A COMPREENSÃO POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Edumatec - CE - Universidade Federal de Pernambuco
borba@talk21.com

Ana Cristina Barreto Sabino de Araújo
CCEN - Universidade Federal de Pernambuco
anas.araujo@hotmail.com

Flávia Myrella Tenório Braz
CE - Universidade Federal de Pernambuco
flavia_myrella@hotmail.com

Resumo:
Situações combinatórias constituem problemas que envolvem diversas relações, as quais as tornam desafiadoras. Resolveram 22 diferentes tipos de problemas condicionais, 54 estudantes do 1º ano e 33 do 3º ano do Ensino Médio, sendo cada aluno solicitado a resolver metade dos tipos de problemas, que envolviam relações de *escolha*, *ordenação*, *posição* e/ou *proximidade*. Análises quantitativas e qualitativas foram realizadas. Observou-se um melhor desempenho dos alunos instruídos em Combinatória (estudantes do 3º ano), mas os não instruídos (do 1º ano) conseguiram obter respostas corretas – com estratégias menos formais – em diversas situações combinatórias condicionais. Verificou-se que as dificuldades relacionaram-se ao efeito isolado ou combinado de ter *ao menos* ou *no máximo* alguns elementos, bem como estavam associadas à não compreensão de outras relações de *ordenação*, *posicionamento* e/ou de *proximidade*. No ensino de Combinatória é preciso estar atento à natureza variada de situações condicionais, as quais podem suscitar ricas discussões e possibilitar amplo desenvolvimento matemático.

Palavras-chave: Problemas combinatórios condicionais; Ensino Médio; relações combinatórias.

1. Introdução

A Combinatória constitui-se em uma parte da Matemática que trata de problemas de contagem. Em problemas combinatórios solicita-se que, por contagem direta ou indireta, sejam levantados os agrupamentos possíveis de uma dada situação. Segundo Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandez (2006) os problemas combinatórios mais frequentes na Educação Básica são os que solicitam a demonstração de existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem determinadas condições e a contagem ou classificação de subconjuntos de um conjunto finito que atendem a certas condições dadas.

A contagem de agrupamentos possíveis também auxilia na análise de probabilidades. Para o julgamento do que seja provável, improvável e impossível, o levantamento de possibilidades se faz necessário, pois para tal é preciso levantar o espaço amostral e este levantamento pode ser efetuado com base em raciocínio combinatório.

Bryant e Nunes (2012) ressaltam que um passo indispensável na solução de problemas de probabilidade é o levantamento dos possíveis eventos e sequências de eventos. O conjunto de todos os eventos possíveis se denomina de *espaço amostral* e segundo esses autores o levantamento das possibilidades não é apenas uma parte necessária do cálculo de possibilidades de um evento, mas é um elemento essencial no entendimento da natureza da probabilidade. Em alguns casos, é possível determinar claramente a probabilidade de ocorrência de um evento se se consegue levantar todas as possibilidades e muitos erros ocorrem quando não se tem consciência do espaço amostral a ser levado em consideração. Bryant e Nunes (2012) chamam a atenção sobre a importância do raciocínio combinatório no levantamento do espaço amostral e, portanto, essencial ao desenvolvimento do pensamento probabilístico, bem como de outras formas de raciocínio científico.

Situações combinatórias são, em essência, situações problematizadoras, pois há uma variedade muito grande de tipos de problemas e diante de cada um deles é preciso deter-se na identificação dos dados apresentados e na escolha de procedimentos que permitam levantar o total das possibilidades da dada situação. Em geral, trata-se de situações mais complexas nas quais um tipo especial de raciocínio é requerido.

Borba (2010) define *raciocínio combinatório* como o modo de pensar necessário à análise de situações nas quais elementos de conjuntos devem ser agrupados de modo a atender relações específicas de escolha e ordenação dos elementos e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Por ser um modo de pensar útil em situações matemáticas e de outras áreas do conhecimento, é importante que se tenha como alvo o seu desenvolvimento na Educação Básica.

Este é um tipo de pensamento mais complexo, como indicado por Inhelder e Piaget (1976), pois envolve um raciocínio hipotético dedutivo, no qual se distingue o *real* do *possível*. Este pensamento é base de raciocínio científico, no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras.

Em situações combinatórias é necessário atentar-se para algumas relações específicas. Em todos os problemas combinatórios as relações de *escolha* e de *ordenação* estão presentes e em situações combinatórias condicionais, outras relações têm que ser consideradas – tais como *posicionamento* e *proximidade* (Borba e Braz, 2012). Estas relações serão tratadas a seguir.

