FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA: A MATEMÁTICA COMO ATIVIDADE NORMATIVA

Cristiane Maria Cornelia Gottschalk r
FEUSP
crisgott@usp.br

Resumo:
Trata-se de apresentar as concepções filosóficas hegemônicas sobre a natureza do conhecimento matemático (intuicionismo, formalismo e logicismo) e algumas de suas repercussões nas práticas pedagógicas escolares, tendo como finalidade esclarecer confusões no contexto escolar decorrentes de crenças, tais como, a de que as proposições da matemática se aproximariam das hipóteses das ciências empíricas (realismo empirista), como também a de que a atividade matemática decorreria de operações mentais a serem potencializadas pela escola (idealismo). Neste sentido, recorreremos às idéias do segundo Wittgenstein que, ao mesmo tempo em que considera alguns dos pressupostos das correntes filosóficas acima, faz também críticas a elas, ao mostrar que todas se ancoram em uma concepção referencial da linguagem. Forjando ferramentas como os conceitos de “jogo de linguagem” e “semelhanças de família”, o filósofo austríaco nos possibilita um outro olhar sobre a natureza do conhecimento matemático, vendo-o como uma atividade *normativa*, cujos enunciados têm o caráter de regras, imersos em nossas formas de vida. Desta perspectiva, esclarece-se completamente (e não definitivamente) os equívocos a que somos levados em nossas práticas pedagógicas ao postularmos significados extralingüísticos (entidades abstratas, processos mentais...) que corresponderiam, de algum modo, aos nossos enunciados matemáticos.

Palavras-chave: filosofia da educação matemática; jogo de linguagem; concepção referencial da linguagem; ensino; aprendizagem.

> *Para que a matemática necessita de uma fundamentação? Creio que necessita disto tão pouco quanto as proposições que tratam de objetos físicos ou as que tratam das impressões dos sentidos necessitam de uma análise. Embora precisem sim, tanto as proposições matemáticas como as demais, de uma clarificação de sua gramática.*
>
> Wittgenstein[1]

[1] Cf. Wittgenstein, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matematica*. Madrid: Alianza Editorial, 1987, Parte VII, 16. Outra obra de Wittgenstein a que recorreremos frequentemente ao longo desta exposição são as *Investigações Filosóficas* em sua edição bilíngüe (Philosophical Investigations. Trad. G. E. M. Anscombe. Oxford: Blackwell Publishers, 1997) e nos referiremos a estas duas obras pelas siglas OFM e IF respectivamente.

A reflexão filosófica contemporânea sobre a natureza do conhecimento matemático pode ser esquematicamente representada através de três grandes movimentos: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. Em todos eles aparece a idéia de que haveria algum tipo de realidade matemática a ser descoberta pelos matemáticos; ou seja, acredita-se que a matemática se refira a um mundo ora povoado por entidades abstratas (logicismo), ora ancorada em processos mentais (intuicionismo) ou ainda, se resumiria a signos físicos, escritos ou sonoros (formalismo). Estas diversas concepções sobre os fundamentos da matemática se refletem na educação matemática de dois modos básicos, que pretendemos analisar a seguir: uma concepção empirista e uma idealista da matemática.

A concepção empirista da atividade matemática, herdeira de algumas idéias do logicismo e do formalismo, inspira-se metodologicamente nos modelos das ciências da natureza: as proposições matemáticas são vistas como hipóteses a serem testadas e suas demonstrações como experimentos em um processo contínuo de exploração e de descoberta de entes matemáticos. Por outro lado, a concepção idealista do saber matemático, influenciada pelo intuicionismo, parte do pressuposto de que a atividade matemática decorreria de supostas operações mentais a serem potencializadas pela escola. Basta lembrar do *slogan* construtivista de que "é o aluno que constrói seu próprio conhecimento", como se fosse possível alcançar qualquer conhecimento, inclusive o matemático, por si só, bastando para isto que sejam propiciadas condições suficientes de aprendizagem. O que une estas duas concepções de atividade matemática (a idealista e a empirista) é a crença de que haveria um significado essencial dos entes matemáticos fundamentados ora numa intuição, ora numa ação empírica. Em outras palavras, é como se os significados matemáticos estivessem presentes de algum modo ora na mente da criança, ora no empírico, e através de algum método pudessem ser apreendidos pelo aprendiz. Ou ainda, é como se a atividade matemática se referisse a algo existente *a priori* no sujeito ou no mundo externo, o que nos leva a concluir que estas concepções se apóiam em uma concepção referencial da linguagem[2]. Suas proposições teriam a função de *descrever* uma realidade externa a elas, seja esta uma realidade ideal ou um modo específico de expressão de processos mentais.

No entanto, quando consideramos a matemática como descritiva do espaço físico (conhecimento empírico) ou produto de estruturas cognitivas, geramos problemas filosóficos do seguinte tipo: os objetos matemáticos existem *a priori* ou são construídos? Qual é o modo pelo qual são descobertos ou construídos? Em que sentido podemos dizer que a matemática é *a priori*? Se partirmos do pressuposto de que o conhecimento empírico é o conhecimento que requer justificação da experiência, em contraposição ao conhecimento *a priori*, que prescinde dessa justificação, como então considerar o conhecimento matemático? É *a priori* ou empírico? E a indagação que mais intriga os filósofos da matemática: se a matemática é, em grande parte, um jogo mental, uma ciência objetiva e racional que parte de alguns princípios ou axiomas preestabelecidos, como pode coincidir com o comportamento natural das coisas? Esperamos ir "dissolvendo" parte dessas questões, recorrendo fundamentalmente a algumas idéias de Wittgenstein sobre os fundamentos da matemática, o qual, ao atentar para as diversas funções de nossa linguagem, esclareceu em muitos aspectos a natureza do conhecimento matemático.

Matemática: conhecimento *a priori* ou empírico?

