fazem. Fazer Matemática exige investigar e isso inclui a formulação de questões que frequentemente evoluem à medida que um trabalho avança. A realização de uma investigação matemática envolve processos conscientes e inconscientes, sensibilidade estética, conexões e analogias com problemas matemáticos e situações não matemáticas. Tal como referem Davis e Hersh (1995) e, é levada a cabo de formas diferentes por pessoas com estilos cognitivos mais analíticos, visuais ou conceptuais, mas para todos eles constitui uma atividade envolvente e gratificante.

Para compreender a verdadeira natureza da Matemática é importante analisá-la numa perspectiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui. Como afirmou Pólya “a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva" (1991 p. vii).

Os primeiros estudos da matemática grega tinham como principal objetivo compreender o lugar do homem no universo e os números constituía um dos eixos básicos deste processo. A Matemática ajudava a encontrar ordem, a ordenar as ideias em sequência e encontrar coincidências.

As coincidências numéricas alimentam desde sempre uma atividade conhecida como numerologia, ou seja, a arte de atribuir a combinações de algarismos transcendências que lhes são estranhas. Essas regularidades são encontradas em vários estudos matemáticos, e possibilitam um maior aprofundamento acerca do universo do conhecimento matemático.

As antigas civilizações, como os Maias, fizeram uso de padrões geométricos e numéricos que foram transmitidos de geração para geração e que se tornaram sagrados para este povo, (ROSA; OREY, 2004). Provavelmente, a utilização de um destes padrões originou-se com a observação de uma das espécies da cascavel *Crotalus durissus*, encontrada na região em que os Maias viviam e que possui padrões e desenhos na pele com formas geométricas semelhantes com diamantes. A contemplação desta forma e deste padrão geométrico parece ter inspirado a arte, a geometria e a arquitetura dos Maias (ROSA; OREY, 2004).

Os Maias descobriram um sistema de números mágicos e sagrados para a criação divina mediante a confecção de esteiras elaboradas em diversos padrões que se tornaram conhecidas por seus números, significados e poder.

Nosso sistema de numeração surgiu na Ásia, há muitos séculos no Vale do rio Indo, onde hoje é o Paquistão. O primeiro número inventado foi o 1 e ele significava o homem e sua unicidade, o segundo número 2, significava a mulher da família, a dualidade e o número 3 (três) significava muitos, multidão.

Nos dias atuais a construção do conceito de número, por exemplo, começa muito antes da entrada na escola. Desde que em sua casa, nas relações cotidianas, a criança tenha oportunidade de lidar com situações que envolvam ordenação , seriação , classificação, já esta iniciando a construção deste conceito. "Porém, a construção do conhecimento necessita avançar etapas e estas etapas necessariamente passam pela busca de novos elementos para serem agregados aos atuais, o que sempre leva á pergunta recorrente muitas vezes na matemática "Para que serve isso" ou" De onde vem isso". As tendências atuais que norteiam as metodologias do ensino da Matemática sugerem que o vocabulário matemático ganhe mais significado, já que sua aquisição e compreensão têm como base o estágio operações concretas.

Buscando agregar algo ao ensino da matemática analisamos as regularidades existentes entre as potências matemáticas de expoente 3 e suas relações com os “trios” e suas propriedades.

2. DESENVOLVIMENTO

As potências de expoente 3, diferentemente de outras potencias, têm algumas singularidades próprias que lhes são peculiares, ao analisarmos estas peculiaridades nos deparamos com algumas regularidades talvez, até então, não observadas por esses prismas, como por exemplo:

Todas as potências de expoente 3 são formadas a partir de números ímpares consecutivos, assim:

$1 = 1 = \mathbf{1}^{\mathbf{3}}$

$3 + 5 = 8 = \mathbf{2}^{\mathbf{3}}$

$7 + 9 + 11 = 27 = \mathbf{3}^{\mathbf{3}}$

$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = \mathbf{4}^{\mathbf{3}}$

$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = \mathbf{5}^{\mathbf{3}}$

$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = \mathbf{6}^{\mathbf{3}}$

$43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = 343 = \mathbf{7}^{\mathbf{3}}$

$57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 = 512 = \mathbf{8}^{\mathbf{3}}$

$73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 = 729 = \mathbf{9}^{\mathbf{3}}$

$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109 = 1000 = \mathbf{10}^{\mathbf{3}}$

Dessa forma podemos generalizar esta situação:

Se n é potência de 3, então n elevado ao expoente 3, para n número ímpar ,teremos a potência .

