

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS USADOS POR UMA PROFESSORA E SEUS ALUNOS DE 8ª SÉRIE (9º ANO) EM AULAS SOBRE FUNÇÕES

Tânia Stella Bassoi
UNIOESTE- Cascavel
taniastella@ibest.com.br

Maria Tereza Carneiro Soares
UFPR
mariteufpr@gmail.com

Resumo:

O objetivo desta mesa temática é discutir os processos cognitivos mobilizados em ações para o pensamento matemático, segundo Duval. A contribuição da pesquisa para este tema, concluída em 2004, foi analisar os registros de representação semióticas usados por uma professora e seus alunos de 8ª série (9º ano) em 47 aulas sobre funções, de uma escola municipal da periferia de Curitiba. Como método optou-se por uma observação em ambiente natural onde a pesquisadora acompanhou, gravou e anotou os registros produzidos por ela e seus alunos, em aulas sobre funções de 1º e 2º grau, selecionando e analisando 4 aulas integralmente e 3 parcialmente. Das aulas selecionadas, analisaram-se os *tratamentos* e *conversões*. Como resultado constatou-se que: a professora empenhou-se em lidar com diferentes registros de representação para que os alunos aprendessem com o trânsito entre as representações a distinguir o objeto matemático de sua representação. Os *tratamentos algébricos* e numéricos (racionais e inteiros) revelaram-se difíceis para a maioria dos alunos; o *tratamento algébrico* de menor custo não pareceu ser o que os alunos tiveram mais facilidade em aceitar; os alunos demonstraram dificuldade nos *tratamentos gráficos* de funções do 1º grau e 2º grau; as *conversões* que apresentaram maior grau de dificuldade foram: passagem de gráfico de função do 1º grau para escrita algébrica e a de escrita algébrica de funções de 1º e 2º grau para uma representação figural. Um forte componente na negociação de *tratamentos* e *conversões* de registros entre a professora e os alunos, além dos recursos representacionais, foi a fala matemática da professora.

Palavras-chave: ensino de matemática; funções; registros de representação semiótica; tratamentos ;conversões.

1.Introdução

O que nos leva a empenhar tempo para leitura, delimitação de um problema, abandonar um pouco a vida privada está, invariavelmente, atrelada e às angústias e dúvidas geradas pela nossa vida profissional. Uma dúvida que arrastei anos a fio foi não entender como os alunos aprendiam funções em matemática, mas não as reconheciam nem nos fenômenos físicos nem químicos.

Na década de 80 e 90 as pesquisas, mostravam as dificuldades, os erros recorrentes na aquisição do conteúdo, mas não evidenciavam o porque isso acontecia.

Ao ler, em 1999, uma coletânea de artigos sobre a didática da matemática francesa, o artigo de Damm (1999) me chamou a atenção por tratar dos registros de representação semiótica, assunto totalmente desconhecido para mim.

Durante a leitura, uma ideia marcou a opção teórica: os objetos matemáticos são acessíveis somente pelas suas representações e as representações não são os objetos. Como num filme, minha memória trouxe à tona vários momentos vividos de insucesso ao ensinar. Apresentada a Raymond Duval procurei entender os significados atribuídos pelo autor para registro, representação e semiótica.

De posse desse referencial escrevi o projeto de doutoramento cujo objetivo geral era compreender como os alunos tratavam e convertiam os registros de representação, fundamentado na premissa de Duval de que para aprender em matemática devemos saber transformar pelo menos dois registros de representação um no outro, ida e volta.

Com o início do doutoramento e leituras posteriores achei que o processo de aquisição do conhecimento matemático, analisando e interpretando trabalhos ou tarefas de alunos, produziria resultados pontuados. Se observasse o ponto de vista cognitivo de como a compreensão em matemática era conduzida por uma professora, atingiria resultados que poderiam auxiliar no entendimento do problema da pesquisa.

De comum acordo com a orientadora, reorganizei o problema para o trabalho da professora. Especificamente observei como ela “facilitava” o acesso ao objeto matemático funções intermediado pelos registros de representação semiótica, seus tratamentos e conversões.

Metodologicamente optei pela entrevista semiestruturada para levantar dados sobre a formação da professora, sujeito da pesquisa, como organizava suas atividades e pela observação em ambiente natural, assistindo todas as aulas sobre funções (47) em uma de suas salas de 8^a série na época (2004).

