Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

# POR QUE MENOS VEZES MENOS DÁ MAIS?

*Ana Regina Zubiolo*

*Professora da Rede Estadual de Ensino, SEED/PR.*

*zubieng@hotmail.com*

*André Luis Trevisan*

*Professor da UTFPR – câmpus Londrina*

*andrelt@utfpr.edu.br*

**Resumo:**
Neste texto apresentamos alguns obstáculos relacionados à aprendizagem dos números inteiros, em especial no que diz respeito à operação de multiplicação. Em seguida, destacamos a importância da história da construção do conceito de número inteiro, do entendimento da interdependência da Matemática e de suas aplicações e do pensar as relações matemáticas. Tal estudo subsidiou uma proposta de trabalho desenvolvida num 7º ano de uma escola pública, na qual fizemos uso de um método geométrico com vistas a proporcionar aos estudantes um melhor entendimento da multiplicação com números inteiros e possibilitar que atribuíssem algum significado ao “menos com menos dá mais”.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Multiplicação com números inteiros; Anos finais da Educação Básica.

## 1. Introdução

Ao folhearmos os livros didáticos de Matemática, em geral encontramos os conteúdos organizados em uma estrutura que em pouco (ou em nada) revela o contexto ou o modo como tais conceitos foram desenvolvidos. Em geral, essa apresentação “didática” não possibilita ao estudante (e mesmo ao professor) compreender que aquele conhecimento muitas vezes foi sistematizado ao longo de vários séculos. Pior, muitas vezes os próprios professores, sem clareza dessa situação, acabam por “inculcar” nos estudantes a ideia que os conceitos são objetos “prontos e acabados”, que não precisam se preocupar com e como aqueles conteúdos foram construídos, mas apenas prestar atenção e memorizá-los.

Nossa vivência em sala de aula mostra que tal situação frequentemente acontece quando tratamos dos números negativos, principalmente no que tange à operação de multiplicação. Imaginar aquele conteúdo pronto, sem atentar-se à sua constituição histórica pode gerar desconforto para o professor, que muitas vezes vê suas “justificativas” serem pouco convincentes para as indagações dos estudantes. Enquanto isso, muitos desses estudantes acabam por “arrastar” essa situação mal resolvida pelos anos escolares seguintes, fazendo o uso correto da regra de sinais da multiplicação, porém sem uma compreensão necessária para que possam utilizá-la em outras relações matemáticas.

O conceito de número negativo que hoje é tratado “naturalmente” não foi aceito tão facilmente ao longo dos séculos. Grandes matemáticos por mais de 1500 anos contribuíram exaustivamente para a construção desse conhecimento. E neste longo caminho, obstáculos e dificuldades surgiram. Dificuldades que ainda hoje perturbam estudantes (e mesmo professores) desde a Educação Básica até o Ensino Superior.

Neste texto relatamos o estudo que subsidiou uma proposta de trabalho desenvolvida com um 7º ano de uma escola pública, numa busca de oportunizar aos estudantes atribuir significado ao fato de que, numa multiplicação com números inteiros, “menos com menos dá mais”. A experiência foi desenvolvida por meio de uma oficina na qual fizemos uso de um método geométrico na busca de proporcionar um melhor entendimento dessa operação.

## 2. Da construção do conceito de número: alguns obstáculos enfrentados

Em seu artigo *Epistemologia dos números relativos*, Silva (2000) lista seis obstáculos enfrentados por matemáticos que se dedicaram ao estudo dos números relativos ao longo do tempo (como por exemplo, Diofanto, Stevin, Descartes, Euler, D’Alembert, Carnot, Laplace e Cauchy). São eles: (i) inaptidão para manipular quantidades isoladas; (ii) dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas; (iii) dificuldade em unificar a reta numérica; (iv) dificuldade em associar o zero absoluto com o zero origem de um eixo orientado (ambigüidade dos dois zeros); (v) estagnação no estágio das operações concretas e (vi) busca por um modelo unificador que funcionasse tanto em modelos aditivos quanto em multiplicativos.

Neto (1995) lembra-nos que, para Carnot, a quantidade negativa isolada só poderia ser obtida se uma quantidade efetiva fosse retirada de zero, porém tirar algo de nada seria uma operação impossível, o que leva então ao questionamento “como então aceitar uma quantidade negativa isolada?”.