2.1 TRIOS

Segundo Malaspina, 2009, trios é "um conjunto de três números naturais consecutivos." e que apresentam propriedades entre eles, tais como:

"O produto de três números de um trio é um número par"

Realmente, se indicarmos por i, i +1, i +2, os três números consecutivos, podemos provar que a propriedade é verdadeira.

a) Suponhamos que i é PAR, então i é da forma 2K, com K natural; então i + 1 é da forma 2K + 1 e i + 2 é da forma 2K + 2. Multiplicando
$2K(2K+1)(2K+2) = 2K(4k^2+6k+2)=8k^3+12k^2+4k$, que é par;

b) Suponhamos que i é ÍMPAR. Então i é da forma 2K+1, i +1 é da forma 2K+2 e i + 2 é da forma 2K+3 ; multiplicando:
$(2K+1)(2K+2)(2K+3) =8k^3+24k^2+22k+6$, que é par.

Como exemplo, consideremos três números naturais consecutivos quaisquer, {3, 4, 5}; o produto vale 60, que é par.

Outra propriedade relacionada aos trios é: "A média aritmética da soma dos extremos de um trio é sempre o termo médio." Podemos novamente provar a propriedade.

Como exemplo, podemos citar o trio {6, 7, 8}, em que o termo médio é a média aritmética dos extremos.

2.2 TRIOS ORDENADOS

A ordem não é necessária na definição do trio, mas pode ser útil considerar explicitamente o caminho natural.

a) Trios pares ou ímpares.

A paridade de um trio poderia ser determinada pela paridade do "número médio" em um trio ordenado, ou pelo "número que não é nem o maior nem o menor dos três elementos do trio". Esses trios podem ser de números pares consecutivos ou ímpares consecutivos.

Há propriedades que podem ser encontradas por meio de uma investigação sobre trios de números naturais. A seguir, apresentamos algumas investigações que podem ser trabalhadas com alunos do Ensino Fundamental ou Médio, para desenvolver neles a habilidade de investigar padrões.

Segundo Ponte (2010), investigar, ensinar e aprender são atividades que podem estar presentes, de forma articulada no ensino-aprendizagem da Matemática e, na atividade profissional do professor, para isso é necessário conceber tarefas que possam ser ponto de partida para investigações e explorações matemáticas dos alunos e discutir o modo como podem ser trabalhadas

Atividade1: A partir das potências de 3, abaixo indicadas, encontre regularidades entre os valores .

- $1^3 = 1$
- $2^3 = 8$
- $3^3 =27$
- $4^3 = 64$
- $5^3 = 125$
- $6^3 = 216$
- $7^3 = 343$
- $8^3 = 512$
- $9^3 = 729$
- $10^3 = 1000$
- $11^3 = 1331$
- $12^3 = 1728$
- $13^3 = 2197$
- $14^3 = 2744$
- $15^3 = 3375$
- $16^3 = 4096$
- $17^3 = 4913$
- $18^3 = 5832$
- $19^3 = 6859$
- $20^3 = 8000$

Há outras regularidades com potências de expoente 5, de expoente 6,etc. Assim, uma possibilidade de trabalhar com as potências de 3 apresentadas , é apresentada abaixo :

SUBTRAI-SE O SUCESSOR DO ANTECESSOR EM ORDEM CRESCENTE DE RESULTADOS.

