COMO ETAPAS DE ESCOLHA PODEM INFLUENCIAR A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco
borba@talk21.com

Danielle Avanço Vega Pontes
Universidade Federal de Pernambuco
danielleavanco@yahoo.com.br

Josenir Rodrigues da Silva
Universidade Federal de Pernambuco
zenirrodrigues@yahoo.com.br

Maria Niedja Pereira Martins
Universidade Federal de Pernambuco
martinsniedja@hotmail.com

Resumo
Objetivou-se buscar evidências de que as *etapas de escolha de elementos* (como enunciado no *princípio fundamental da contagem*) podem influenciar a resolução de problemas combinatórios. Participaram do estudo 41 alunos de 5º ano e 42 alunos de 7º ano de duas escolas públicas, os quais resolveram oito problemas (dois de cada tipo: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*). Metade das questões era com três etapas de escolha e a outra metade com quatro etapas. Os alunos do 5º ano apresentaram desempenho significativamente mais fraco em problemas de quatro etapas, comparado como os de três etapas, apenas em situações de *permutação*. Já os alunos de 7º ano apresentaram diferenças significativas em todos os tipos de problemas. Confirmou-se a hipótese de que dificuldades, em especial com *permutações*, podem estar fortemente relacionadas ao número de etapas de escolha das situações e essa variável deve ser levada em consideração quando do ensino da Combinatória.

Palavras-chave: Problemas combinatórios; etapas de escolha; Ensino Fundamental.

1. Introdução

Este estudo busca discutir variáveis que podem afetar a resolução de problemas combinatórios. Investigações diversas têm sido realizadas levantando a compreensão de alunos da escolarização básica (PESSOA; BORBA, 2009, 2010; MORO; SOARES; CAMARINHA FILHO, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011; TEIXEIRA. CAMPOS, VASCONCELOS; GUIMARÃES, 2011; SILVA; SPINILLO, 2011, dentre outros) e resultados diferentes têm sido encontrados quanto à ordenação da dificuldade de acordo com a situação combinatória. As *relações* e *propriedades* de cada significado combinatório,associadas ao *desenvolvimento cognitivo*,podem ser apontadas como variáveis que influenciam o desempenho em Combinatória, bem como a *descrição dos valores das variáveis*, a *ordem de grandeza do número de possibilidades* a ser determinado, ou, ainda, a *explicitação de possibilidades no enunciado*.

No presente estudo discute-se outra possível variável que pode afetar o desempenho em situações combinatórias: *o número de etapas de escolha de elementos*. Essa variável será descrita juntamente com o *princípio fundamental da contagem* e levada em consideração na discussão de resultados de estudos anteriores, bem como na análise de uma investigação que se propôs a observar o efeito dessa variável.

A importância do estudo da Combinatória na escolarização básica tem sido amplamente defendida (BATANERO; GOLDINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; BORBA, 2010, dentre outros). Argumenta-se que a base do pensamento combinatório é o raciocínio hipotético-dedutivo (INHELDER; PIAGET, 1976), pois em situações combinatórias é preciso distinguir entre o *real* e o *possível*.

Borba (2010) argumenta que o *raciocínio combinatório* é uma forma de pensar sobre situações envolvendo o levantamento de possibilidades que atendem a determinadas condições, que consideram se há repetição, escolha e ordenação de elementos, dentre outras relações. É, assim, uma competência complexa e que deve ser estimulada por se constituir base para a resolução de situações problematizadoras.

Dessa forma, tem-se como objetivo contribuir para a discussão de fatores que podem influenciar o desempenho em problemas combinatórios, investigando, em particular, a influência do *número de etapas de escolha* na determinação de aspectos que podem dificultar a compreensão da Combinatória. Essa é a proposta do presente estudo, discutido à luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986) e buscando evidências empíricas que sustentem o impacto dessa variável no raciocínio combinatório.

2. Base teórica

Como suporte teórico, utilizou-se a teoria de Vergnaud (1986) a qual afirma que conceitos se articulam em campos por proximidade de propriedades e relações e que cada conceito se caracteriza por três dimensões: 1) situações que dão *significado* ao conceito; 2) *invariantes*, ou seja, as propriedades e relações intrínsecas do conceito (invariantes prescritivos), ou as colocadas em ação pelo indivíduo na resolução de problemas (invariantes operatórios) e; 3) *representações simbólicas* utilizadas para registros do conceito. Estas dimensões serão aqui discutidas a partir de conceitos combinatórios.