2. As relações combinatórias

Pessoa e Borba (2009 e 2010) observaram que os diferentes tipos de problemas combinatórios – que possuem relações específicas – se desenvolvem desde os anos iniciais de escolarização. As autoras defendem, a partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), a necessidade de se abordar distintas situações combinatórias em todos os níveis da escolarização básica, pois há relações básicas de Combinatória a serem trabalhadas e a compreensão de *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos* necessita de um longo período para que possa ser desenvolvida.

A relação comum destas situações combinatórias é a de levantamento de possibilidades – seja por contagem direta ou indireta e para cada tipo de problema há formas específicas de relações de *escolha* e de *ordenação*. No que diz respeito à escolha, *produtos cartesianos* são compostos a partir da combinação de elementos de dois ou mais conjuntos distintos. Diferentemente, *arranjos*, *combinações* e *permutações* são compostos a partir de escolhas de elementos de um conjunto único, com a particularidade de que em *permutações* todos os elementos são constituintes das distintas possibilidades. Referente à ordenação, em *arranjos* e *permutações* a ordem dos elementos determina novas possibilidades, enquanto em *combinações* e *produtos cartesianos* a ordem dos mesmos elementos não gera possibilidades distintas.

De acordo com Borba e Braz (2012), há outras relações que podem ser consideradas em situações combinatórias, além das relações referentes à *escolha* de elementos e à *ordenação* dos mesmos. Em problemas combinatórios condicionais estão envolvidas relações referentes à *explicitação (ou não) de determinados elementos* que devem fazer parte das possibilidades válidas para a dada situação, *posicionamentos*, *proximidades* e/ou *ordenações específicas* que certos elementos devem apresentar. Estas autoras criaram uma categorização de problemas combinatórios condicionais a partir da consideração de relações de *escolha*, *ordenação*, *posicionamento* e *proximidade*, a qual foi utilizada no presente estudo.

Para o levantamento de problemas condicionais, Borba e Braz (2102) utilizaram livros didáticos da Educação Básica, bem como o estudo da monografia de Homa (2011). As bases das categorizações encontradas nessas fontes eram de naturezas distintas e diferentes da utilizada pelas autoras.

Os livros didáticos analisados apresentam, de modo geral, uma categorização de problemas condicionais baseada em critérios essencialmente matemáticos, ou seja, a classificação busca agrupar os problemas de acordo com semelhanças e diferenças entre os problemas considerando-se propriedades e relações matemáticas, tais como tipos de problemas de acordo com os procedimentos matemáticos necessários para sua resolução, conforme a ordem de grandeza numérica envolvida no problema ou, ainda, segundo o número de etapas necessárias para a resolução do mesmo.

Outra forma de categorização de problemas condicionais foi observada no estudo de Homa (2011). Este autor categorizou problemas de Combinatória, com base em problemas de livros didáticos e no julgamento de professores e licenciandos em Matemática que classificaram problemas por nível de dificuldade. Foram considerados de nível mais fácil de compreensão os problemas que exigem a aplicação de definições; de compreensão média os que exigem aplicação de propriedades combinatórias; e de compreensão difícil os que exigem a aplicação de conhecimentos novos. A categorização sugerida por Homa (2011) possui, dessa forma, base em critérios de natureza didática.

Em Borba e Braz (2102) foram considerados critérios cognitivos na categorização das situações combinatórias, ou seja, foram levadas em conta as relações combinatórias que precisam ser percebidas pelos solucionadores dos problemas. Assim, foi considerado como os alunos podem pensar sobre os problemas e a influência nos seus raciocínios de distintas relações, tais como a *escolha de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos*; a *explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas*; *determinada ordem de elementos*; *posicionamento*; *e/ou proximidade dos mesmos*.

As categorias propostas por Borba e Braz (2012), e utilizadas no presente estudo, foram aplicadas, inicialmente, apenas aos problemas combinatórios do tipo *arranjo* e serão depois ampliadas a problemas combinatórios de outros tipos (*permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*). No presente estudo as situações combinatórias condicionais são limitadas a problemas de *arranjos*, a partir das categorias apontadas por Borba e Braz (2012), que serão apresentadas a seguir quando da descrição do método adotado no estudo em tela.

3. O estudo proposto

O estudo aqui relatado possui como objetivo central verificar a compreensão de problemas combinatórios condicionais, em particular em *arranjos*, entre alunos do Ensino Médio – antes e após a instrução em Análise Combinatória. Em outro momento serão, ainda, classificadas as estratégias destes alunos ao resolverem problemas condicionais diversificados, mas aqui será apresentada uma análise preliminar, quantitativa e qualitativa, de procedimentos adotados pelos alunos.