Aponta que, pensar o número negativo como algo menor que zero, tornou-se realmente problemático, pois se associarmos o número a certa quantidade, o zero passa a ser a ausência de quantidade ou simplesmente nada, e como compreender algo menor que nada? Tal concepção de número predominou até certo período do século XIX: o número sendo entendido como “coisa”, como grandeza, como objeto dotado de substância.

Em seu estudo acerca das concepções de futuros professores de Matemática a respeito da multiplicação de números inteiros, Angelo (2007, p. 4) aponta que os participantes estabeleceram uma correlação entre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes para compreender as regras das operações com números inteiros e as dificuldades sentidas por matemáticos e citadas por William Frend (1757-1841) em seu livro *Princípios de Álgebra*:

> um número se presta a ser subtraído de um número maior que ele mesmo, mas tentar subtraí-lo de um número menor do que ele mesmo é ridículo. Mas isto é tentado por algebristas que falam de um número menor do que nada: de multiplicar um número negativo por outro negativo e assim produzir um número positivo.

Em Lins (2004) encontramos uma situação ocorrida entre Arnaud e Leibnitz, na qual o primeiro coloca seu inconformismo aos números negativos tratando-os como “absurdos”, porque não seria possível ter que o menor esteja para o maior assim como o maior para o menor. Leibnitz concorda que o fato é uma situação estranha, mas diz que não vai se deter por isto, pois aquelas coisas funcionam.

Apesar de matemáticos admitirem que situações estranhas envolvendo os números negativos “funcionassem”, Silva (2000) aponta que persistiu o fato de evitá-los, já que na prática ainda pouca utilidade tinham esses números na vida cotidiana. Esse comportamento é bastante usual entre estudantes do 7º ano que, ao se depararem com os números negativos, não percebem utilidade para aquele conceito.

Hankel concebia os números não como descobertos e sim como inventados, imaginados. Então procurar todas as explicações lógicas na natureza, ou no mundo real, impediria adquirir maturidade nos conceitos matemáticos, que a princípio são definidos para um mundo real. Deste modo, Hankel abandonaria o ponto de vista “real” fundamentado em exemplos práticos e partiria para o “formal”.

Ficar preso a modelos como o comercial (dívidas e bens) e o geométrico (produto equivalente a área) permitiram a ocorrência de falhas que provocaram certa desorientação no raciocínio de grandes matemáticos. Hankel revolucionou ao não buscar um bom modelo. Porém cabe ressaltar que Hankel conseguiu ultrapassar alguns obstáculos dos números relativos e atingiu o máximo da compreensão a respeito desses números ao buscar definir uma teoria para os números complexos. Em algumas de suas demonstrações em trabalhos com números complexos é que conseguiu desvendar as dúvidas que pairavam sobre os números relativos. Colocando de forma de dito popular, Hankel "atirou no que viu e acertou o que não viu".

Para Caraça (1970) todo trabalho intelectual da humanidade é baseado por certas normas e princípios a fim de escolher novas definições de um modo conveniente. O princípio da extensão, também conhecido na Matemática como princípio de Hankel, procura adequar definições anteriores, consumindo a mínima quantidade de energia mental, alcançando o caminho mais rápido e curto.

Desta feita, o princípio da extensão mostra a propensão do homem a adquirir, a completar, "a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas conseqüências" (CARAÇA, 1970, p. 10)

Assim, o século XIX marca um grande passo histórico ao conceber que os conceitos matemáticos não representam mais coisas e sim relações entre coisas. Afinal, em seu sentido mais geral, a Matemática "é a ciência das relações na qual se abstrai de todos os conteúdos as relações" (GAUSS, 1809, apud NETO, 1995, p. 3).

## 3. Afinal, menos com menos dá...?

Tenho[1] trabalhado a maior parte dos meus 16 anos de minha carreira como professora de 6º e 7º anos. Com o 7º ano sempre me chama muita atenção o fato de parecer haver entendimento, por parte dos estudantes, quando tratamos dos números positivos e negativos na adição algébrica. Porém, ao apresentamos na sequência as operações de multiplicação e divisão, tudo parece não ser mais inteligível e, o que é pior, tenho a impressão de que aqueles conceitos que eu imaginava terem sido compreendidos de fato não estavam.