2. Compreensão em matemática

Quando falamos em compreender em matemática estamos falando como se isso se reportasse a uma situação excludente: ou se compreende ou não se compreende em matemática. Do ponto de vista de Duval, o compreender em matemática remonta a dois pontos de vistas divergentes: o matemático e o cognitivo.

Do ponto de vista matemático, compreender tem como ponto de partida a utilização de propriedades matemáticas e visando um ensino, cuja finalidade seria transmitir

... o conhecimento dessas propriedades, dos números, das funções, das relações espaciais, topológicas, afins, métricas, etc. Nesta perspectiva, o desenvolvimento da compreensão no *aprendizado se reduz a um processo de conceituação*, isto é, de “construção” de um conhecimento relativo a cada propriedade e sua utilização matemática ou prática, respeitando as restrições matemáticas sobre suas ordens de aquisição. (DUVAL, 2012, p.309-310)

Do ponto de vista cognitivo, a compreensão diz respeito ao “modo de acesso aos objetos estudados” (DUVAL, 2012, p.310) e este fato vai implicar que o conhecimento matemático, do ponto de vista cognitivo, requer que se reconheça, pelas representações, os objetos matemáticos representados.

Vamos exemplificar estes pontos de vista de posse de transcrições de aulas sobre funções recortadas da tese de Bassoi (2006).

3. Os processos cognitivos evidenciados em aulas de matemática

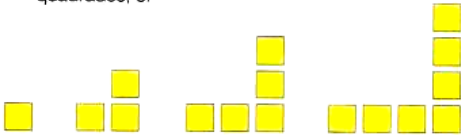
Deteremos olhar sobre as aulas do ponto de vista cognitivo, uma vez que do ponto de vista matemático, o conhecimento se encontrava organizado pela adoção do livro didático da professora, uma das autoras do livro, cabendo destaque as interações verbais das atividades desenvolvidas em sala de aula. O tema principal das aulas a seguir analisadas era “Buscando escritas genéricas”. O objetivo das aulas sobre este tema era a escrita das expressões algébricas correspondentes às situações apresentadas em registros diferentes.

A professora iniciou a aula pedindo aos alunos que completassem com números a seqüência dada abaixo, realizando com as respostas dos alunos o primeiro *tratamento* numérico. Todos falaram rapidamente.

• Observe esta seqüência de números bastante conhecida:
1, 3, 5, 7, 9,...

a) Quais são os três próximos números desta seqüência? Como você os determinou?

b) Que nome você daria a esta seqüência?
Uma representação desta seqüência, usando quadrados, é:



c) A tabela dada mostra a relação entre a posição da figura e a quantidade de quadrados que ela possui:

Posição da figura	1	2	3	4	5	6	...
Total de quadrados	1	3	5	7	9	11	...

Com as informações que você já tem, calcule o número de quadrados das figuras que estão na 8ª e na 10ª posições. Desenhe-as em seu caderno e explique como você pensou.

Matemática (2002, p.50)

Eles imediatamente reconheceram, pela disposição numérica, os elementos componentes da seqüência como números ímpares.

A professora corrigiu:

P: -Seqüência de números ímpares.

Este trecho inicial da aula evidencia que, do ponto de vista matemático, a professora chama a atenção para a disposição dos números ímpares na forma de uma seqüência e, do ponto de vista cognitivo, eles reconhecem os números ímpares e completam a seqüência pedida no registro matemático escrito, mas a convertem, expressando no registro da fala, como números ímpares e não seqüência de números ímpares.

O item b consistia em um *tratamento* figural que solicitava a continuidade dos desenhos apresentados no livro e foram copiados pela professora no quadro.

1^a 2^a 3^a 4^a 5^a

Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

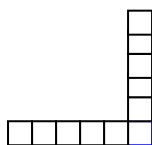
A seguir, professora perguntou:

P: - Tem outro jeito de encontrar o próximo desenho? Qual seria?

Lui: - Cinco em baixo e quatro para cima.

P: - Alguém pensou outra maneira de fazer?

Die: - Um no canto, cinco pra cima e cinco para o lado.



Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

A professora desenhou o “L” acima e pediu para outro aluno explicar como Die faria o próximo desenho. Ele falou e gesticulou a posição horizontal e vertical:

Jon: - Um no canto (vértice) seis pra cá (horizontal) e seis pra lá (vertical).

P: - Observem os desenhos. Qual seria o número de quadrados para a décima figura?

A2: - Vinte e um.

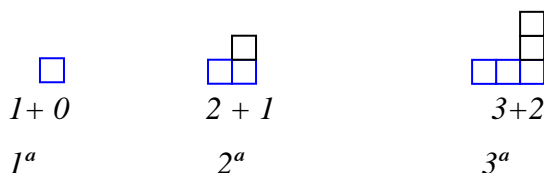
P: - E a vigésima quinta figura, quantos quadrados têm?

Vários alunos responderam juntos com valores diferentes e um deles afirmou:

A3: - Quarenta e nove.

P: - Como você pensou: do jeito do Jon (que era igual a do Die) ou do Lui?

Lui afirmara que enxergava as figuras (a partir da 2^a figura), da seguinte maneira: duas em baixo e uma em cima, a terceira com três em baixo e duas em cima e assim sucessivamente conforme ilustrado abaixo.



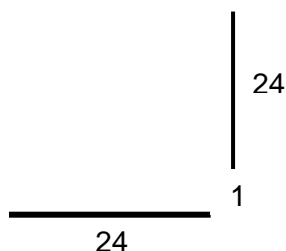
Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professor

Um dos alunos respondeu que pelo método do Die, ou seja, “um no canto, cinco pra cima e cinco para o lado”. Esse *recurso representacional* pareceu facilitar o caminho para a *representação formal*.

A seguir, a professora ampliou o exercício propondo tarefas, além das solicitadas no livro e que serão apresentadas a seguir. Ela iniciou perguntando:

P: - Quantos quadradinhos teriam na vigésima quinta figura pelo método do Die?

A professora reconheceu que este método auxiliava os alunos a visualizar uma forma de organizar os quadradinhos e identificar a regularidade da seqüência proposta. À medida que solicitou essa figura com número maior de quadradinhos, em que desenhar os quadradinhos era incômodo e inconveniente, ela usou outro *recurso representacional*, desenhando apenas um segmento horizontal e outro vertical em substituição a linha e a coluna de quadradinhos, como apresentado abaixo, (denominado diagrama pela pesquisadora). Nos segmentos horizontal e vertical do diagrama do quadro, foram colocados, os números correspondentes à quantidade de quadradinhos na linha e na coluna e incluído o número 1, na intersecção.



Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

Em seguida, oralmente, a professora se refere à figura de número 83, registrando o diagrama no quadro e os alunos respondem imediatamente:

As: - Oitenta e dois em cima, oitenta e dois em baixo e um no canto.

Nesse instante um aluno se adianta e diz:

A3: – Para achar o número de quadrados é só fazer duas vezes o número de baixo e somar com um.

O processo indutivo utilizado pela professora para essa disposição numérica, antecipou a generalização aritmética do número de quadrados na figura para pelo menos um aluno. Como o resto da turma não se manifestou, ela prosseguiu.

A professora confirmou e perguntou sobre que número ímpar representaria a 36ª figura. Os alunos responderam 71. Ela desenhou o diagrama e colocou o primeiro valor (35) na linha horizontal. Perguntou se haveria uma fórmula para esse jeito de contar. Os alunos responderam:

As: - Acho que sim...- Acho que dá...

Em seguida, ela apresentou uma forma de representar genericamente a regularidade até então observada:

P: - Então vamos usar a letra “n” que é o número da figura da seqüência.

A professora se referia ao número total de quadradinhos de cada figura da seqüência apresentada. *O termo “número da figura na seqüência” poderia ter sido confundida com “ número da figura (ordem)” o que dificultaria o estabelecimento da relação entre as variáveis e conseqüentemente sua generalização numa escrita algébrica.* Usou o mesmo recurso representacional, o diagrama, pedindo aos alunos para completarem cada segmento do mesmo, horizontal e vertical utilizando a letra “n” anteriormente combinada. A professora registrou no quadro apenas os segmentos do diagrama:



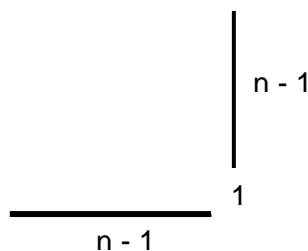
Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

P: - Então, nessa forma de contar tem quantos quadrados? Ditem pra mim.