[2] Denominarei aqui concepção referencial da linguagem como aquela que faz corresponder a todo signo ou expresssão lingüística uma realidade extra-linguistica. Nesta concepção, a função da linguagem seria meramente descritiva ou comunicativa.

Segundo o filósofo da matemática Stephen Barker , há basicamente dois tipos de conhecimento: o empírico e o *a priori*. Áreas como a física, a biologia e a história assentam suas conclusões em observações (conhecimento empírico), enquanto uma matéria como a lógica busca obter conhecimento *a priori* das regras que governam a validade dos argumentos. Estaria a matemática mais próxima da lógica ou da física?

Voltando um pouco na história, o grande geômetra Euclides, por volta de 300 a.C., escreve *Os Elementos*, onde reúne de modo sistemático as principais formulações geométricas de seus antecessores. Um de seus objetivos era garantir que o significado de cada palavra estivesse adequadamente fixado (ponto, reta, plano...). Feito isso, a geometria passa a ser vista como ciência: uma ciência dos pontos, das linhas e das figuras. Seus axiomas e teoremas foram considerados por séculos *a descrição* do espaço físico, sua geometria passa a ser aceita como um corpo de conhecimentos científicos acerca da natureza do espaço.

A geometria euclidiana, além de ser considerada verdadeira, era vista como *a priori* e transcendental pela maioria dos matemáticos. Um dos argumentos apresentados como justificativa era o de Platão, que afirmava que nosso conhecimento geométrico não podia estar baseado em evidências sensoriais, sendo atingível apenas através da razão. Tanto a tradição platônica permaneceu inabalável até o século XIX, como era ponto pacífico até então que os postulados e os teoremas de Euclides fossem verdadeiros.

No entanto, alguns filósofos passam a argumentar que enunciados, por exemplo, a propósito de pontos, linhas e figuras poderiam ser empíricos de maneira indireta, como uma alusão a objetos que se assemelham a pontos, retas ou determinadas figuras. Mesmo nas ciências físicas, haveria enunciados que se referem a coisas que não são passíveis de observação direta. Por exemplo, todos os problemas da cinemática e da mecânica que não consideram o atrito em suas formulações. Mesmo que não possamos simular o vácuo perfeito, isso não impede que os físicos descrevam os movimentos realizados nessas situações ideais. Da mesma forma, reiteram os empiristas, enunciados sobre pontos e retas podem ser considerados aproximações ideais de objetos empíricos e teriam, portanto, também uma natureza empírica. Assim, o argumento de Platão não seria suficiente para justificar o caráter *a priori* dos conhecimentos geométricos. Em defesa do caráter *a priori* da geometria, o filósofo alemão Emanuel Kant formula outros argumentos. Para ele, os postulados e teoremas de Euclides não poderiam ser empíricos, uma vez que diferem grandemente das generalizações empíricas. Vejamos em que sentido Kant faz essa afirmação através de um exemplo.

Consideremos a proposição da geometria que diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. O fato de medirmos os ângulos de diversos triângulos e não obtermos exatamente as mesmas somas não invalida a afirmação. Além do quê, a quantidade de verificações empíricas não a torna mais ou menos verdadeira. Em outras palavras, essa proposição é necessária, no sentido de que a soma dos ângulos internos de *qualquer* triângulo *deve* ser igual a 180º, independentemente de qualquer verificação empírica. É nesse sentido que as proposições da matemática seriam *a priori*.

Mas isso não significa que Kant compartilhe do platonismo. A grande diferença entre a explicação de Platão (realista) e a de Kant (idealista[3]) é que, para o primeiro, existe uma realidade eterna constituída por entes matemáticos (o céu platônico) a que teríamos tido acesso em um diferente estado metafísico. O esforço intelectual seria o de relembrar o que já havíamos visto diretamente no passado. Já para Kant, não se trata de conhecer algo

[3] Para a concepção idealista, as entidades abstratas nascem do pensar, possuindo um tipo de realidade, embora não tenham existência independente, como para Platão. Para Kant, também chamado de “conceitualista”, o “mundo em si” é inacessível para nós.

exterior ao espírito, mas de um processo que ocorre na própria mente, que reveste o mundo de uma forma euclidiana; assim sendo, o propósito da ciência deve ser, então, estudar o mundo tal qual aparece para nós, ou seja, através de nossos enunciados, que teriam características distintas.

Kant faz uma distinção entre enunciados tais que basta compreendê-los para sabermos se são verdadeiros ou falsos (enunciados analíticos) e os que, para a determinação de sua verdade, não basta que se os compreenda (enunciados sintéticos): nos do primeiro tipo, o predicado já está contido no sujeito, como, por exemplo, "todos os corpos têm extensão", pois o predicado "extenso" está contido implicitamente no sujeito "corpos". Já os do segundo tipo acrescentam o conceito expresso pelo predicado ao conceito do sujeito, constituindo um juízo que enriquece o conhecimento, como, por exemplo, o enunciado "todos os corpos se movimentam". Seriam então as verdades *a priori* da geometria e da matemática princípios sintéticos ou analíticos?

Para Kant alguns enunciados da geometria seriam proposições analíticas, como, por exemplo, "o triângulo é uma figura", uma vez que ser uma figura já faz parte de ser triângulo. Mas as leis fundamentais da geometria teriam caráter sintético, como, por exemplo, a afirmação de que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º", cuja verdade não nos é dada de forma imediata, exigindo-se, para alcançá-la, uma demonstração matemática. Assim, essa afirmação é um acréscimo ao conceito de "ângulos internos do triângulo", obtido através de uma demonstração independente de qualquer verificação empírica. Nesse sentido, a geometria seria uma ciência que nos oferece um conhecimento sintético e ao mesmo tempo *a priori* da forma espacial do mundo.