Participantes e procedimentos

Participaram do estudo 87 alunos, sendo 54 alunos do 1º ano do Ensino Médio e 33 do 3º ano deste nível de escolarização. Todos eram alunos de uma escola pública vinculada a uma instituição federal de ensino. Os alunos do 1º ano ainda não haviam sido instruídos formalmente em Análise Combinatória e os alunos do 3º ano já haviam estudado este conteúdo em sala de aula.

Os estudantes foram divididos, aleatoriamente, em dois grupos e, cada um, resolveu um teste de 11 questões, já que resolver os 22 tipos de problemas de arranjo condicionais categorizados (por Borba e Braz, 2012 com a inclusão de mais uma categoria de Braz e Borba (2012)) seria uma atividade muito cansativa.

As questões respondidas no Teste 1, foram as que seguem (com suas respectivas categorizações).

1. O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a Espanha, a França e a Itália. Imaginando que o Brasil será o campeão, de quantas maneiras diferentes podem se

organizar os três primeiros colocados? (**Um elemento é fixo e em uma determinada posição**).

2. Marcelo foi ao parque de diversões com seu irmão Jorginho e duas primas: Andréa e Tati. Em um banco da roda gigante só cabem duas pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco, se uma das primas sempre tiver lugar, mas elas nunca sentem juntas? (**Um elemento não-explicitado, fixo e com determinada característica**).

3. Paulo, Maria, Amanda e Lila são muito amigos e adoram ir juntos na Van da escola. Mas em cada banco da Van só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco desde que no máximo duas das meninas tenham lugar? (**Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinada característica**).

4. Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 4, 5 e 8, sendo o 1º algarismo par e 3º algarismo ímpar? (**Mais de um elemento não-explicitado, com determinadas características, em determinadas posições e ordem**).

5. Júlio quer criar uma bandeira para o time de vôlei da escola, do qual faz parte. A bandeira conterá três cores dispostas em linha horizontais. Dispondo das cores azul, marrom, branca, preta e vermelha, quantas bandeiras diferentes Júlio pode formar, desde que as cores azul e vermelha fiquem sempre juntas? (**Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade**).

6. Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que os algarismos pares sempre apareçam e do maior para o menor, em qualquer posição? (**Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinada ordem**).

7. Quero criar uma senha de quatro algarismos para meu celular usando alguns destes algarismos: 2, 3, 4, 5 e 7. Quantas senhas de quatro algarismos diferentes eu posso formar em que o primeiro e o terceiro algarismos sejam números pares? (**Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinadas posições**).

8. Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Maria e Raquel fiquem sempre juntas e nessa ordem? (**Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem**).

9. Beto, Pedro, João, André e Thiago estão disputando uma corrida de cavalos. De quantas maneiras diferentes podemos ter os quatro primeiros colocados desde que Pedro e João estejam juntos no 1º e no 2º lugar? (**Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade**).

10. Placas de automóvel possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar, com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4 que tenha apenas dois algarismos ímpares? (**Mais de um elemento não-explicitado, fixo e com determinada característica**).

11. Júlio, seu irmão Marcos, sua mãe e sua avó adoram videogame. O joguinho possui três controles: primeiro, segundo e terceiro player (jogador). De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar para jogar, desde que as mulheres sejam as primeiras e da mais velha para a mais nova? (**Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, com determinada posição, proximidade e ordem**).

As questões respondidas no Teste 2, por outro grupo de alunos, foram as que seguem (com suas respectivas categorizações).