2.1 Significados combinatórios e seus invariantes

Em consonância ao proposto por Vergnaud (1986), defende-se que, desde os anos iniciais, sejam trabalhados significados combinatórios variados, de modo que semelhanças (como o levantamento de possibilidades) e diferenças (propriedades específicas) sejam observadas e um mais amplo conhecimento de Combinatória seja desenvolvido. Se conceitos se desenvolvem de forma imbricada, é preciso no ensino tratá-los simultaneamente, possibilitando que relações entre os conceitos sejam compreendidas.

Para entender o que diferenciam distintos significados dentro da Combinatória, pode-se atentar para dois tipos de *invariantes*, ou seja, relações e propriedades que se mantêm constantes nas diferentes situações nas quais estes significados estão presentes. Um dos invariantes refere-se à *escolha* de elementos para a formação de possibilidades e outro invariante diz respeito à *ordenação* dos elementos, que pode, ou não, gerar possibilidades distintas. Outras relações combinatórias existem, em particular as de problemas condicionais, tais como as referentes à *repetição* de elementos, *posicionamento* de elementos e de *proximidade* entre elementos, como indicadas por Borba e Braz (2012).

Um dos significados presentes na Combinatória é o de *produto cartesiano*. Invariantes prescritivos básicos desse significado são: dados dois ou mais conjuntos, selecionam-se elementos de cada conjunto para gerar um conjunto novo de natureza distinta aos conjuntos iniciais. Outro significado é o de *combinação*, cujo invariante referente à escolha de elementos é o de que dado um conjunto maior (com n elementos), são selecionados p elementos deste conjunto (sendo $p<n$). Quanto à ordenação, os mesmos elementos constituem uma mesma possibilidade, independente da ordem de apresentação dos mesmos. O *arranjo* constitui outro possível significado combinatório que possui mesmo invariante da *combinação* quanto à escolha de elementos, mas que se diferencia quanto à ordenação, pois os mesmos elementos em ordens diferentes se constituem em possibilidades distintas. Dentre os significados trabalhados na escolarização básica, tem-se, por fim, a *permutação* que, em termos de escolha de elementos, utiliza-se de todos os elementos do conjunto e possui a ordenação diferenciada como elemento base. (Exemplos destes distintos significados combinatórios são apresentados no Quadro 1).

2.2 Representações simbólicas para registro de situações combinatórias

Além de no ensino serem trabalhados distintos significados combinatórios, é recomendado o uso de distintas formas de *representação simbólica* (tais como as representações orais, escritas, virtuais, por meio de uso de manipulativos, dentre outros). Dessa maneira, aspectos variados dos conceitos são ressaltados, uma vez que uma forma de representação pode exibir certas propriedades de um conceito e outra forma de representação pode ressaltar outras propriedades.

Há diversas maneiras de representação que podem ser utilizadas. Assim, no aprendizado da Combinatória tem-se como possíveis representações escritas: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, dentre outros tipos. Possibilitar e estimular o uso dessas formas variadas pode auxiliar os alunos na compreensão de conceitos combinatórios.

Mesmo que alunos utilizem a mesma forma de representação simbólica, como a escrita, por exemplo, e usem o mesmo tipo de registro – como a listagem ou a árvore de possibilidades, dentre outros tipos – é preciso ficar atento às estratégias utilizadas. Uma mesma forma de representação simbólica e um tipo específico de registro podem ser utilizados por meio de estratégias eficientes e ineficientes. Numa listagem, por exemplo, o aluno pode apresentar as distintas possibilidades de forma sistemática e, dessa forma, chegar ao número total de possibilidades da situação ou pode não fazer uso da sistematização e, assim, não conseguir listar o total de possibilidades.

No presente estudo os quatro significados combinatórios descritos (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*) foram tratados, observando-se o impacto do número de etapas de escolha em cada um desses significados. Verificou-se também quais as representações simbólicas utilizadas pelos participantes e as respectivas estratégias implementadas, mas esta segunda dimensão não será foco de análise do presente texto.