Mas essa natureza sintética e ao mesmo tempo *a priori* das proposições matemáticas colocava uma outra questão: *como a mente humana se torna capaz de possuir esse conhecimento?* Se a experiência não é a base para adquiri-lo, o que o torna possível? Uma resposta possível a estas indagações foi dada por Heinrich Hertz, um dos primeiro físicos a apresentar uma teoria de modelos matemáticos com raízes kantianas[4] no final de século XIX, em sua obra *Princípios de Mecânica*. Hertz caracterizou esses modelos dizendo serem possíveis vários modelos (*Bilder*) dos mesmos objetos e que esses modelos podiam diferir em vários aspectos. Para representar um fenômeno mecânico, bastaria que três condições fossem satisfeitas: a consistência lógica, a correspondência com dados empíricos e a simplicidade de apresentação. Assim, os modelos matemáticos de fenômenos mecânicos seriam sistemas dedutivos apriorísticos que representariam a experiência empírica, ou seja, Hertz faz uma distinção entre a estrutura interna dos modelos matemáticos e sua relação com os fatos dados na experiência.

Mas o reconhecimento definitivo da vantagem de distinguir modelos teóricos de descrições da realidade em relação às descrições empiristas veio da própria matemática, com o surgimento das geometrias não euclidianas no século XIX, que haviam demonstrado ser tão logicamente consistentes quanto a geometria euclidiana. Assim, a existência de tais geometrias não euclidianas derrubou a crença tradicional de que as leis da geometria euclidiana seriam necessariamente verdadeiras e que expressariam o conhecimento sintético e *a priori* acerca de nosso mundo.

Deste modo, o argumento de que nosso conhecimento geométrico estaria baseado em evidências sensoriais (na medida em que, até então, seus axiomas faziam alusões a objetos que nos davam a idéia de pontos, retas e figuras) também é definitivamente derrubado. Não havia mais sentido em dar atenção a significados últimos dos termos

[4] A atitude de Hertz em relação à teoria física pode ser vista como kantiana, na medida em que também tenta, como Kant, definir a amplitude, as condições de validade e os limites de seus simbolismos.

primitivos que compareciam nos axiomas, pois esses significados nada tinham a ver com a validade lógico-formal das demonstrações dos teoremas. As relações do conhecimento geométrico com o mundo observável passaram a ser revistas e, conseqüentemente, a questão da verdade matemática foi fortemente abalada. Os termos primitivos foram mudando em função dos novos sistemas geométricos em que estavam inseridos. As definições ostensivas de Euclides ("isto é ponto", "isto é uma reta"...) não tinham fornecido um critério de identidade permanente. O mesmo ocorreu com os conceitos de número e outros objetos matemáticos. Quais seriam, então, os critérios últimos para a significação? E qual seria o papel das definições nesse processo de formalização de um sistema matemático?

Os padrões iniciais da significação

Com as geometrias não euclidianas, surgem novas dúvidas na filosofia da matemática: o que pode ser considerado termo primitivo e o que é uma definição? Por exemplo, o termo "inclinação" seria primitivo, definindo-se, por seu intermédio, "ângulo plano"? Ou seria "ângulo plano" a noção primitiva do sistema, entendendo-se que o termo "inclinação", extra-sistema, serviu apenas para elucidá-la?

Além destas questões, surge outra mais crucial: haveria uma geometria que descrevesse mais fielmente o nosso mundo[5]? Pensamos que esta é uma falsa questão, pois o que temos na verdade são diferentes modelos, ou melhor, diferentes escolhas que permitem descrições mais ou menos adequadas do mundo em função de determinados objetivos[6]. Nas concepções modernas da matemática, empregam-se definições com o objetivo de aumentar o poder dedutivo dos sistemas. Podemos ter várias definições, todas igualmente legítimas, contanto que preservem a verdade dos teoremas e a falsidade das sentenças falsas. No entanto, esse não é o único papel de uma definição. Alguns filósofos se detiveram no caráter constitutivo das definições e dos axiomas na linguagem matemática, ou seja, investigaram o papel que estas cumprem na atribuição de significados a outras proposições. Dentre esses filósofos, Wittgenstein[7] tem uma posição extremamente original e esclarecedora sobre esse processo. Suas observações sobre a matemática são de extremo interesse, a nosso ver, para compreender como atribuímos significados não só às proposições matemáticas, mas às nossas proposições em geral. Vejamos algumas de suas idéias a fim de esclarecer a especificidade das proposições matemáticas e, por conseguinte, a natureza dessa atividade, tendo em vista o seu ensino e aprendizagem.

Algumas idéias de Wittgenstein

Segundo Wittgenstein, a confusão se instala na filosofia quando não atentamos para os diferentes usos das proposições e das palavras nos seus diversos contextos lingüísticos. Os filósofos tendem a levantar "grandes" questões que giram em falso, como engrenagens rodando no vazio, ao se expressarem através de conceitos metafísicos, ignorando o "atrito" que nos é dado pelo uso cotidiano dos termos de nossa linguagem. Vejamos o que Wittgenstein quer dizer com isso através de um exemplo.

---

[5] Uma resposta tentadora para essa questão poderia ser: a geometria de Riemann. Mas, mesmo se considerássemos esta geometria como passível de descrever nosso mundo físico, como nos lembra Barker, embora o espaço dessa geometria tenha curvatura, como no mundo físico, esta é constante, enquanto no espaço do mundo físico não se tem o mesmo grau de curvatura em todos os pontos.

[6] Para alguns filósofos, o fato de a teoria da relatividade de Einstein ter se utilizado da geometria riemanniana, portanto não euclidiana, seria a prova da completa refutação das idéias de Kant sobre o espaço.

[7] Cerca de metade dos escritos de Wittgenstein no período entre 1929 e 1944 tematizaram a filosofia da matemática.