1. Na praça em que Marina está tem um banco no qual cabem quatro pessoas. De quantas maneiras diferentes Marina e as amigas (Aninha, Sarah, Gabi e Nina) podem ocupar os quatro lugares do banco, desde que Marina fique em uma ponta e Gabi na outra? (**Mais de um elemento explicitado em determinadas posições**).
2. De quantas maneiras diferentes minha tia Joana, meus primos Pedro e Ana e minha mãe, podem se sentar em um banco de três lugares sendo que os meus primos querem sentar sempre juntos? (**Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade**).
3. Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar a partir dos algarismos 2, 3, 4 e 5, que tenham pelo menos um algarismo par? (**Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica).**
4. César só lembra os cinco primeiros dos oito algarismos do telefone de Ana e precisa muito falar com ela. Os cinco algarismos são 34910. Pelo que César se lembra o último algarismo do telefone de Ana é impar, os outros são pares e nenhum algarismo se repete. Quantos números telefônicos César encontrará sob essas condições? (**Um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinada posição).**
5. Diego, Mário, João e Carlos estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes podem-se obter os três primeiros lugares se Carlos sempre ficar à frente de Mário entre os três primeiros? (**Mais de um elemento explicitado em determinada ordem**).
6. De seis opções de lanche (sorvete, coxinha, pizza, hambúrguer, bolo e misto), Thiago pode escolher três para fazer sua refeição. Se ele começar comendo primeiro a coxinha e por ultimo o sorvete, de quantas maneiras diferentes Thiago poderá fazer esta refeição? (**Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem**).
7. O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a França e a Itália. De quantas maneiras diferentes podem se organizar os três primeiros colocados, se a seleção brasileira e a argentina sempre estiverem entre eles? (**Mais de um elemento explicitado fixo**).
8. Quantos números de quatro algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 2, 5 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam juntos, do maior para o menor? (**Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade e ordem**).
9. Cadu quer criar uma nova senha para seu e-mail utilizando apenas três das quatro letras do seu nome. Quantas senhas com três letras diferentes ele pode obter a partir das letras C A D U, que tenham a letra C, em qualquer posição? (**Um elemento explicitado fixo**).
10. Aninha, seus irmãos Jonathan e Lucas e suas primas Isabel e Paula, estão jogando videogame. O joguinho possui quatro controles. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar para jogar, se os irmãos de Aninha sempre querem jogar juntos como primeiro e segundo controles? (**Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e proximidade**).
11. Cinco garotas: Amanda, Renata, Lila, Vanessa e Paula estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Amanda esteja em 1º lugar e Paula seja a segunda? (**Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem**).

São apresentados, a seguir, os resultados até o momento analisados. São discutidos, assim, os desempenhos obtidos nos dois testes que indicam os acertos por tipo de problema condicional, por ano de escolarização.

4. Resultados

Na Tabela 1 pode-se observar os resultados obtidos pelos alunos por ano de escolarização, dentre os que responderam o Teste 1.

Tabela 1- Percentual de acerto dos alunos no Teste 1, por ano de escolarização.

Tipo de questão	**1º ano**	**3º ano**
Q.1 - Um elemento fixo e em uma determinada posição	85	100
Q.2 - Um elemento não-explicitado, fixo e com determinada característica	31	20
Q.3 - Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com certa característica	58	50
Q.4 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinadas características, em determinadas posições e ordem	77	95
Q.5 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinadas características, em determinadas posições e ordem	50	55
Q.6 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinada ordem	39	55
Q.7 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinadas posições	73	70
Q.8 - Ma**is de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem**	58	55
Q.9 - Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade)	69	95
Q.10 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, é fixo	50	55
Q.11 - Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, com determinada posição, proximidade e ordem	73	90

Observa-se que, de modo geral, como esperado, os alunos do 3º ano apresentaram um melhor desempenho do que os alunos do 1º ano. Como os alunos do 3º ano já haviam recebido instrução em sala de aula sobre situações combinatórias, estes tinham conhecimento de procedimentos formais (como o *princípio fundamental da contagem* e fórmulas, como a de *arranjos*), embora muitas vezes tenham preferido utilizar outros procedimentos. Os alunos do 1º ano não possuíam ainda o conhecimento de fórmulas da Análise Combinatória, mas conheciam o *princípio fundamental da contagem* e, por vezes, o aplicaram, embora tenham preferido procedimentos outros, tais como desenhos, listas, diagramas e árvores de possibilidades.

Ressalta-se que mesmo sem terem conhecimento formal de problemas combinatórios condicionais, os alunos do 1º ano se esforçaram em responder as questões e foram muito bem sucedidos em vários dos problemas. Como não se exigiu uso de procedimento formal, os alunos se valiam de estratégias próprias para resolverem as situações e conseguiram encontrar as soluções corretas diversas vezes.

Os problemas que os alunos apresentaram maiores dificuldades foram as Questões 2 e 6, bem como apresentaram algumas dificuldades com as Questões 3, 5, 8 e 10.