Alguns acabam por "aceitar" pela fala do professor que, no caso da multiplicação de inteiros, "menos vezes menos dá mais". Para outros porém, essa "regra" mostra-se

[1] Falo aqui, e em outros momentos do texto em que utilizo primeira pessoa do singular, enquanto primeira autora deste texto.

incompreensível e mesmo inaceitável. O que mais causa estranhamento e desconfiança é o fato de obtermos um resultado positivo quando multiplicamos dois valores negativos. A pergunta "por que menos vezes menos dá mais?" repete-se ano a ano. Confesso que essa pergunta acompanha-me desde o tempo que cursei meu 7º ano, e por anos (mesmo depois da universidade) convivi com a expectativa de "descobrir" por que as coisas eram assim.

A compreensão das regras de sinais na multiplicação parece ser um dos importantes problemas didáticos da Matemática no 7º ano. Tudo começa quando o professor tenta convencer os estudantes que é possível efetuar 5 – 7. Situação essa que até então era tida como impossível; afinal como posso tirar 7 unidades de 5 unidades? Alguns arriscam responder que o resultado é 2, pois encontram-se condicionados a subtrair o maior valor do menor. Outros estranham que agora seja possível "inverter" colocando o menor valor primeiro. Mesmo assim, isso parece ter certa "aceitação" quando são usados exemplos de perdas e ganhos, dívidas e bens, temperaturas abaixo de zero e acima de zero, todos representando os números negativos e os positivos.

Esse estranhamento inicial é justificável, pois, embora nessa faixa etária os estudantes em geral vivenciam situações envolvendo perdas de figurinhas, gasto de dinheiro, cálculo de troco a partir de um valor maior que o gasto, não há necessariamente a necessidade de representar valores negativos. Até então, realizar a subtração parecia para eles não ser algo complicado.

No entanto, ao apresentarmos os números inteiros, o sinal "de menos" até então usado em subtrações para a não mais significar apenas retirar algo substancial de outro também substancial. E então, dependendo da forma como o professor encaminha este novo conceito, percebem que quando os valores possuem o mesmo sinal a conta é de "mais" e quando possuem sinais diferentes a conta é de "menos". No primeiro caso, conta de "mais", se os valores representam perdas, na resposta permanece o sinal da perda, que é negativo. Já no segundo caso, conta de "menos", onde há perdas e ganhos, a resposta adota o sinal de quem é maior. Todo esse esforço para justificar a convenção estabelecida quando tratamos os números relativos parece atender seu objetivo, até o momento em que aparece explícito na operação o sinal da soma ou subtração, como nos exemplos a seguir: $(+5)+(-7)$ ou $(-2)-(-5)$.

Tudo que parecia estar construído cai por terra. Ao saberem qual a resposta de cada um dos exemplos acima surgem indignações (justificadas), como por exemplo: (i) *mas a conta não é de somar? Então tem que juntar o cinco com o sete e o sinal é negativo porque* *o sete é maior* ou (ii) *a conta não é de menos? Então tira dois de cinco e o sinal é negativo, por que os dois valores são negativos*.

Pensar a respeito dessas indignações hoje não me causa mais estranhamento. Afinal, historicamente percebemos que essa construção passou por vários obstáculos, que persistem ainda hoje em nossas salas de aula. Entretanto, o modo como esses conceitos são apresentados nos livros didáticos dão a impressão que tais situações foram facilmente compreendidas e aceitas, ocultando, evitando ou dissimulando todo o trabalho de construção e aceitação daquele conteúdo, bem como o grande número de ideias matemáticas que geraram. Ter consciência de tais fatos é de suma importância tanto para o professor quanto para o próprio estudante.