Suponhamos que, ao descrever um objeto digamos, entre outras coisas, que é azul. Alguém poderia perguntar, o que é “azul”? Ao responder “azul é uma cor”, estamos apenas dando um valor possível da “variável” cor. Não se está aprendendo nada de novo, apenas uma referência dessa variável. Neste sentido, a proposição “azul é uma cor” é *a priori*. É uma “regra de representação” que pertence às conexões internas do que está sendo representado. Já ao descrever um objeto como tendo a cor azul, estamos estabelecendo uma conexão externa entre o objeto e sua cor. Em termos wittgensteinianos, uma mesma proposição pode ter um uso gramatical ou empírico, dependendo do contexto em que é aplicada. Assim, “esse objeto é azul” pode ser tanto a resposta à pergunta “o que é *azul*?” como uma descrição deste objeto. Caso a expressão seja empregada de forma descritiva, necessariamente ela pressupõe alguma forma de representação *a priori***.** Assim, Wittgenstein permite estender a idéia hertziana de que há diferentes formas de descrever cientificamente fenômenos físicos para *qualquer descrição empírica*, ou seja, *toda descrição* supõe formas representacionais.

Wittgenstein não utiliza o termo “gramática” em seu sentido usual, mas para designar as regras constitutivas da linguagem e também a sua organização, ou seja, sua “gramática profunda”. Essas regras seriam parte da significação de uma palavra, determinam o que tem sentido e o que não tem sentido dizer. Recorremos a técnicas lingüísticas que se entrelaçam com conteúdos extra-lingüísticos com o intuito de dar sentido à experiência. Por exemplo, através de uma tabela de cores, associamos imagens de cores às palavras que convencionamos corresponderem a essas cores. No entanto, como queremos ressaltar, nem as imagens e nem a tabela de cores são a base dessa atividade lingüística. Tanto os conteúdos exra-lingüísticos como a técnica utilizada fazem apenas parte dos jogos preparatórios que precedem o estabelecimento de relações conceituais entre as cores. Ainda estamos no terreno das palavras, preparando a área para a formação de uma “gramática das cores”. Esta se constitui à medida que estabelecemos relações conceituais *a priori*, também convencionais, que são nossas certezas sobre essa região da percepção: “o branco é mais claro que o preto”, “as cores azul, vermelha e amarela são cores puras (primárias)”, “ao misturar o azul com o amarelo, obtemos a cor verde” e assim por diante. Depois de estabelecer essas relações conceituais, ou seja, uma forma de representação, estamos em condições de fazer descrições: passa a ter sentido dizer que “essa mesa é marrom”, “essa parede é branca” e assim por diante. As formas de representação estão profundamente incorporadas em nossos modos de agir e expressar. Embora tenhamos uma certa liberdade para escolher nossas formas de representação, uma vez escolhida uma gramática, essa liberdade não se transmite às descrições de dentro dessa gramática. Por exemplo, não tem sentido dizer que duas cores diferentes estão no mesmo ponto de um espaço visual ao mesmo tempo, ou que “a parede branca é mais escura do que a preta”, se considerarmos nossa forma usual de representação das cores.

Mas é só na aplicação das palavras que se mostra o uso que é feito do conceito e, por conseguinte, seu sentido. Dizer “essa parede é branca” pode tanto ter uma função descritiva quanto uma função gramatical – podemos *descrever* a parede ou utilizá-la como um *paradigma* da cor branca. O caráter *a priori* das regras de representação é fundamental para compreendermos esses diferentes usos das proposições que empregamos ora como regras gramaticais, ora como descrições, independentemente dos conteúdos de que partimos (seja uma parede ou qualquer outro objeto de cor branca).

Essa distinção é importante não só para dissolver problemas filosóficos, mas também para evitar confusões já em curso nas atuais práticas pedagógicas. Na base dessas confusões, encontramos uma concepção referencial da linguagem que vem desde as primeiras tentativas metafísicas dos filósofos para apreender o significado de determinados conceitos ao procurarem significados essenciais por detrás da multiplicidade de seus usos em situações empíricas. Por exemplo, vejamos como utilizamos a palavra "igual" em nossas expressões lingüísticas. Quando observo duas pessoas caminhando juntas e digo: "O tamanho deles é igual!" estou utilizando esta palavra do mesmo modo de quando digo "2 + 2 = 4"?

No primeiro caso estou utilizando a palavra "igual" no sentido descritivo, estou descrevendo uma situação empírica, enquanto que no segundo caso o que estou dizendo é que dois mais dois *deve* ser igual a quatro, ou seja, estou utilizando esta palavra no sentido normativo. Em outras palavras, "igual" pode descrever algum fato, como o tamanho de duas pessoas, e, em outro contexto lingüístico como o da matemática, já tem outro uso, a saber, como regra a ser seguida. Para Wittgenstein, a confusão se instala quando não distinguimos entre o uso gramatical e o uso empírico de nossos enunciados, reduzindo nossas formas de representação a proposições empíricas, o que revela uma concepção referencial da linguagem subjacente às nossas teorias do significado.

Através dessas observações filosóficas, Wittgenstein faz uma crítica à concepção referencial da linguagem que permeia a reflexão filosófica sobre a natureza dos nossos saberes em geral, ou seja, à idéia de que haja um significado essencial por trás das palavras. Segundo o filósofo, as palavras são utilizadas numa infinidade de maneiras diferentes e aparentadas umas com as outras de diversos modos. Não há algo comum a todas as aplicações de uma palavra que nos daria a sua "essência". Cada palavra tem uma família de significados, como uma corda trançada por diversos fios, mas com nenhum fio percorrendo-a do começo ao fim. Da mesma forma que o conceito de jogo, um mesmo conceito matemático pode ter significados diferentes como, por exemplo, o conceito de número, cujos significados são "próximos" um do outro, mas não exatamente os mesmos. Tanto os jogos quanto os números formam famílias semelhantes entre si.