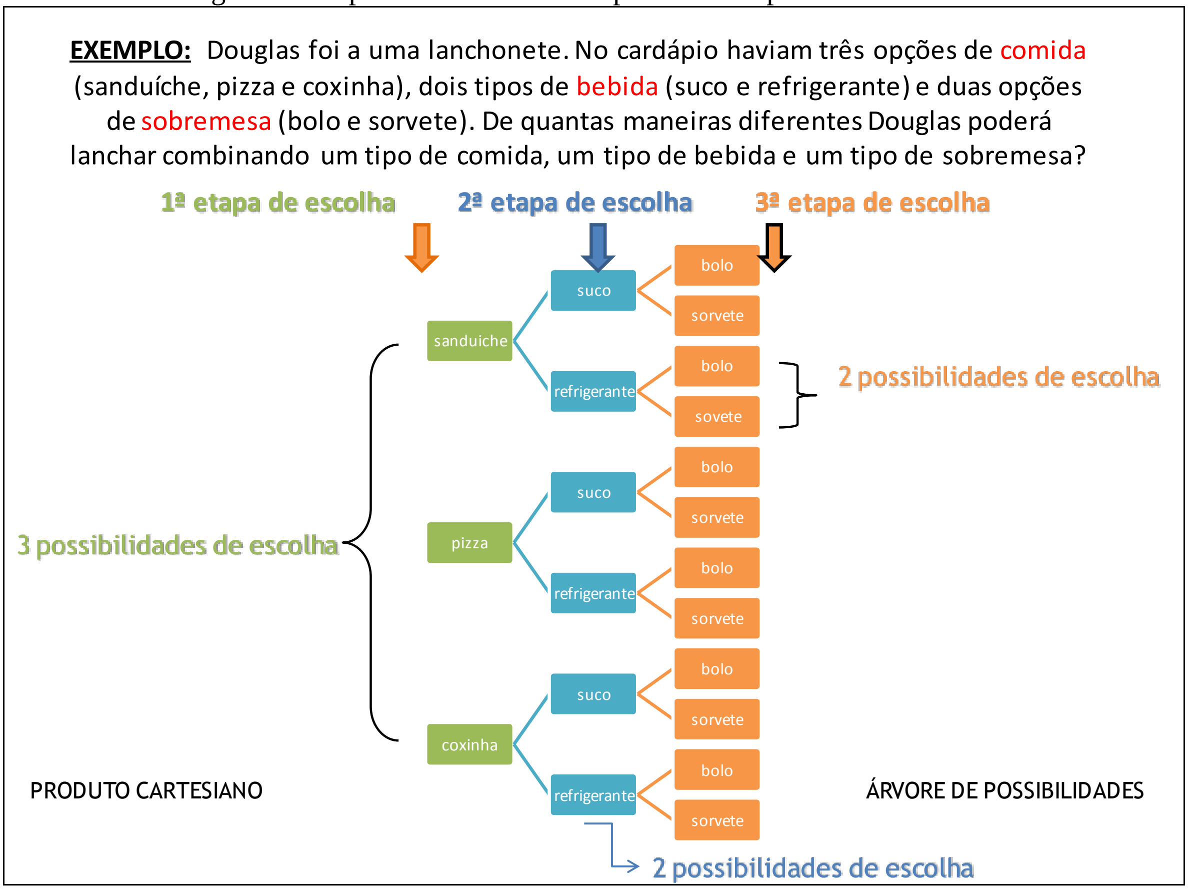
3. O *princípio fundamental da contagem* e o número de etapas de escolha

A hipótese levantada pelo presente estudo é que uma das variáveis que pode ter forte influência no desempenho em problemas combinatórios é o *número de etapas de escolha* dos elementos que constituirão as possibilidades solicitadas. Para entender essa variável é preciso pensar em uma das formas de resolução de situações combinatórias que é o *princípio fundamental da contagem*.

Segundo Smole e Diniz (2003, p. 58) o *princípio fundamental da contagem* pode ser enunciado da seguinte forma: "... se temos um acontecimento formado por diversas etapas... no qual conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizar, multiplicando todos esses números, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar".

Assim, tem-se, no caso de um *produto cartesiano* no qual um dos conjuntos é composto por *n* elementos e o outro conjunto com *m* elementos, que o número total de possibilidades pode ser determinado pelo produto *n x m*. No exemplo retratado na Figura 1 há 3 etapas de escolha a serem efetuadas: 1) a escolha de comidas, 2) a escolha de bebidas e 3) a escolha de sobremesas. Na 1ª etapa de escolha há possibilidade de escolha de três elementos (as três opções de comida: sanduíche, pizza e coxinha); na 2ª etapa há duas possibilidades de escolha (as duas bebidas: suco e refrigerante); e na 3ª etapa de escolha há dois elementos a serem escolhidos (as sobremesas: bolo e sorvete).

Figura 1 - Etapas de escolha em um problema de produto cartesiano.



Fonte: Pontes (2013)

Acredita-se que um problema de *produto cartesiano*, e de outros significados, que possui menos etapas de escolha seja de mais fácil resolução por alunos do Ensino Fundamental do que aquele que possui mais etapas de escolha. Também se defende que a maior dificuldade evidenciada em estudos anteriores referente a problemas de *permutação* pode ser explicada pelos mesmos, em geral, envolverem um maior número de etapas de escolha. Essa é a hipótese central testada no presente estudo.

4. Método proposto para investigar o papel do número de etapas no desempenho em problemas combinatórios

No presente estudo foi aplicado um teste de sondagem realizado individualmente por 83 alunos de duas escolas públicas de Pernambuco. Os participantes pertenciam ao 5º ano (41 alunos) e ao 7º ano (42 alunos), aleatoriamente escolhidos de duas turmas distintas de cada escola.