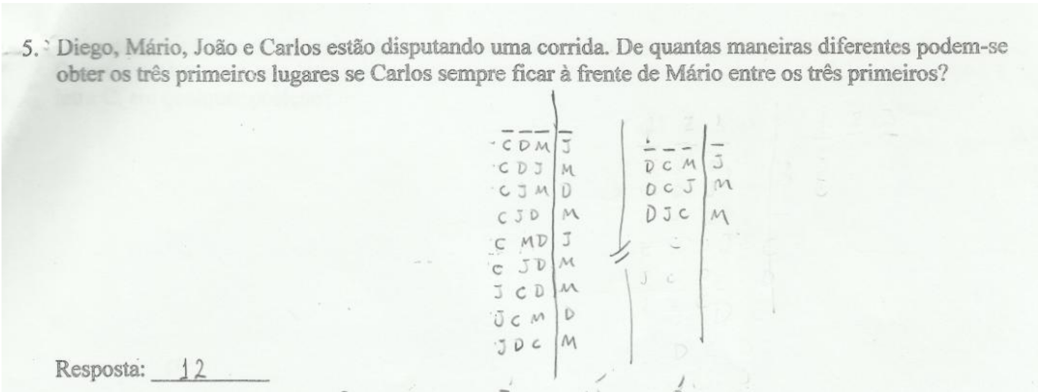
Em Borba e Braz (2012) havia-se levantado a hipótese que quanto maior o número de relações envolvidas na questão, como as de determinada *escolha*, *ordem*, *posição* e *proximidade*, maior dificuldade os alunos apresentariam. Entretanto, entre os alunos do Ensino Médio do presente estudo esta hipótese não foi confirmada, pois a Questão 11 envolvia todas estas relações condicionais e não foi o problema mais difícil para o grupo de alunos investigado.

Levantamos, assim, nova hipótese de que mais de que o número de relações envolvidas, a dificuldade na resolução de problemas condicionais pode estar associada ao efeito isolado ou combinado do *tipo de relação envolvida*, como as escolha referentes a ter *ao menos* ou *no máximo* alguns elementos, mais as de *posicionamentos* e/ou *proximidade*.

Se o aluno está resolvendo os problemas por meio de um desenho ou uma listagem, ele busca enumerar todas as possibilidades que satisfazem as condições impostas no enunciado da questão. A explicitação de todas as possibilidades por meio destes recursos torna-se mais viável se o número de possibilidades for menor. Quanto maior o número de possibilidades a serem explicitadas, por desenho ou listagem, maior a possibilidade de erro, pois é preciso que se adote um procedimento bem sistemático, de modo a não se perder na enumeração das possibilidades, não as repetindo ou deixando de enumerar algumas delas.

Por vezes, o número de possibilidades não era elevado, mas ao usar a listagem o aluno não se dava conta de condição colocada no enunciado da questão. No caso da Figura 1, o estudante não percebeu que era solicitado o número de possibilidades nos quais Carlos e Mário estivessem nos três primeiros lugares. Ao invés disso, foram listadas possibilidades adicionais, como se no enunciado do problema se tivesse solicitado as colocações nas quais Carlos e Mário estivessem entre os quatro lugares da corrida. Dessa forma, foram também incluídas seis possibilidades adicionais nas quais uma condição colocada foi satisfeita – Carlos à frente de Mário, mas não apenas estando os dois entre os três primeiros lugares, como enunciado no problema.

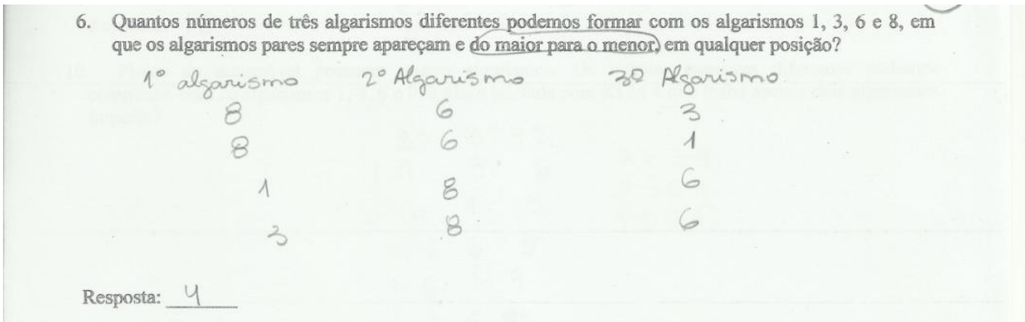
Figura 1- Solução incorreta de aluno do 1º ano do Ensino Médio utilizando-se listagem e desconsiderando uma das condições enunciadas.



A não explicitação de elementos, de início, parecia ser outro fator dificultador, pois se pode observar que nas duas questões mais difíceis (a segunda e a sexta) esta relação estava presente. A não explicitação de elementos também estava presente nas Questões 3 e 10, as quais apresentaram certo grau de dificuldade, uma vez que apenas cerca de metade dos estudantes – tanto de um ano escolar quanto de outro conseguiu resolver essas questões. Na Questão 2, não se explicitava qual prima (Andréa ou Tati) sempre tinha lugar. Já na Questão 6 não se explicitava quais dos algarismos pares (6 ou 8) deveriam aparecer.