As: “n” menos um mais “n” menos um e mais um.

A denominação da letra “n” como número da figura da seqüência, pela professora, induziu ao próximo passo da denominação do número de quadradinhos em cada figura, acrescentado do número um que não se modificou em cada diagrama.

Ela anotou no quadro:



Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

A seguir recomendou:

P:- Então vamos simplificar “essa coisa aqui” (batendo com o giz sobre a expressão $n - 1 + n - 1 + 1$ que escreveu após finalizar a escrita dos valores $n - 1$ e 1 nos segmentos e no canto do diagrama).

Em seguida cortou o -1 e o $+1$ e perguntou:

P: - Como é que fica?

Os alunos completaram falando:

As: - Dois “n” menos um.

Os alunos mantiveram um tratamento ao apresentarem a solução em língua natural. A conversão da fala em linguagem matemática foi feita pela professora.

No uso de *recursos representacionais e representações formais* cabe destacar na primeira tarefa: a *conversão* entre a seqüência figural e sua representação numérica e a *conversão* entre a posição de cada elemento da seqüência e o número de quadradinhos correspondente à posição.

A professora afirmou:

P:- Vamos experimentar se essa fórmula dá certo.

Utilizou os exemplos numéricos presentes no quadro e conferiu com os alunos o total de quadrados relacionados a ordem da figura para três figuras: a terceira, a quinta e a vigésima quinta. Continuou:

P: - Apareceu outro modo de fazer a fórmula. Vamos tentar de maneira diferente? Vejam...

P:- Como está pensando o aluno que...

Escreveu no quadro:

<i>N</i>	<i>1ª fig.</i>	<i>2ª fig.</i>	<i>3ª fig.</i>	<i>4ª fig.</i>	<i>...</i>
<i>Q</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>7</i>	
<i>Pensando</i>	<i>2 + 1</i>	<i>3 + 2</i>	<i>4 + 3</i>	<i>...</i>	

Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

A partir desse novo *recurso representacional*, um aluno complementou:

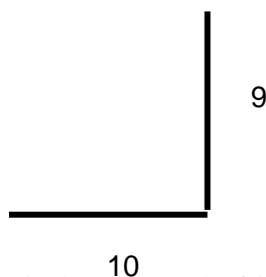
A2:- Está vendo o de baixo (quadrados na horizontal) e o de cima (quadrados na vertical).

O aluno se apoiou no desenho, em formato de “L” composto de quadradinhos. A professora prosseguiu:

P: - *A décima figura tem quantos quadrados, hein Fer? Vejam... (mostrando os recursos representacionais anteriores, diagramas, ainda expostos no quadro negro).*

Fer: - *Dez mais nove (10 + 9).*

A professora voltou-se para o quadro, anotou o número de quadradinhos sobre os segmentos do diagrama e perguntou:



Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

P: - *10 aqui (e aponta o segmento horizontal) e 9 aqui (e coloca no segmento vertical)?*

Fer: - *Sim.*

A seguir, a professora perguntou e anotou o número quadrados de cada segmento do diagrama para a 15ª figura para a aluna Mar e a 29ª figura para o aluno A3. Indagou também, sobre o total de quadrados nesses dois casos. Os alunos responderam de imediato:

As: - *Vinte e nove ... Cinquenta e sete.*

Voltando ao quadro ela ainda perguntou:

P: - *Como estou pensando?*

E escreveu:

$$10 + 9 \quad 15 + 14 \quad 29 + 28.$$

Voltou-se aos alunos e perguntou a um deles:

P: - *Como é o jeito de falar? Explique com palavras.*

Esta questão provocou a conversão entre um registro de representação numérica e um registro de representação em língua natural que foi exposto sem nenhum problema de compreensão uma vez que se tratava de uma conversão congruente, tanto da passagem da representação numérica para a língua natural como da língua natural para a figura:

A4:- Em baixo é o dez e em cima é o nove... em baixo é o quinze e em cima é quatorze...em baixo é vinte e nove e em cima vinte e oito.

O aluno explicou a forma de *tratamento* utilizando os *recursos representacionais* ainda presentes no quadro. Após a explicação, a professora continuou o exemplo anterior.