Os problemas utilizados no teste foram adaptados do estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011). Eram dois problemas de cada tipo: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*, sendo os quatro primeiros com três etapas de escolha e os quatro últimos com quatro etapas, conforme se pode verificar no Quadro 1.

Quadro 1- Questões do teste de sondagem realizado com alunos de 5º e 7º anos do Ensino Fundamental.

TIPO DE PROBLE-MA	Nº DE ETAPAS	QUESTOES
Produto Cartesiano	3	Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?
	4	Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui quatro blusas (rosa, laranja, azul e vermelha), três calças (preta, branca e jeans azul), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e dois brincos (argolas prateadas e bolinhas douradas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?
Combinação	3	Felipe, Sandra, Carla, Henrique, José e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?
	4	Uma escola tem sete professores (Paulo, Roberto, Ângela, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?
Arranjo	3	Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

	4	De quantas maneiras possíveis podem-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7?
Permutação	3	De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
	4	Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem quatro fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los lado-a-lado na estante?

Fonte: as autoras.

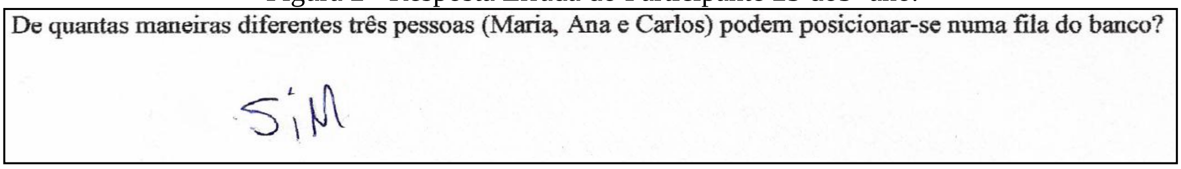
5. Resultados da Pesquisa

5.1. Análise de desempenho por ano de ensino

Para a análise dos dados, as respostas dos alunos foram categorizadas em: erros, acertos parciais e acertos totais.

Foram classificadas como Resposta Errada aquelas soluções nas quais não havia nenhuma evidência de raciocínio combinatório. Na Figura 2 pode-se observar um exemplo deste tipo de resposta, na qual o aluno não apresentou nenhuma das possibilidades de três pessoas se posicionarem numa fila de banco.

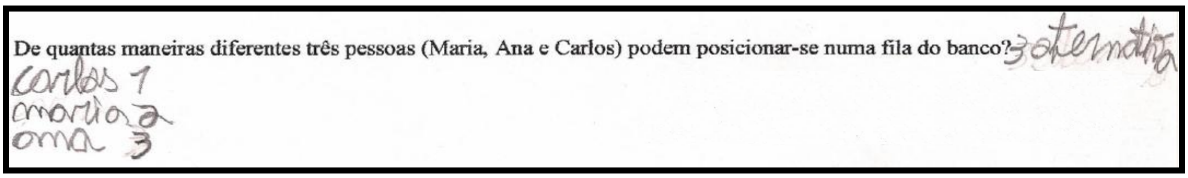
Figura 2 - Resposta Errada do Participante 25 do5º ano.



Fonte: as autoras.

Os acertos parciais foram subdivididos em diferentes categorias. Quando apenas uma possibilidade foi listada, categorizou-se como Resposta Parcialmente Correta 1, como se pode observar na Figura 3.

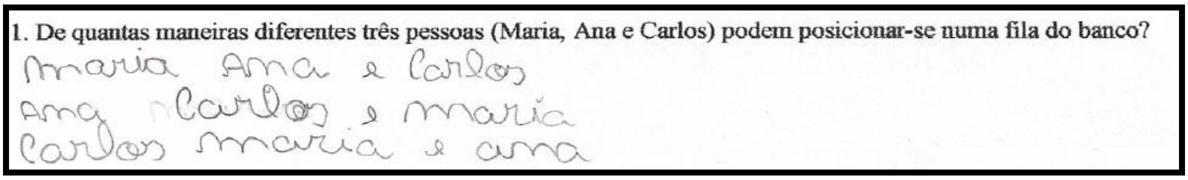
Figura3 - Resposta Parcialmente Correta 1 (apenas uma possibilidade)do Participante 75 do 5º ano.



Fonte: as autoras.

Quando mais de uma possibilidade foi listada, categorizou-se como Resposta Parcialmente Correta 2, como o exemplo apresentado na Figura 4.