No entanto, Wittgenstein utiliza a palavra *jogo* não só como exemplo paradigmático do fato de não existirem características essenciais da linguagem, mas também para dar a idéia de uma atividade regrada. Aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso. Uma das conseqüências dessa idéia é que não há sentido em ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, seguindo uma regra[8].

Seguir uma regra

O que significa seguir uma regra? E como decidir quando a regra está sendo seguida? Para o filósofo, seguir uma regra é semelhante a obedecer a uma ordem. Somos treinados [*abrichtet*] a fazê-lo; reagimos a uma ordem de determinada maneira. Mas e se uma pessoa reage de um modo e outra, de outro à ordem e ao treinamento? Qual estará certa? Segundo ele, a maneira comum de agir das pessoas (ou, mais literalmente: 'A maneira humana comum de agir') é o quadro de referência mediante o qual interpretamos uma linguagem desconhecida.

Assim, é apenas o esquema comum de modos de comportamento partilhados que pode nos dizer se alguém seguiu uma determinada regra. A maneira como reagimos é um dos aspectos que revelam se seguimos a regra corretamente. Por exemplo, ao ouvir a palavra "azul", podemos tanto recorrer a imagens mentais como a uma tabela que associa imagens de cores a seus respectivos nomes. Ao ouvir a palavra "igual", podemos entendê-

[8] O conceito de regra aqui deve ser entendido num sentido bem geral: embora tenha função normativa, não se reduz a comando e ordens. As regras de nossa linguagem cotidiana, por exemplo, nos dizem o que é falar corretamente ou com sentido. São como padrões de correção, governando uma multiplicidade ilimitada de ocorrências.

la no sentido de mesmo tamanho (se estivermos comparando fisicamente duas pessoas) ou como uma das normas da matemática. Associamos as palavras a técnicas diferentes, dependendo do contexto em que nos encontramos.

Vejamos como isto ocorre em uma aula aula de matemática. Os objetos da matemática não têm propriedades a serem descritas como ocorre com os objetos de natureza empírica. Por exemplo, ao ensinar o conceito de triângulo recorremos a diversas formas triangulares como *meios* de apresentação para a formação desse conceito, as quais servem como regras para a utilização da palavra *triângulo*. Uma vez formado esse conceito, este prescinde da existência de formas triangulares para que tenha significado e possa ser aplicado. Nesse sentido, a definição da palavra *triângulo* – “um polígono fechado de três lados” – é *gramatical*. Dizer que o triângulo tem três lados não é uma *descrição* de triângulo – essa proposição *define* o que é um triângulo. Estabelece-se uma conexão interna entre conceitos. A palavra não se refere a algum ente ideal em um céu platônico, da mesma forma que “azul” não corresponde a algo inefável. A definição de um símbolo é apenas uma regra para o uso desse símbolo. Compreender a palavra “azul” é saber seguir a regra de utilização dessa palavra, e não a apreensão do que *é* azul (ou do que *é* triângulo). As definições têm uso gramatical e não descritivo.

Mas não apenas as definições são consideradas por Wittgenstein proposições gramaticais; toda proposição que envolve uma certeza também revela sua natureza gramatical. Por exemplo, a proposição “só eu mesmo posso saber se sinto uma dor” é uma proposição gramatical, pois não posso me representar o contrário disso. Da mesma forma, “toda mesa tem um comprimento”. Já dizer que “esta mesa tem o mesmo comprimento que uma outra” é uma proposição empírica, descritiva, pois posso sem problemas imaginar uma proposição diferente dessa. “Pois aqui eu compreendo o que significa formar-se uma imagem do contrário.” (Wittgenstein, IF, §251) Uma proposição é gramatical porque a usamos normativamente. Não podemos pensar o contrário do que ela exprime. E é neste sentido que também usamos as proposições da matemática. Elas também são de natureza gramatical. Dizemos “dois mais dois *deve* ser igual a quatro”, pois não podemos imaginar outro resultado. É uma regra a ser seguida, daí o caráter apriorístico da matemática.

Assim, compreender uma proposição matemática significa compreender uma regra. Mas esta afirmação não é trivial. Para explicitá-la, Wittgenstein introduziu a noção de “seguir uma regra”. Segundo ele, *compreendemos* uma regra se somos capazes de segui-la. Mas esta também não é uma afirmação trivial. Como saber se houve de fato compreensão da regra?[9] Pode-se tê-la seguido casualmente ou ter seguido uma outra regra qualquer. Por exemplo, duas pessoas jogando xadrez. Suponhamos que a primeira conheça as regras do jogo e que esteja movendo as peças de acordo com as regras do xadrez. Já a segunda pessoa move-as de forma aleatória. Quais são os critérios para saber se o segundo “jogador” em um determinado momento seguiu de fato a regra ou se apenas agiu de acordo com ela? Como saber se o jogador *compreendeu a regra*? Seria um determinado estado mental do enxadrista a condição para que ele tenha seguido a regra com compreensão?

Em um primeiro momento, parece haver um abismo entre a regra e sua aplicação, que será transposto por um novo conceito forjado por Wittgenstein, o conceito de “jogo de linguagem”. A meu ver, este é o “ovo de Colombo” que permite a transposição do aparente abismo entre a regra e sua aplicação.

Jogo de linguagem

[9] Essa é uma questão básica para a educação. Um aluno poderia estar seguindo uma regra casualmente ou de acordo com outra regra qualquer. Quais os critérios para um professor avaliar a atividade desse aluno?

Wittgenstein introduziu a expressão "jogo de linguagem" inicialmente para chamar a atenção para as semelhanças entre linguagem e jogos. Da mesma forma que um jogo, a linguagem também possui regras constitutivas que determinam o que é corrreto ou o que tem sentido (a gramática profunda dessa linguagem). Aos poucos, Wittgenstein vai ampliando o uso dessa expressão, que não mais emprega apenas para salientar o aspecto regulativo comum aos jogos e à linguagem, mas com a intenção de ressaltar o vínculo desta com as diversas atividades que a acompanham.