Examinando os erros cometidos nestas questões, verifica-se, entretanto, que os alunos não tiveram dificuldade em selecionar os elementos não explicitados, mas a dificuldade deles era de outra natureza. Na Figura 2 observa-se que o aluno corretamente selecionou os elementos não explicitados (os algarismos pares, 6 e 8), mas errou ao não considerar outras possibilidades de posicionamento dos algarismos, ou seja, não enumerou os casos 816 e 836.

Figura 2 - Solução incorreta de aluno do 1º ano do Ensino Médio utilizando-se listagem e desconsiderando uma relação de posição.

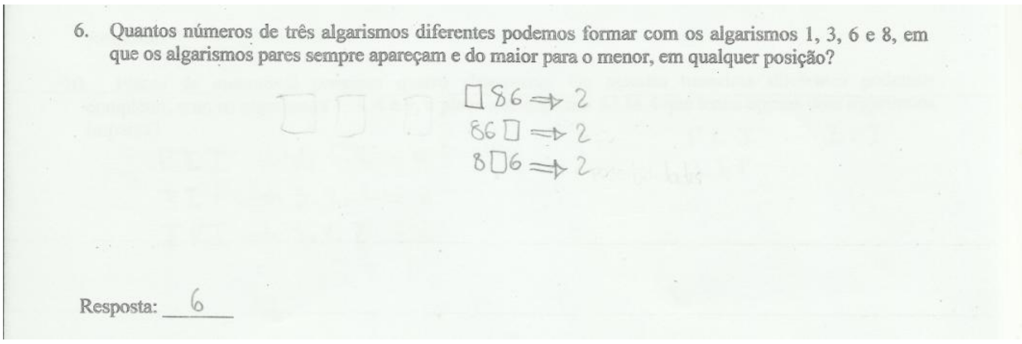

6. Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que os algarismos pares sempre apareçam e do maior para o menor, em qualquer posição?

1º algarismo	2º Algarismo	3º Algarismo
8	6	3
8	6	1
1	8	6
3	8	6

Resposta: 4

Na Figura 3 tem-se um exemplo de um aluno do 1º ano que acertou esta 6ª questão ao considerar que os algarismos 8 e 6 poderiam também estar em primeira e terceira posições, respectivamente. Nesse caso o aluno não listou as seis possibilidades, mas considerou que para o 8 e 6 na segunda e terceira posições havia duas possibilidades (186 e 386), assim como mais duas possibilidades em cada uma das outras possíveis posições.

Figura 3 - Solução correta de aluno do 1º ano do Ensino Médio considerando correta relação de posicionamento e ordem.

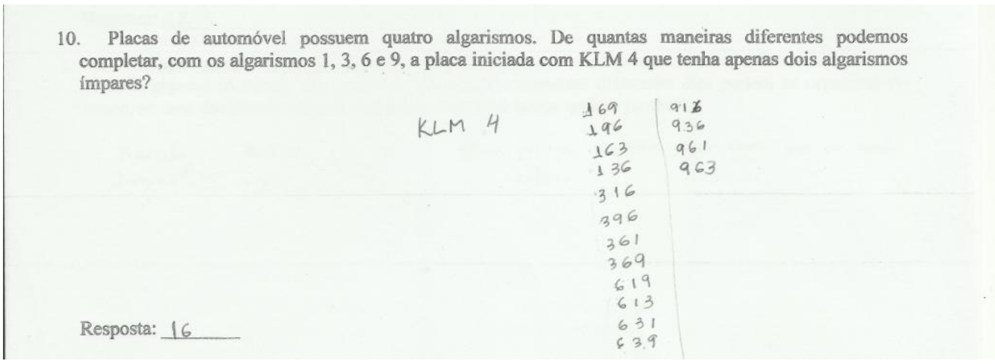

6. Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que os algarismos pares sempre apareçam e do maior para o menor, em qualquer posição?

□86 → 2
86□ → 2
8□6 → 2

Resposta: 6

Na Figura 4 tem-se um exemplo de um aluno do 1º ano que não conseguiu enumerar todas as possibilidades, pois embora tenha demonstrado certa sistematização em sua listagem, esqueceu-se de listar duas possibilidades que satisfazem a condição enunciada de ter apenas dois algarismos ímpares: 691 e 693.

Figura 4 - Solução incorreta de aluno do 1º ano do Ensino Médio utilizando-se listagem sem esgotar todas as possibilidades.


10. Placas de automóvel possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar, com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4 que tenha apenas dois algarismos ímpares?