P: - Como falamos a centésima figura?

Nesse instante, a professora chamou a atenção de duas alunas que conversavam e pediu para que elas compartilhassem a conversa com todos.

A5- Eu estava explicando para ela que se contasse tudo em baixo (horizontal) e tudo em cima (vertical), contava o um duas vezes e por isso tinha que escrever menos um para não ficar sobrando.

A professora então escreveu 100 e 99 na linha horizontal e vertical respectivamente de um diagrama e perguntou:

P: - E se fosse a milésima quinquagésima vigésima segunda (1522^a) figura?

As:- Mil quinhentos e vinte e dois (enquanto a professora apontava a linha horizontal e anotava em seguida) e mil quinhentos e vinte e um (enquanto a professora apontava a vertical e anotava também).

E dirigiu-se a uma aluna:

P :- Diga como você faz essa forma de contar.

A6: - Em baixo eu repito (o número da figura) e em cima é um a menos.

Em seguida pediu que uma aluna lhe falasse sobre a *representação formal* resultante do processo anterior.

P:- Diga pra mim como fica a fórmula.

A6: - “N” mais “n” menos um (n + n – 1.)

Outro aluno complementou, finalizando com um *tratamento* algébrico.

A7: - Dois “n” menos um (2 n – 1), professora.

A professora perguntou:

P:- Esse jeito de contar ficou mais fácil que o anterior?

A6:- Não.

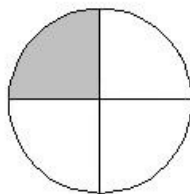
A aluna pareceu, mesmo respondendo todas as interpelações da professora, não encontrar sentido para as escritas algébricas. A professora prosseguiu:

P:- Que bom que dá pra fazer de forma diferente. Cada um pensa de um jeito e a gente chega no mesmo lugar.

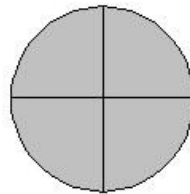
Em uma outra aula, para completar a seqüência de números racionais, 1/4, 1, 7/4,....., a professora apelou para um *recurso representacional*, um desenho para ajudar os alunos a preencherem a seqüência com os termos que faltavam.

As: - *Ihhh professora esse é difícil...Esse a gente não fez...*

P: - *Então vamos desenhar.*



pintou $1/4$

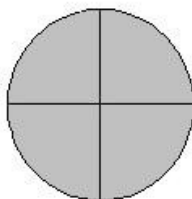


pintou $4/4$

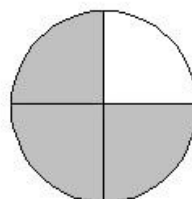
Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

P: - *Como vou desenhar $7/4$?*

A4: - *Pinta aquele inteiro e mais um de $3/4$.*



pintou $4/4$



pintou $3/4$

Reprodução pela pesquisadora do desenho feito pela professora

O uso do desenho suscitou uma questão exposta por uma aluna.

Cam:- *Não fica sete oitavos se juntar?*

A2: - *Sete oitavos é em oito partes.*

P: - *Isto é sete oitavos (e desenhou um círculo no quadro, divide em 8 partes, pinta 7 e pergunta se seria a mesma quantidade).*

A aluna insiste.

Cam: - *Mas se junta não dá?*

Para tornar a explicação mais clara para a aluna, a professora apelou a outro recurso representacional e explicou:

P:- *Pense numa pizza. Se eu juntar (e bate com o giz sobre as partes de quartos dos dois círculos) vou comer a mesma coisa ou mais?*

Cam:- *Mais.*

P: - *Qual a diferença?*

Cam: - *O número de partes.*

Ela retornou ao recurso representacional anterior, dividiu um dos círculos de quatro partes, em oito partes e perguntou:

P:- A pizza é dividida em 8 partes, as partes são maiores ou menores do que se eu dividir em 4?

A professora percebeu que a dificuldade estava no *tratamento* do algarismo 1 em sua representação fracionária, no caso como $\frac{4}{4}$ e perguntou:

P: - O que complicou foi o um (referindo-se ao termo da seqüência), não foi?

Cam: - Foi...