Por exemplo, o gesto ostensivo é um instrumento lingüístico que nos permite estabelecer uma ligação (interna) entre uma palavra e o objeto para o qual apontamos. Podemos imaginar outra forma de vida na qual esse gesto tivesse outro significado. A expressão "jogo de linguagem" enfatiza o papel que nossas formas de vida têm na utilização de nossas palavras. Todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma práxis, em uma forma de vida. Nesse sentido, o elo semântico entre a linguagem e a realidade não é dado apenas pelas regras que governam a linguagem, mas pelos próprios jogos de linguagem, pois as regras só têm sentido contra o pano de fundo de um determinado jogo de linguagem. Por conseguinte, os jogos de linguagem têm primazia sobre as regras. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada. A palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula.

A expressão "jogo de linguagem" é essencial na filosofia de Wittgenstein, que a emprega como um método para mostrar os diferentes usos dos conceitos em nossas formas de vida. As palavras não são utilizadas apenas para descrever; há muitos outros tipos de jogos além das descrições como contar piadas, orar, fazer saudações, perguntar, dar ordens e etc. É dentro desses jogos que os objetos adquirem significado, quando operamos com eles, e não quando simplesmente os relacionamos às imagens que fazemos deles. Desse novo ponto de vista, Wittgenstein faz uma crítica demolidora à concepção referencial da linguagem, pois não há mais necessidade de se postularem entidades extralingüísticas como condições necessárias da significação. Segundo ele, há como evitar as dificuldades do modelo referencial da linguagem ao considerarmos "as diversas práticas ligadas à linguagem como sendo o *meio* através do qual são estabelecidas as ligações entre signos e objetos e, além disso, como sendo instrumentos *lingüísticos*. É nesse sentido que tais práticas *fazem parte* da gramática dos usos." (Moreno[10], 1995, p. 25)

Enfim, com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein lança luz sobre relações de nossa linguagem, ao utilizá-los como objetos de comparação, ou seja, através de suas semelhanças e diferenças, chama a atenção para os diferentes usos de nossos conceitos em nossas formas de vida sem recorrer a entidades entra-lingüísticas. São os próprios jogos de linguagem que constituem as relações de significação básica (denominação) e são, portanto, os elos entre linguagem e realidade. Voltando ao nosso suposto abismo entre regras e sua aplicação, este é transposto por nossas práticas, dentro de um jogo de linguagem. "Seguir uma regra" é essencialmente uma prática:

> "Por isso, 'seguir a regra' é uma prática. E *acreditar* seguir a regra não é seguir a regra. E por isso não se pode seguir a regra 'privatim', porque, do contrário, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra." (Wittgenstein, IF, §202)

[10] Cf. Moreno, A. R. *Introdução a uma pragmática filosófica*. Campinas: editora da Unicamp, 2005.

Ainda segundo Wittgenstein, não somos *guiados* por regras, agimos apenas em conformidade com elas. Não são a causa da compreensão, como também não o é qualquer outra entidade de natureza empírica ou transcendental. O que nos permite compreender as ações e palavras dos outros, podendo inclusive julgá-las, é um mesmo “chão” que compartilhamos. É a partir desse *background* comum que herdamos que somos capazes de distinguir entre o verdadeiro e o falso, e não através da comparação com objetos empíricos ou de intuições transcendentais.

A matemática entre o transcendental e o empírico

Vejamos qual é o papel que os jogos de linguagem da matemática desempenham em nossas formas de vida. Comecemos pela geometria. Os termos primitivos de um sistema geométrico podem ser definidos ostensivamente (como na geometria euclidiana), constituindo-se em regras para o uso desses termos. Imaginamos o encontro de duas superfícies e a intersecção delas passa a ser um paradigma de reta. Apontamos para um objeto distante e dizemos que é um ponto no espaço e assim por diante. Assim, utilizamos objetos para *explicar* o significado dos nomes (sem que esses objetos sejam ‘em si’ os seus significados). Mas, uma vez definidos os termos primitivos de um determinado sistema, passa-se à escolha de axiomas e postulados, que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas. Quais são os critérios para essas novas escolhas?

Como vimos, para a maioria dos matemáticos, um deles é o número desses axiomas e postulados, juntamente com seu poder dedutivo. Um dos fatores que move o pensamento matemático é o interesse em estabelecer conexões lógicas entre os teoremas. Demonstrá-los dedutivamente permite explicitar essas relações, levando a axiomatizações consideradas cada vez mais elegantes ou econômicas. No entanto, há um limite para reduzir o número de axiomas de um sistema, pois o matemático também se interessa por deduzir um número grande de teoremas. É como se se travasse uma espécie de negociação entre o número de axiomas e a quantidade de teoremas deles deduzidos. Outro critério considerado importante para a escolha de um axioma ou de um postulado é sua evidência. Mas o que fundamenta essa evidência? Estaria baseada na experiência? Vejamos, por exemplo, o quinto axioma de Euclides, conhecido como axioma das paralelas. Em uma de suas formulações, esse axioma afirma que, dada uma reta no plano, uma paralela por um ponto externo é uma reta que, mesmo prolongada indefinidamente de ambos os lados, nunca intercepta a outra.