KLM 4

169 | 916
196 | 936
163 | 961
136 | 963
316
396
361
369
619
613
631
639

Resposta: 16

Assim, erros comumente cometidos, principalmente quando se usavam procedimentos de enumeração direta das possibilidades (como em listagens), eram o de não sistematização no levantamento das possibilidades, não se considerar os casos em que pelo menos ou apenas alguns casos deveriam ser levados em conta e não levar em conta que determinadas posições poderiam ser permutadas.

Na Tabela 2 pode-se verificar os resultados obtidos pelos alunos por ano de escolarização, dentre os que responderam o Teste 2.

Tabela 2- Percentual de acerto dos alunos no Teste 2, por ano de escolarização.

Tipo de questão	**1º ano**	**3º ano**
Q.1 - Mais de um elemento explicitado em determinadas posições	64	92
Q.2 - Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade	64	77
Q.3 - Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica	54	85
Q.4 - Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica	25	77
Q.5 - Mais de um elemento explicitado em determinada ordem	25	62
Q.6 - Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem	68	92
Q.7 - Mais de um elemento explicitado fixo	64	92
Q.8 - Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade e ordem	57	92
Q.9 - Um elemento explicitado fixo	79	85
Q.10 - Mais de um elemento não explicitado, com determinada	64	77

característica, em determinadas posições e proximidade		
Q.11 - Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem	86	100

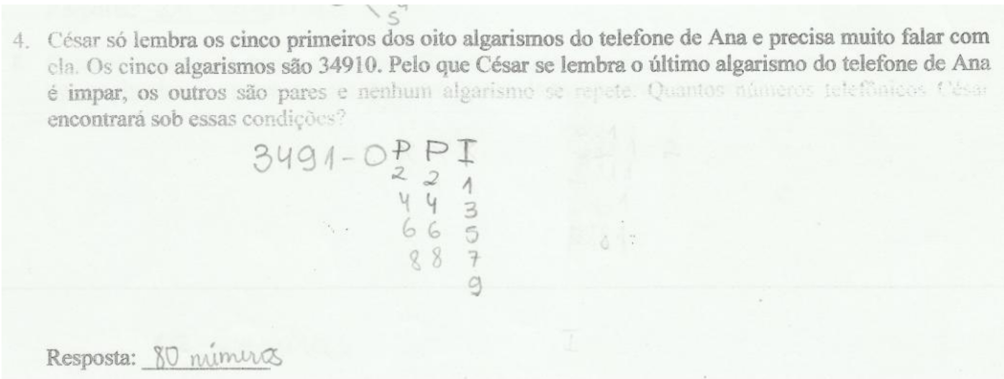
Neste tipo de teste os alunos do 3º ano apresentaram melhor desempenho em todas as questões, quando comparado com o desempenho dos alunos do 1º ano. Ressalta-se também que os alunos já instruídos em Combinatória apresentaram desempenhos iguais ou superiores a 60% de acertos e em algumas questões os alunos do 1º ano apresentaram desempenhos próximos ou superiores a 80%.

Os alunos do 1º ano apresentaram maiores dificuldades nas Questões 4 e 5 e também dificuldades nas Questões 3 e 8. A terceira e quarta questões apresentavam a condição de *ter pelo menos um* e *mais de um elemento* e a quinta e oitava questões continham a condição de ter *mais de um elemento*, o que pode ter sido elemento dificultador destas questões.

Os resultados obtidos no Teste 2, também indicam que dificuldades na resolução de problemas condicionais podem estar relacionadas ao efeito isolado ou combinado dos tipos de relação envolvida.

Outros aspectos a serem considerados dizem respeito ao contexto dos problemas, pois em alguns deles parece que a vivência real foi mais forte, impedindo um pensamento condicionado ao colocado no enunciado da questão. Isso ocorreu, por exemplo, na Questão 4 do Teste 2 no qual alguns alunos erraram ao repetirem algarismos (como indicado na Figura 5), o que ocorre no cotidiano, pois números de telefones possuem, de fato, algarismos repetidos. Também ocorreu na Questão 10 do Teste 1, no qual alguns alunos repetiram algarismos (como mostrado na Figura 6), como de fato ocorre em placas de automóveis.

Figura 5 - Solução incorreta de aluno do 1º ano do Ensino Médio na qual se considerou contexto real (de números de telefones) e não o condicionado (não repetição) no problema.