Figura 4: Resposta Parcialmente Correta 2 (com mais de uma possibilidade) do Participante 83 do 5º ano

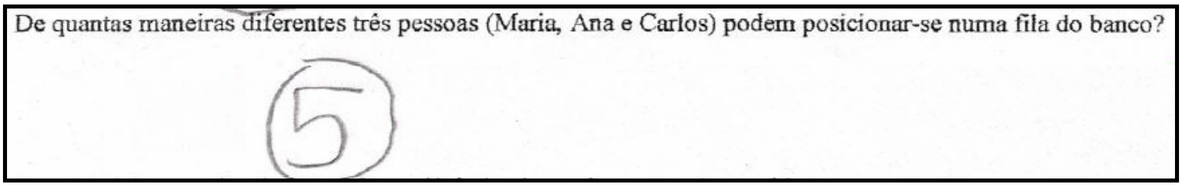

1. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

maria Ana e Carlos
Ana Carlos e maria
Carlos maria e ana

Fonte: as autoras.

Foram categorizadas como Resposta Parcialmente Correta 3 aquelas nas quais o participante apresentou mais da metade das possibilidades solicitadas, como se pode observar na Figura 5.

Figura 5. Resposta Parcialmente Correta 3 (mais da metade das possibilidades) do Participante 46 do 7º ano.

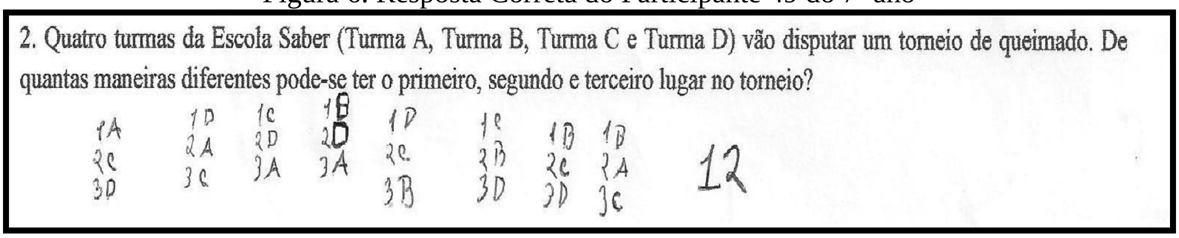

De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

5

Fonte: as autoras.

A categoria Resposta Correta aplicou-se aos casos nos quais se chegou ao número de todas as possibilidades solicitadas, como o exemplo apresentado na Figura 6.

Figura 6. Resposta Correta do Participante 49 do 7º ano


2. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

1A 2C 3D; 1D 2A 3C; 1C 2D 3A; 1B 2D 3A; 1D 2C 3B; 1C 2B 3D; 1B 2C 3D; 1B 2A 3C

12

Fonte: as autoras.

A Tabela 1, a seguir, apresenta os tipos de respostas dos alunos do 5º ano nos quatro tipos de significados combinatórios, por número de etapas de escolha. Observa-se que nenhum dos alunos apresentou a resposta correta aos problemas ou, ao menos, listou mais da metade das possibilidades. O índice de erros foi muito elevado, seguido pela apresentação de mais de uma possibilidade e por apenas uma possibilidade listada.

Pode-se já observar nesta primeira análise a influência de etapas de escolha no desempenho dos alunos. O número de alunos do 5º ano que apresentou mais de uma possibilidade correta nos problemas de quatro etapas de escolha foi menor do que esse tipo de resposta para três etapas. O número de erros também foi maior para quatro etapas.

Alguns alunos do 7º ano conseguiram apresentar respostas corretas e respostas com mais da metade das possibilidades listadas, como se pode observar na Tabela 2. Apesar de alguns alunos deste ano terem avançado na qualidade de suas respostas, entre os alunos de 5º ano foi mais comum a apresentação de possibilidades corretas. Tem-se para o 5º ano um total de 46% de respostas parcialmente corretas para os problemas de três etapas de escolha e um total de 41% de respostas parcialmente corretas para os problemas de quatro etapas. Já o 7º ano apresentou um total de 32% respostas parcialmente ou totalmente corretas nos problemas de três etapas de escolha e 28% respostas parcialmente ou totalmente corretas nos problemas de quatro etapas.