Entre 1 e 8 .... 8-1 =**7**

Entre 8 e 27 .... 27-8 = **19**

Entre 27 e 64 .... 64-27 = **37**

Entre 64 e 125 .... 125 – 64 = **61**

Entre 125 e 216 .... 216 – 125 = **91**

Entre 216 e 343 .... 343 – 216 = **127**

Entre 343 e 512 .... 512 – 343 = **169**

Entre 512 e 729 .... 729 – 512 = **217**

Entre 729 e 1000 .... 1000 – 729 = **271**

Entre 1000 e 1331 .... 1331 – 1000 = **331**

Entre 1331 e 1728 .... 1728 – 1331 = **397**

Entre 1728 e 2197 .... 2197 – 1728 = **469**

Entre 2197 e 2744 .... 2744 – 2197 = **547**

Entre 2744 e 3375 .... 3375 – 2744 = **631**

Entre 3375 e 4096 .... 4096 – 3375 = **721**

Entre 4096 e 4913 .... 4913 – 4096 = **817**

Entre 4913 e 5832 .... 5832 – 4913 = **919**

Entre 5832 e 6859 .... 6859 – 5832 = **1027**

Entre 8000 e 6859 .... 8000 – 6859 = **1141**

Num segundo momento, repete-se novamente a operação com os resultados obtidos, subtraindo o sucessor do antecessor em ordem crescente das potências de expoente 3, assim :

Entre 7 e 19 .... 19 – 7 = **12**

Entre 19 e 37 .... 37 -19 = **18**

Entre 37 e 61 .... 61 – 37 = **24**

Entre 61 e 91 .... 91 – 61 = **30**

Entre 91 e 127 .... 127 – 91 = **36**

Entre 127 e 169 .... 169 – 127 = **42**

Entre 169 e 217 .... 217 e 169 = **48**

Entre 217 e 271 .... 271 – 217 = **54**

Entre 271 e 331 .... 331 – 271 = **60**

Entre 331 e 397 .... 397 – 331 = **66**

Entre 397 e 469 .... 469 – 397 = **72**

Entre 469 e 547 .... 547 – 469 = **78**

Entre 547 e 631 .... 631 – 547 = **84**

Entre 631 e 721 .... 721 – 631 = **90**

Entre 721 e 817 .... 817 – 721 = **96**

Entre 817 e 919 .... 919 – 817 = **102**

Entre 919 e 1027 .... 1027 – 919 = **108**

Entre 1027 e 1141 .... 1141 – 1027 = **114**

Após este segundo momento, começam a surgir às primeiras coincidências entre os números trabalhados até então, depois de duas subtrações simultâneas o resultado obtido apresenta uma regularidade em que estes valores estão sob forma de progressão aritmética (PA), com uma razão 6 (r = 6).

(**12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114)**

ATIVIDADE2: A partir deste momento, podemos , então estabelecer uma relação com os trios de números inteiros, onde algumas propriedades serão identificadas, dentre elas destacamos :

Agrupamos o resultado em grupo de 3 (três) números .

- **(12, 18, 24)**
- **(30, 36, 42)**
- **(48, 54, 60)**
- **(66, 72, 78)**
- **(84, 90, 96)**
- **(102, 108, 114)**

Primeira propriedade: “A média aritmética dos extremos é igual ao termo do meio”

- (**12, 18, 24) .... 12 + 24 = 36 e 36/2 = 18**
- **(30, 36, 42) .... 30 = 42 = 72 e 72q2 = 36**

- **(48, 54, 60) .... 48 + 60 = 108 e 108/2 = 54**
- **(66, 72, 78) .... 66 + 78 = 144 e 144/2 = 72**
- **(84, 90, 96) .... 84 + 96 = 180 e 180/2 = 90**
- **(102, 108, 114) .... 102 + 114 = 216 e 216/2 = 108**

Segunda propriedade: "Somando os algarismos dos números dos trios individualmente até obter a unidades, teremos sempre a centena 396".