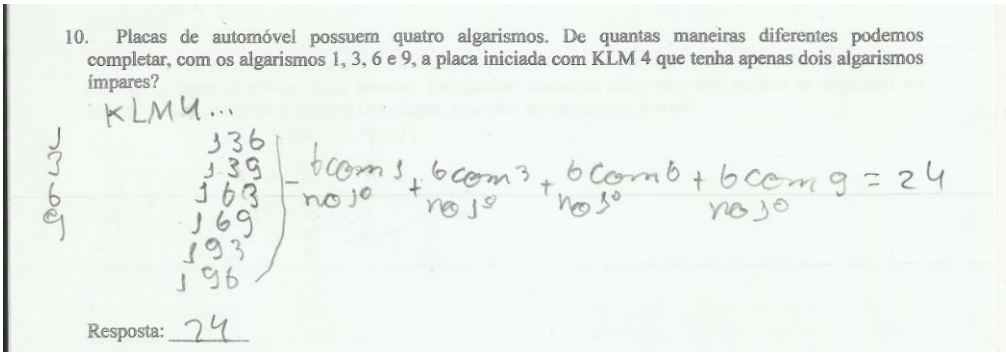


4. César só lembra os cinco primeiros dos oito algarismos do telefone de Ana e precisa muito falar com ela. Os cinco algarismos são 34910. Pelo que César se lembra o último algarismo do telefone de Ana é impar, os outros são pares e nenhum algarismo se repete. Quantos números telefônicos César encontrará sob essas condições?

3491-0PPI

Resposta: 80 números

Figura 6 - Solução incorreta de aluno do 1º ano do Ensino Médio se considerou contexto real (de placas de automóveis) e não o condicionado (não repetição) no problema.



10. Placas de automóvel possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar, com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4 que tenha apenas dois algarismos ímpares?

KLM4...

6 com 1 no 1º + 6 com 3 no 1º + 6 com 6 no 1º + 6 com 9 no 1º = 24

Resposta: 24

5. Considerações Finais

Os resultados inicialmente analisados apontam que, apesar da complexidade de problemas combinatórios condicionais, alunos antes do ensino formal de Combinatória (como os alunos do 1º ano do Ensino Médio do presente estudo), são capazes de gerar estratégias que possibilitem obter respostas corretas para esse tipo de problema.

Mais do que o número total de possibilidades, o que parece indicar o maior grau de complexidade é a *relação condicional* colocada no enunciado do problema. Relações que envolvem ter *ao menos* ou *no máximo* alguns elementos são das mais complexas, assim como outras relações referentes a *posicionamento* e/ou *proximidade.* O efeito isolado ou combinado destas relações pode tornar algumas situações combinatórias condicionais mais complexas.

A próxima etapa na análise de dados do presente estudo será um tratamento estatístico no qual se verificará o efeito (isolado e de interação) de *ano de escolarização*; de *número total de possibilidades* solicitadas; *número de etapas de escolha*; *número de relações* envolvidas na situação; *tipo de relação* presente na situação proposta, tais como as relações referentes a *escolha de elementos* (que *podem ou não ser explicitados* e também *com pelo menos ou no máximo alguns elementos*), e as relações referentes a *ordenação*, a *posicionamento* e a *proximidade*. Também se poderá verificar o efeito dos dois diferentes tipos de teste no desempenho dos alunos.

Os resultados do presente estudo apontam que é preciso atentar, no ensino de Combinatória, quanto à natureza variada de situações condicionais. Trabalhar tais situações em sala de aula pode ser um excelente recurso de ensino, pois as mesmas podem suscitar ricas discussões – já que precisam ser identificadas e devidamente tratadas – e podem possibilitar amplos desenvolvimentos matemáticos por parte dos alunos.

6. Agradecimentos

À escola pública que possibilitou a coleta de dados e aos alunos que se empenharam na resolução dos problemas. Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC – Ensino Médio) da Universidade Federal de Pernambuco.

7. Referências

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática.* Salvador, 2010.

BORBA, Rute & BRAZ, Flávia M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: *Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Fortaleza, 2012.

BRAZ, Flávia M. T. e BORBA, Rute. A compreensão de problemas combinatórios condicionais por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. In: *Anais do XX Congresso de Iniciação Científica da UFPE* – CONIC, Recife, 2012.

BRYANT, Peter & NUNES, Terezinha. Children's understanding of probability - A literature review (full report) - Nuffield Foundation *http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf*, acesso em 12/03/2013.

HOMA, Agostinho Iaqchan. Testes adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória. *Monografia de Especialização.* Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), 2011.

INHELDER, Barbara & PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO CARVALHO, Paulo & FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade com as soluções dos exercícios*. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática). 9ª edição.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. *Zetetike* (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. Recife: v. 1, no. 1, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986. pp. 75-90.