Tabela 1 – Frequência de tipos de respostas dos alunos do 5° ano por número de etapas de escolha

TIPO DE RESPOSTAS	3 ETAPAS DE ESCOLHA					4 ETAPAS DE ESCOLHA				
	PC	**C**	**A**	**P**	**Total**	**PC**	**C**	**A**	**P**	**Total**
Erro	19 (11,6%)	28 (17,0%)	23 (14,0%)	19 (11,6%)	**89 (54,2%)**	19 (11,6%)	25 (15,2%)	28 (17,0%)	25 (15,2%)	**97 (59,0%)**
Uma possibilidade	07 (4,3%)	00 (0%)	09 (5,5%)	08 (5,0%)	**24 (14,8%)**	09 (5,5%)	06 (3,6%)	02 (1,2%)	11 (6,7%)	**28 (17,0%)**
Mais de uma possibilidade	15 (9,1%)	13 (8,0%)	09 (5,5%)	14 (8,5%)	**51 (31,1%)**	13 (8,0%)	10 (6,1%)	11 (6,7%)	05 (3%)	**39 (23,8%)**
Mais de metade das possibilidades	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	**00 (0%)**	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	**00 (0%)**
Acerto total	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	**00 (0%)**	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	**00 (0%)**
Total de Respostas	**41**	**41**	**41**	**41**	**164**	**41**	**41**	**41**	**41**	**164**

Fonte: as autoras.
Nota: PC: produto cartesiano; C: combinação; A: arranjo; P: permutação

Tabela 2 – Frequência de tipos de respostas dos alunos do 7° ano por número de etapas de escolha

TIPO DE RESPOSTAS	3 ETAPAS DE ESCOLHA					4 ETAPAS DE ESCOLHA				
	PC	**C**	**A**	**P**	**Total**	**PC**	**C**	**A**	**P**	**Total**
Erro	25 (14,9%)	23 (13,7%)	28 (16,7%)	22 (13%)	**98** (58,3%)	33 (19,6%)	33 (19,6%)	36 (21,4%)	26 (15,5%)	**128** (76%)

Uma possibilidade	04 (2,7%)	02 (1%)	01 (0,6%)	03 (1,8%)	**10** (6,1%)	03 (1,8%)	04 (2,7%)	00 (0%)	07 (4,2%)	**14** (8,7%)
Mais de uma possibilidade	09 (5,3%)	09 (5,3%)	06 (3,6%)	10 (6%)	**34** (20,2%)	06 (3,6%)	04 (2,7%)	03 (1,8%)	08 (4,8%)	**21** (13%)
Mais de metade das possibilidades	03 (1,8%)	08 (4,7%)	07 (4,2%)	00 (0%)	**18** (10,7%)	00 (0%)	01 (0,6%)	03 (1,8%)	01 (0,6%)	**05** (3%)
Acerto total	01 (0,6%)	00 (0%)	00 (0%)	7 (4,2%)	**08** (4,8%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	00 (0%)	**00** (0%)
Total de Respostas	**42**	**42**	**42**	**42**	**168**	**42**	**42**	**42**	**42**	**168**

Fonte: as autoras.
Nota: PC: produto cartesiano; C: combinação; A: arranjo; P: permutação

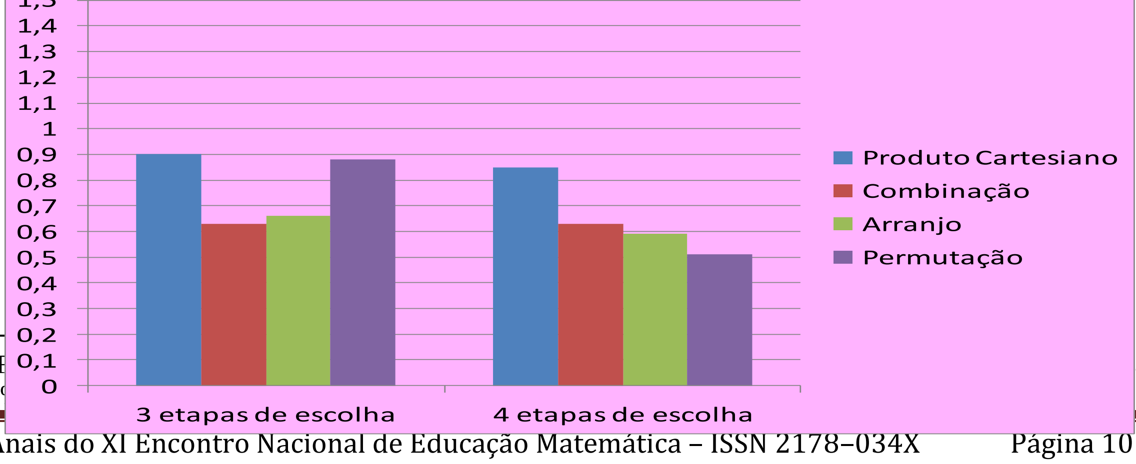
Mais uma vez ressalta-se que o desempenho foi melhor quando eram três etapas de escolha. Com quatro etapas de escolha, tanto os alunos do 5º ano quanto os do 7º ano apresentaram um menor total de respostas parcialmente corretas.