- **(12, 18, 24)**
  (1+2, 1+8, 2+4)
  (3, 9, 6)

- **(30, 36, 42)**
  (3+0, 3+6, 4+2)
  (3, 9, 6)

- **(48, 54 , 60)**
  (4+8, 5+4, 6 +0)
  (12, 9, 6)
  (1+2, 9, 6)
  (3, 9, 6)

- **(66, 72, 78)**
  (6 + 6, 7 + 2, 7+8)
  (12, 9, 15)
  (1 + 2, 9, 1 + 5)
  (3 9 6)

- **(84, 90, 96)**
  (8 + 4, 9 + 0, 9 + 6)
  (12 9, 15)
  (1+2, 9, 1+5)
  (3, 9, 6)

- **(102, 108, 114)**

  (1+0+2, 1+0+8 , 1+1+4)

  (3, 9, 6)

Até então trabalhávamos apenas com grupo de números obtidos a partir da subtração entre eles, voltamo-nos agora para os resultados das potências de expoente 3, onde também identificamos várias propriedades relacionadas aos trios de números, para tal agrupamos os resultados das potências de expoente 3 em grupos de 3(três) números e estabelecemos as propriedades . Desta forma temos:

- $\mathbf{1^3 = 1}$
- $\mathbf{2^3 = 8}$
- $\mathbf{3^3 = 27}$
- $\mathbf{4^3 = 64}$
- $\mathbf{5^3 = 125}$
- $\mathbf{6^3 = 216}$
- $\mathbf{7^3 = 343}$
- $\mathbf{8^3 = 512}$
- $\mathbf{9^3 = 729}$
- $\mathbf{10^3 = 1000}$
- $\mathbf{11^3 = 1331}$
- $\mathbf{12^3 = 1728}$
- $\mathbf{13^3 = 2197}$
- $\mathbf{14^3 = 2744}$
- $\mathbf{15^3 = 3375}$
- $\mathbf{16^3 = 4096}$
- $\mathbf{17^3 = 4913}$
- $\mathbf{18^3 = 5832}$
- $\mathbf{19^3 = 6859}$
- $\mathbf{20^3 = 8000}$
- $\mathbf{21^3 = 9261}$

Agrupando :

- (1, 8, 27)
- (64, 125, 216)
- (343, 512, 729)
- (1000, 1331, 1728)
- (2197, 2744, 3375)
- (4096, 4913, 5832)
- (6859 , 8000 , 9261)

Propriedade: "Na soma dos algarismos até a unidade, o termo médio será sempre 8 (oito) "

- (1 , 8 , 27) .... Médio **8**
- (64 , 125 , 216) ....Médio 1+2+5 = **8**
- (343 , 512 ,729) .... Médio 5+1+2 = **8**
- (1000 , 1331 , 1728) ....Médio 1+3+3+1 = **8**
- (2197 , 2744 , 3375)............. Médio 2+7+4+4 =17 e 1+7 = **8**
- (4096 , 4913 ,5832)............. Médio 4+9+1+3 = 17 e 1+7 = **8**
- (6859 , 8000 , 9261)............. Médio 8+0+0+0 = **8**

Propriedade: "A soma de **todos os algarismos** do trio até a unidade é sempre 9 (nove)" .

- (1,8,27) .... 1+8+2+7 =18 = 1+8 = **9**
- (64,125,216)....... 6+4+1+2+5+2+1+6 = 27 = 2+7 = **9**
- (343,512,729) ..... 3+4+3+5+1+2+7+2+9 = 36 = 3+6 = **9**
- (1000,1331,1728).. 1+0+0+0+1+3+3+1+1+7+2+8 = 27 = 2+7 = **9**
- (2197,2744,3375).. 2+1+9+7+2+7+4+4+3+3+7+5 = 54 = 5+4 = **9**
- (4096,4913,5832).. 4+0+9+6+4+9+1+3+5+8+3+2 = 54 = 5+4 = **9**
- (6859,8000,9261).. 6+8+5+9+8+0+0+0+9+2+6+1 = 54 = 5+4 = **9**

Propriedade: "A soma dos extremos dos trios, **exceto a potência 1**, subtraindo o termo médio, o resultado é 9(nove), somando-se os algarismos até a unidade ."