Na sequência, “chegamos” nas aulas envolvendo a multiplicação de números inteiros, abandonando o “velho e bom” modelo de perdas e ganhos, até então usado para justificar as adições e subtrações com números inteiros, e “impondo” nova regras. Parece um jogo em que o professor está brincando com os estudantes. Uma hora aquilo vale, agora são os mesmos números só que para esse caso não vale mais. Lembra muito as brincadeiras de crianças que numa adversidade alguém tenta mudar a regra no meio do jogo. Lembro-me muito bem que, enquanto aluna, era isso que eu pensava: achava que o professor estava querendo me enganar. Quando questionava o porquê, via nas justificativas apresentadas por meus professores nada além de uma maneira diferente de dizer o que já estava dito. No meu interior pensava que esse professor estava fazendo “chuncho”[2].

Encontramos em Courant e Robbins (1941) que as regras de sinais não podem ser provadas. Vários séculos passaram-se até que

> os matemáticos percebessem que a regra de sinais, conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações não podem ser provadas. Elas são criadas por nós para nos darem liberdade operatória, pelo fato de preservaram as propriedades fundamentais da Aritmética. O que pode - e deve - ser provado é, unicamente com base nestas definições, que as propriedades comutativa, associativa e distributiva são preservadas (COURANT E ROBBINS, 1941, apud POMMER 2010, p. 4).

É importante que o estudante conheça essa situação, afinal a regra de sinais não pode ser tratada como simplesmente a invenção de regras arbitrárias de um jogo. Mas como regras que surgiram preservando a coerência nos princípios da Matemática. Com esse tratamento, as variadas justificativas apresentadas nos livros didáticos passam a ter

[2] Ouvido mais comumente no Norte do Paraná, significa falsificação, cambalacho, armação.

uma razão de ser, por mais estranhas que pareçam.

## 4. Uma experiência

Percebendo o não entendimento da regra de sinais na multiplicação de números inteiros, organizei uma proposta de trabalho extra-classe, desenvolvida no mês de junho do ano de 2011, na qual busquei abordar tal "regra" de uma forma diferente daquela usualmente apresentadas em livros didáticos. Todos os 34 estudantes de uma das minhas turmas de 7º ano de uma escola pública da cidade de Rolândia/PR, foram convidados a vir em um sábado por um período de duas horas para trabalharem com a multiplicação de números inteiros de maneira diferenciada daquela apresentada em aulas. Justificamos a opção como uma atividade extra-classe uma vez que essa operação já havia sido apresentada nas aulas regulares em meados do mês de março daquele ano, embora persistissem ainda as indagações a respeito dos "porquês".

A abordagem escolhida foi a construção geométrica das operações com segmentos, como tratada pelo matemático David Hilbert (1862-1943). O modo como Hilbert descreve a construção geométrica do produto é descrita abaixo:

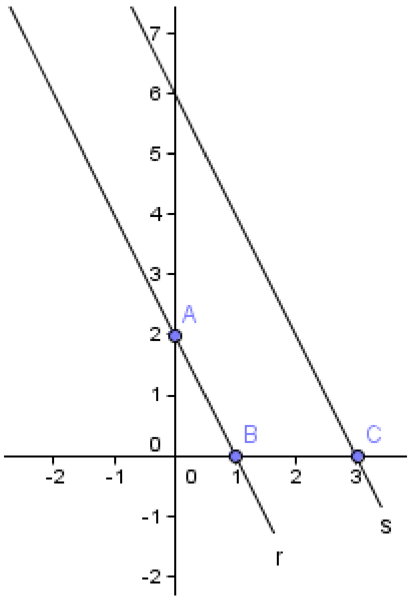
> para definir geometricamente o produto de um segmento *a* por outro *b*, servimo-nos da seguinte construção: escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que segue, e designemo-lo por 1. Desloquemos para um dos lados dum ângulo recto e a partir do vértice O, o segmento 1 e, além disso também a partir de O, o segmento *b;* em seguida deslocamos para o outro lado o segmento *a.* Unamos as extremidades dos segmentos 1 e *a* por uma recta e conduzamos uma paralela a esta recta pela extremidade do segmento *b;* esta determinará um segmento *c* no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento *c* o produto do segmento *a* pelo segmento *b* e designamo-lo por: c = ab (Hilbert, 2003 apud CYRINO; PASQUINI, 2009, p. 18)

No dia previamente combinado compareceram seis estudantes. Iniciei os trabalhos falando a respeito de retas paralelas e de como traçá-las usando dois esquadros. Trouxe para cada estudante um jogo de esquadros e folhas de papel quadriculado. Cada um fez em sua folha várias retas paralelas e, a medida que o trabalho avançava, as construções foram ficando cada vez mais apuradas.