No teste estatístico realizado (teste t de amostras independentes) não foram observadas diferenças significativas entre os dois anos escolares em nenhum dos tipos de problema, tanto nos problemas de três etapas de escolha (*produto cartesiano*: p = 0,098; *combinação*; p = 0,914; *arranjo*: p = 0,825; e *permutação*: p = 0,244), quanto nos de quatro etapas (*produto cartesiano*: p = 0,098; *combinação*; p = 0,914; *arranjo*: p = 0,824; e *permutação*: p = 0, 242)[1]. Dessa forma, apesar de aparentes diferenças entre os dois anos escolares, estatisticamente as diferenças não foram significativas.

5.2. Análise de desempenho por etapas de escolha

No Gráfico 1 é possível se observar como foi o desempenho dos alunos do 5º ano por tipo de problema e por número de etapas de escolha.

Gráfico 1: Média de acerto (num total de dois pontos) dos alunos do 5º ano por tipo de problema e por número de etapas de escolha



Fonte: as autoras.

Observa-se que, à semelhança de estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011), dentre as situações combinatórias, as de *produto cartesiano* foram as que os alunos apresentaram melhor desempenho, tanto nos problemas de três etapas de escolha, quanto nos de quatro etapas.

Nos estudos anteriores citados, a *permutação* mostrava-se como a situação combinatória de mais fraco desempenho e dava-se a impressão que a justificativa para este mais fraco desempenho estava exclusivamente nas características desse tipo de problema, no qual todos os elementos são envolvidos, variando-se as ordens dos mesmos para a geração de distintas possibilidades.

A partir dos resultados verificados no presente estudo, observa-se que a *permutação* mostrou-se como sendo o problema de maior dificuldade, apenas quando se tratava de situações com quatro etapas de escolha.

Dessa forma, os resultados obtidos neste estudo, parecem indicar que o número de etapas de escolha influenciou resultados anteriores, pois nas pesquisas anteriormente realizadas comparavam-se problemas com distintos números de etapas de escolha. Assim, problemas de *produto cartesiano* com apenas duas etapas de escolha mostram-se mais fáceis de serem resolvidos do que problemas de *permutação* com três ou quatro etapas de escolha.

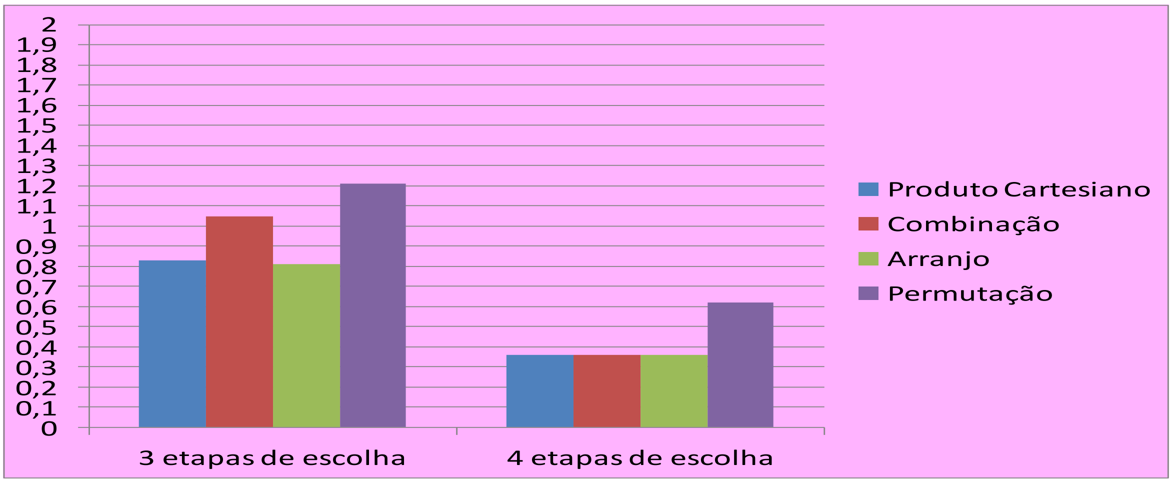
A observação atenta do Gráfico 1 também mostra que para cada tipo de problema o número de etapas de escolha influenciou o desempenho dos alunos. Para a maioria dos tipos de problema (*produto cartesiano*, *arranjo* e *permutação*) resolver a situação quando a mesma envolvia três etapas de escolha foi mais fácil que resolver quando quatro etapas de escolha eram envolvidas. Essa diferença fica bem evidente principalmente nos problemas de *permutação* que eram tidos em investigações anteriores como problemas combinatórios de desempenho mais fraco. Ressalta-se que no caso dos problemas de *combinação* não parece ter havido influência do número de etapas de escolha e a influência foi mínima nos problemas de *arranjo* e isso pode ser explicado pela dificuldade generalizada que os alunos têm em diferenciar situações combinatórias nas quais a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas (*combinações*) das situações nas quais distintas ordens caracterizam possibilidades diferenciadas (*arranjos*).