- (8,27,64).....................(8+64) -27 =45 = 4+5 = **9**
- (125,216,343) .... (125+343) -216 =252 =2+5+2 = **9**
- (512,729,1000)......... (512+1000) – 729 =783 = 7+8+3 =18 =1+8 = **9**

- (1331,1728,2197)..... (1331+2197) -1728 =1800 = 1+8+0+0 = **9**
- (2744,3375,4096).... (2744+4096) -3375 =3465 = 3+4+6+5 =18 =1+8 =**9**
- (4913,5832,6859)... (4913+6859) -5832 =5940 =5+9+4+0 =18 =1+8=**9**
- (8000,9261,10648).. (8000+10648)-9261 =9387 =9+3+8+7 =27=2+7=**9**

Propriedade: "A soma dos algarismos da média aritmética de **grupos** de 3(três) trios até a unidade terá sempre como resultado a centena **396**"

- **Grupo 1**

Somando-se e dividindo-se por 3

(1, 8, 27) .... .1+8+27 = 36 e 36/3=12 1+2 = **3**

(64, 125, 216).... 64+125+216 =405 e 405/3=135 =1+3+5 =**9**

(343, 512, 729)... 343+512+729 =1584 e 1584/3 =528 5+2+8 =15 =1+5=**6**

- **Grupo 2**

(1000, 1331, 1728)....... 1000+1331+1728=4059 e 4059/3=1353= 1+3+5+3 = 12 = 1+2 = **3**

(2197, 2744, 3375)...... 2197+2744+3375 = 8316 e 8316/3 =2772 = 2+7+7+2 =18 = 1+8 = **9**

(4096, 4913, 5832) ..... 4096+4913+5832 = 14841 e 14841/3 = 4947 =4+9+4+7 =24 = 2+4 = **6**

- **Grupo 3**

(6859, 8000, 9261) .... 6859+8000+9261 = 24120 e 24120/3 = 8040 = 8+0+4+0 =12 = 1+2 = **3**

(10468,12167,13824) .... 10648+12167+13824 = 36639 e 36639/3 =12213 = 1+2+2+1+3 = **9**

(15625, 17576, 19683) .... 15625+17576+19683 = 52884 e 52884/3 =17628 = 1+7+6+2+8 =24 2+4 = **6**

3. CONCLUSÃO

Os Pitagóricos desejaram compreender a natureza íntima dos números e elaboraram os *números figurados*, que são números expressos como reunião de pontos numa determinada configuração geométrica, isto é, a quantidade de pontos representa um número e estes são agrupados em formas geométricas sugestivas, dando origem a números classificados como número estrela, número piramidal–, número tetraédrico, entre outros. Outros povos, como os Maias, já citados anteriormente, os babilônicos, os hindus e vários outros também se dedicaram a interpretar e decifrar a linguagem dos números-, elaborando conceitos baseados nas propriedades numerológicas e místicas.

As propriedades dos números em geral, e em particular dos números inteiros, bem como a larga classe de problemas que surge no seu estudo, podem ser facilmente compreendidos mesmo por não matemáticos. Dessa forma, procuramos mostra que de certa forma os números, assim como as linguagens, também possuem uma forma de comunicação, através das coincidências e regularidades .

4. REFERÊNCIAS

DAVIS, P. HERSH, R.**A experiência matemática**. Lisboa,.Gradiva.1995.

PONTE, João, P. Explorar e investigar em Matemática. Union:Revista Iberoamericana de Educação Matemática,n.21 , p.13-30 , mar. 2010.

MALASPINA Jurado, U. Trios para investigar. Union: Revista Ibero americana de Educação Matemática,n.17, p.96-101 , mar.2009.

Polya, G.. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência. 1995

ROSA, M. OREY, D.C. Um estudo etnomatemático das esteiras (pop) sagradas dos maias. HORIZONTES,V.22 ,n.1,p.29-41,jan/jun.2004.disponível em::http://ufop.academia.edu/DanielOrey/Papers/299457/Um_Estudo_Etnomatematico_Das_Esteiras_Pop_S,agradas_Dos_Maias .Acesso em 28/12/2012