Por que essa afirmação seria evidente para o aluno a quem se a apresenta pela primeira vez? Esse aluno poderia imaginar várias retas superpostas, todas paralelas à primeira e passando pelo ponto dado; ou duas retas com orientações opostas passando por esse ponto; ou ainda é muito provável que imagine um ponto no espaço de três dimensões, sendo plenamente possível conceber infinitas retas passando por esse ponto e paralelas à reta dada. Para que o aluno aceite esse axioma como evidente, ele teria que se restringir a uma determinada aplicação do axioma:

“Não são experimentos empíricos que esclarecem a evidência [do axioma das paralelas], pois, ainda que eles pudessem contradizer o axioma, continuaríamos a aceitá-lo como evidente. Podemos apresentar uma imagem como prova da evidência do axioma, e aceitá-la como prova significa atribuir uma determinada aplicação à imagem ou à proposição que a exprime: aplica-se a situações teóricas em que as linhas não se superpõem, não têm orientação e estão em um espaço plano; sem essa aplicação, a imagem não é uma prova e nem a proposição um axioma." (Moreno, 1995, p. 53) [11]

Um axioma não é evidente porque descreve algum fato ou por ser reflexo de alguma intuição, mas por ter uma função normativa. Acreditar que tenha uma função descritiva é incorrer numa generalização indevida como, por exemplo, supor que sempre temos uma única reta paralela passando por um ponto fora de uma reta dada, independentemente do contexto em que essa proposição se enuncia. O axioma das paralelas é evidente, necessário, *na geometria euclidiana*. Nesse contexto atribuiu-se-lhe uma necessidade que não vigora em outra geometria como na de Riemann ou na de Lobatchewsky[12] . Os axiomas e postulados da matemática podem ser vistos como *regras*, e não como "intuições" ou "fatos evidentes". E da mesma forma todas as proposições que são deduzidas desses axiomas e postulados.

Axiomas, postulados e definições são vistos por Wittgenstein como regras básicas (constitutivas) que não podem ser negadas; são consideradas proposições gramaticais. A propriedade associativa, por exemplo, é uma regra básica de um sistema matemático, pois não é confirmada, nem negada[13]. (Cf. Wittgenstein, OF, XIV) É apenas uma regra de como proceder.

> "'Se a demonstração nos convence, também temos que estar convencidos, então, dos axiomas.' Não como o estamos de proposições empíricas; não é esse o seu papel. No jogo de linguagem, estão excluídos da verificação através da experiência. Não são proposições da experiência, mas princípios de juízo." (Wittgenstein, OFM, VII, 73)

Posto que uma proposição matemática é uma estipulação, ou um resultado de estipulações de acordo com um método definido, segue-se que *todas* as proposições matemáticas são proposições gramaticais.

O papel das proposições matemáticas na construção das proposições descritivas

Embora Wittgenstein considere *normativas* todas as proposições da matemática, seus usos se distinguem em função dos jogos de linguagem específicos aos quais pertencem. A atividade matemática pode ser vista como uma família de atividades destinada a uma família de propósitos: a aritmética é vista por ele como um sistema de regras para a transformação de proposições empíricas que versam sobre quantidades e grandezas. As proposições da geometria, como vimos, não constituem descrições das propriedades do espaço, mas regras para a descrição das formas dos objetos empíricos e de suas relações espaciais. Quanto à prova matemática, esta passa a ser vista por Wittgenstein, não como uma demonstração de verdades acerca da natureza dos objetos matemáticos, mas um caso de formação conceitual: ela determina uma nova regra para a transformação de proposições empíricas. As equações da matemática, por exemplo, são vistas por Wittgenstein como *regras* para a transformação de proposições empíricas, isto é, regras de

[11] Cf. Moreno, A. R. *Wittgenstein através das imagens*. Campinas: editora da Unicamp, 1995.
[12] Nessas outras geometrias, o quinto axioma de Euclides é substituído respectivamente por "é possível passar mais de uma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela" (Lobachevsky) e "por um ponto fora de uma reta dada não se pode traçar paralela alguma a esta reta" (Riemann).
[13] Para Wittgenstein, a propriedade associativa não satisfaz a lei do terceiro excluído, a qual afirma que toda proposição é V ou F.

substituição. Com "2 + 2 = 4" estamos autorizados a passar de "Há dois pares de sapatos no chão" para "Há quatro sapatos no chão". Se o número final de sapatos não for quatro, esse fato não invalida a expressão matemática. Nem as proposições da lógica nem as da matemática são asserções sobre fatos. São proposições que refletem as regras da linguagem; não estão *sob* a linguagem – não são a face oculta de uma expressão descritiva. Apenas permitem ou proíbem certas inferências.

Assim, de uma perspectiva wittgensteiniana, a matemática não é *descritiva*, ela apenas nos dá as condições necessárias para a compreensão do sentido de certos fatos em determinados contextos. Por exemplo, no sistema de regras sintáticas da geometria euclidiana, dizer que "por dois pontos passa uma reta" é uma condição de sentido para qualquer afirmação empírica sobre essa reta (desde que estejamos no universo euclidiano), *é uma regra gramatical*. Assim, quando dizemos que "entre dois pontos pode-se traçar uma reta" significa que as afirmações que fazemos sobre a reta que passa por estes dois pontos têm sentido, sejam elas verdadeiras ou falsas. A partir dela, posso fazer afirmações descritivas – "esta reta tem 10 centímetros" ou "tracei uma reta vermelha pelos pontos A e B" etc. Essas são afirmações empíricas passíveis de verificação, mas que pressupõem o postulado da geometria euclidiana que lhes dá sentido: o de que por dois pontos é possível traçar uma reta. Enfim, a regra em si não tem significado, é apenas condição para o significado.

A natureza gramatical das proposições matemáticas elucida vários equívocos decorrentes das concepções idealista e realista e, em particular, dissolve as confusões a que conduzem os pressupostos das teorias psicogenéticas de Piaget. Uma vez que essas proposições não são descritivas, mas *normas* de descrição, não há *algo* (*a priori*) que as fundamente fora da linguagem, ou que a elas corresponda.