A análise estatística efetuada (teste t de amostras em pares) evidenciou que para o 5º ano apenas no caso de situações de *permutação* as diferenças foram estatisticamente significativas (p=0,009), não havendo diferenças significativas para os demais significados (*produto cartesiano*: p=0,756; *combinação*=0,544; e *arranjo*: p=0,637).

Para o 7º ano, a diferença de desempenho quando se tratava de três ou quatro etapas de escolha ficou bem marcada, como pode ser observado no Gráfico 2.

Observa-se que para cada um dos tipos de problema resolver a situação com quatro etapas de escolha foi mais difícil do que com três etapas de escolha. Ressalta-se que os resultados vão em direção contrária a estudos anteriores que apontaram a *permutação* como o problema mais difícil. No caso do problema de *permutação* de três etapas de escolha, o número total de possibilidades neste problema era apenas seis e um dos alunos do 7º ano chegou a essa resposta correta e 18 outros conseguiram listar mais da metade das possibilidades da situação proposta.

Gráfico 2 - Média de acerto (num total de dois pontos) dos alunos do 7º ano por tipo de problema e por número de etapas de escolha



Fonte: as autoras.

No caso do 7º ano, verificou-se, a partir de um teste t de amostras em pares, que resolver questões com três ou quatro etapas apresentou diferença estatisticamente significativa em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*: p=0,007; *combinação*: p=0,001; *arranjo*: p=0,024; e *permutação*: p=0,011). Para este ano escolar, no qual alguns alunos conseguiram apresentar respostas corretas ou respostas com mais da metade de possibilidades, observou-se um forte efeito do número de etapas no desempenho dos alunos.

6. Considerações finais

Os resultados aqui apresentados dão suporte à hipótese que *etapas de escolha de elementos* constituem uma variável que tem influência na resolução de problemas de Combinatória. Essa influência foi evidenciada principalmente nos problemas de *permutação*, o que pode explicar, pelo menos em parte, as dificuldades que estudos anteriores apontaram referente a este significado combinatório. A maior dificuldade em pesquisas anteriores evidenciada em *permutações* pode ser explicada, assim, pelo fato que outros tipos de problemas (*produtos cartesianos*, *combinações* e *arranjos*) envolviam menos etapas de escolha do que os problemas de *permutação*.

Busca-se, dessa forma, apontar mais uma variável que pode influenciar o desempenho em problemas combinatórios e chamar a atenção sobre a necessidade de levar essa variável em consideração no ensino de Combinatória. As etapas de escolha constituem-se base para a compreensão do *princípio fundamental da contagem*, um recurso de ensino muito útil por possibilitar através de seu uso a solução de distintas situações combinatórias.

Estudo com objetivo de propor intervenções pedagógicas que destaquem as etapas de escolha encontra-se em andamento (PONTES, 2013) e espera-se trazer mais contribuições para tornar mais eficientes o ensino e o aprendizado da Combinatória.

7. Agradecimentos

Co-autoras do presente trabalho receberam, durante o período de realização do presente estudo, bolsa de mestrado cedidas pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) em convênio com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e com a Secretaria de Educação Superior – MEC (SESu) - bolsa Reuni).

.

8. Referências

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora; BORBA, Rute. O impacto do *software Árbol* no raciocínio combinatório. In: 13ª Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais**... Recife, 2011. p.1-11.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatório.** Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: 10ª Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador, 2010. p.1-16.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Fortaleza. Anais... Fortaleza, 2012. p.1-12.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. **Educar em Revista**, Editora UFPR: Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 77-91, 2011.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

MORO, Ma. Lúcia; SOARES, Ma. Tereza; CAMARINHA FILHO, Jomar. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano.**ZETETIKÉ** – FE- Unicamp, v. 18, n. 33, jan-jun, 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.**ZETETIKÉ** – Cempem – FE-Unicamp, v. 17, n. 31, jan-jun. 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** v.1, n.1. 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/4> Acesso em: 05fev. 2013.

PONTES, Danielle. A influência de etapas de escolha e de representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.**Projeto de Pesquisa de Mestrado**. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Edumatec, 2012.

SMOLE,Kátia& Diniz, Maria Ignez. **Matemática – Ensino Médio**. 4a. Ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.

SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes.In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. p. 1-9.

TEIXEIRA, Leny; CAMPOS, Edileni; VASCONCELLOS, Mônica; GUIMARÃES, Sheila. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista.** Editora UFPR: Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 245-270, 2011.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, n. 1, p. 75-90, 1986.