A professora revelou sensibilidade ao identificar o cerne da dificuldade. O desenho evidenciou uma incompatibilidade entre as partes representadas e sua quantificação numérica. A representação em forma de desenho remeteu à memória da aluna provavelmente “... de tantas partes... pinte tantas... tenho...” possivelmente reminiscências da aprendizagem de frações de séries anteriores. Ela não “enxergava cognitivamente” que o todo referência se dividia em quartos e não em oitavos. A professora mudou o sistema de representação.

P:- Poderíamos ter trocado o um por outra representação?

Lui: - Por quatro quartos.

Lui respondeu prontamente revelando uma compreensão imediata deste *tratamento*. A professora prosseguiu:

P: - Se estivesse assim (e escreve $\frac{4}{4}$ no lugar do 1 na seqüência) perde a graça pois vocês saberiam que o próximo termo da seqüência é dez quartos. Sta, você lembra do número misto quando põe um número inteiro e mais uma fração, por exemplo, (e escreve no quadro) $1\frac{1}{2}$ de açúcar, $2\frac{3}{4}$ copos de leite? Então como posso escrever dez quartos?

A professora propôs outro *tratamento* para Sta e ela respondeu:

Sta: - Sei lá...

Lui: - Dois inteiros e dois quartos.

A professora pareceu desanimar e dirigindo-se a turma falou:

P: - A quinta e a sexta série não estão tão longe assim e falamos nisso o ano passado não? O próximo número é ...

Lui: - Dezesseis quartos.

A professora completou a seqüência no quadro.

P: - Podemos trocar dezesseis quartos por...

Cam: Quatro inteiros.

P: - Por que falamos pizza?

And: - Porque é mais fácil de pensar.

Esse exercício, em que se solicitou o *tratamento numérico* para números racionais, mostra como é difícil para alguns alunos operar e representar equivalências no conjunto dos racionais, apesar do trabalho escolar anterior e do uso pela professora de um *recurso representacional*, a pizza, que fazia sentido aos alunos. A Cam, que não havia entendido a *conversão* entre a figura e a quantificação numérica, no entanto, fez o tratamento entre $16/4$ e 4.

4. Considerações Finais

Nestes dois fragmentos de aulas observou-se constantemente a tentativa de a professora produzir situações que conduzissem os alunos a uma melhor compreensão da representação a ser construída.

O fato de a professora levar os alunos a observarem o que variava e o que era constante nas situações apresentadas, foram condições necessárias para que pudessem escrever uma generalização. A professora usou essa estratégia por meio de *recursos representacionais* como diagramas e desenhos possibilitando aos alunos acessarem o conhecimento em questão com diferentes maneiras de representar a mesma situação. Os diagramas constituíram um auxílio representacional visual importante que permitiu à professora estabelecer relações que favorecessem a escrita da fórmula.

Por outro lado o *recurso representacional* do desenho sobre frações possibilitou identificar, na fala de uma aluna, uma incompreensão da relação todo/parte que a professora ajudou retomando o conteúdo visto em séries anteriores.

A dificuldade em lidar com o conjunto dos racionais, principalmente com suas operações foi marcante na segunda aula.

Uma característica da professora observada nas aulas e ao longo do desenrolar das demais, era que ela procurava, sempre que possível, um contra-exemplo para que os alunos se inteirassem de seu equívoco. Em seguida sempre apelava a *recursos representacionais* ou mesmo *representações formais* conhecidas para levá-los a pensar novamente sobre o assunto.

Na observação de todas as aulas sobre funções houve uma tendência marcante em a professora minimizar os casos de não congruência entre registros ou utilizando diferentes *recursos representacionais* ou estabelecendo uma relação de código entre as unidades significantes entre conversão de registros.

5.Referências

BASSOI, T.S. **Uma Professora, seus Alunos e as Representações do Objeto Matemático Funções em Aulas do Ensino Fundamental.** Tese (Doutorado em Educação) -Faculdade de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo:Educ. p.135-153, 1999.

DUVAL,R. Quais as teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino de matemática?In:**Práxis Educativa.**Ponta Grossa: Editora UEPG. v.7,n.2, 2012, p.305-330.

ISOLANI, C. M. M.; MIRANDA, D. T. L.; ANZZOLIN, V. L. A.; MELÃO, W. S. **Matemática 8^a série do Ensino Fundamental:** Manual do Professor, Curitiba:Módulo, 2002.