As proposições matemáticas não descrevem nem entidades abstratas, nem a realidade empírica; e tampouco refletem o funcionamento transcendental da mente. Seu estatuto apriorístico deve-se ao fato de serem normativas, *paradigmas* para a transformação de proposições. No entanto, a natureza gramatical das proposições matemáticas não impede que, em determinados contextos, tenham um uso empírico (descritivo) como, por exemplo, quando contamos objetos. Não há uma relação estática – "essencial" – entre o enunciado e os objetos a que ele se refere. A maneira como usamos nossas proposições é que lhes dá sentido. O que deve ficar claro "é que o critério para classificar uma proposição depende do seu uso, contexto e papel que ela exerce. Não é apenas a forma que conta. Se fôssemos considerar apenas a forma, então a sentença 'se você adiciona dois mais dois você obtêm quatro' torna-se ambígua; é o uso, o contexto e o papel que ela tem que determinará se a proposição é matemática ou empírica." (Gerrard, 1987, p. 94)[14]

Assim, um mesmo enunciado matemático pode ter significados diferentes em função do contexto em que se apresenta. A proposição "2 + 2 = 4" pode tanto ter uso descritivo como normativo. Enquanto para uma criança "2 + 2 = 4" pode representar que seus dois dedos mais dois dedos dão quatro dedos de suas mãos, para um matemático este mesmo enunciado tem um outro significado, visto dentro de outro contexto lingüístico como, por exemplo, o da teoria dos números. Enfim, não há uma essência por detrás de um enunciado – seu significado depende do contexto em que está inserido, seja o da cultura própria de um pesquisador matemático, seja o do ambiente em que vive a criança.

Uma vez esclarecido em que sentido estamos considerando o conhecimento matemático *a priori*, resta entender como, a partir de algumas definições e axiomas, a

[14] Cf. Gerrard S.. *Wittgenstein in transition: the philosophy of mathematics.* Tese de doutorado na Universidade de Chicago, Illinois, 1987.

matemática "coincide" com o comportamento natural das coisas. Alegar que suas proposições são paradigmas para a transformação de proposições empíricas não é suficiente para explicar por quê consideramos válida a expressão "2 + 2 = 4" e não outra expressão qualquer. Se olharmos para a matemática apenas como um conjunto de regras a serem seguidas, continuaremos com algumas questões "girando em falso". Se, por outro lado, a considerarmos um jogo de linguagem – ou seja, uma atividade que entrelaça símbolos lingüísticos e técnicas compartilhadas por uma comunidade – estaremos num terreno entre o transcendental e o empírico.

Nossas escolhas não são aleatórias, mas baseadas em nossas formas de vida. Por exemplo, as escolhas feitas na geometria euclidiana têm raízes em formas de vida que utilizavam técnicas diversas de medição (como as dos antigos egípcios, empregadas para medir suas terras em épocas de enchentes e vazantes do rio Nilo). Isso não quer dizer que essa geometria tenha *fundamentos* empíricos, apenas que existem *razões* empíricas que levaram a uma determinada formulação geométrica, dentre várias outras razões (de natureza não empírica).

Talvez pudéssemos considerar algumas proposições da matemática de natureza sintética, na medida em que envolvem técnicas e procedimentos inerentes a esse determinado jogo de linguagem. Nem todas as suas proposições são evidentes da mesma forma que "um triângulo é uma figura", ou seja, de que faz parte de um triângulo ser uma figura. Somar, por exemplo, 254 + 389, exige uma técnica, seja a do algoritmo da "conta em pé", seja utilizando um ábaco, seja contando. Essas técnicas foram desenvolvidas socialmente ao longo dos tempos, e o conceito de adição está relacionado com elas. Este conceito é "cristalizado" como norma e independe da experiência – torna-se uma *proposição necessária*, *a priori*. E é esse caráter necessário e apriorístico das proposições matemáticas que as distingue de outras proposições de nossa linguagem. O que não quer dizer que não tenham raízes no empírico, ou que não possam ter um uso descritivo. Segundo Wittgenstein, é essencial à matemática que signos sejam também empregados *à paisana*, é o uso fora da matemática e portanto, o *significado* dos signos, que transforma o jogo de signos em matemática.

Essa peculiaridade de suas proposições – semelhantes, por um lado, às regras de um jogo, as quais são autônomas e independentes do empírico, e, por outro, com aplicações no mundo empírico, possibilitando o trânsito de uma proposição para a outra – caracteriza o conhecimento matemático como um jogo de linguagem totalmente distinto dos jogos das ciências empíricas e das ciências cognitivas.

São várias as funções de nossos enunciados lingüísticos inseridos em distintos jogos de linguagem. As contradições e paradoxos a que somos conduzidos devem-se a nossas próprias confusões conceituais ao operarmos com nossa linguagem, e não ao fato de ela ser um reflexo da natureza das coisas. Dentre essas confusões, gostaríamos de ressaltar as que decorrem das crenças de que as proposições da matemática fazem parte de uma superfísica do abstrato (como ocorre na visão platônica) ou de que sejam produto de generalizações empíricas ou ainda decorrentes de intuições ou de operações mentais. Assim, de uma perspectiva wittgensteiniana, das concepções contemporâneas sobre a natureza do conhecimento matemático são mantidas apenas algumas de suas teses: a matemática não é refutável pela experiência (como já advogava o logicismo), baseia-se em uma atividade humana (como defendia o intuicionismo) e emprega signos escritos e sonoros (formalismo). No entanto, estes signos não são vazios, são empregados em contextos específicos e em atividades regradas, onde estas regras são de natureza convencional. Um aluno não tem como adivinhá-las a partir da experiência empírica ou através de uma intuição matemática. Nesse sentido, pensamos que é fundamental ter clareza da especificidade das proposições matemáticas, pois, embora pareçam por vezes estar descrevendo algum fato empírico ou pareçam decorrer de processos mentais, elas têm essencialmente um caráter normativo. Nossa tese é a de que, ao não perceber essa diferença, estamos sujeitos a diversos equívocos em nossas práticas pedagógicas.