Na sequência falei um pouco a respeito da construção dos saberes matemáticos e do fato do modelo de dívida e bens usados na adição não serem apropriados quando usados na multiplicação de números inteiros.

O próximo passo foi a construção geométrica proposta por Hilbert para a multiplicação. Inicialmente foi proposto trabalhar apenas com valores positivos e foi constatado por eles que o resultado correspondia corretamente ao valor procurado. Novos valores foram testados e todos conduziam a respostas corretas. Na Figura 1 apresentamos um exemplo que ilustra essa primeira situação. No caso, para representar a multiplicação $(+2)\cdot(+3)$, inicialmente marcamos sobre o eixo $OX$ o ponto $A(2,0)$, representando o número $+2$, e sobre o eixo $OY$ o ponto $B(1,0)$ representando a unidade e traçamos uma reta $r$ por esses pontos. Em seguida, marcamos sobre o eixo $OX$ o ponto $C(3,0)$ representando o número $+3$, e traçamos uma reta $s$ passando por ele, paralela a $r$. O ponto de intersecção da reta $s$ com o eixo $OY$ é o produto procurado (no caso, $+6$).

Figura 1: Construção geométrica do produto $(+2)\cdot(+3)$.

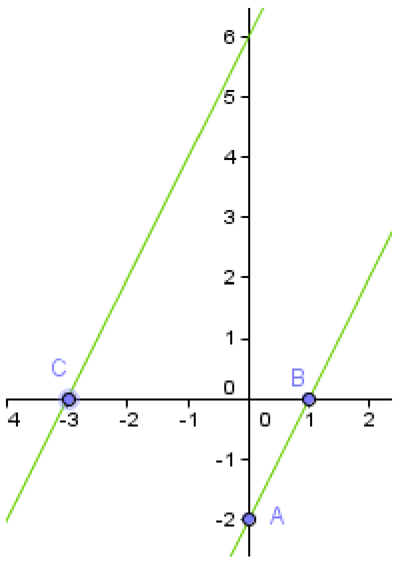



Fonte: dos autores.

Passamos então a usar um valor de segmento positivo e outro negativo. Lembrando que a convenção de valores à esquerda e abaixo da origem seriam os negativos. Desta forma também os resultados correspondiam ao valor procurado. Considerando que o método era válido, partimos para trabalhar apenas com valores negativos e neste caso sempre conduzia a resultados positivos (na Figura 2 ilustramos a construção gométrica do produto $(-2)\cdot(-3)$). Tal justificativa pareceu mais convincente já que se utilizou sempre da mesma construção, independente dos valores serem positivos ou negativos.

Nas aulas regulares quando tratávamos de multiplicação com inteiros percebi alguns dos estudantes que estiveram presentes àquele encontro responderem com mais convicção os produtos das multiplicações propostas. Um deles, em particular, utilizava os dedos e fazia o desenho no ar para verificar se o sinal do produto seria negativo ou positivo.

Figura 2: Construção geométrica do produto $(-2)\cdot(-3)$.




Fonte: dos autores.

## 5. Considerações finais

Ficar preso a modelos do cotidiano, do mundo real, do concreto e outros semelhantes podem trazer obstáculos à compreensão de alguns conceitos matemáticos, como vimos recorrendo à história dos números negativos. O mesmo ocorre no ambiente escolar, quando muitas vezes insistimos em buscar situações apenas do cotidiano do estudante e alguma aplicabilidade imediata da Matemática, fazendo que o estudante tenha pouca oportunidade de tratar conceitos mais abstratos.

Entendemos que trabalhar com os números negativos implica entender o número enquanto uma relação, que vai além de uma simples resposta a questões sobre grandezas do tipo: *quanto mede?* ou *quantos são?*. Nesse sentido, o trabalho do professor de Matemática deve ser norteado para instigar os estudantes a pensarem em relações, ajudá-los a superar obstáculos do pensamento para além de questões do tipo *para que serve?* ou *onde uso?* e ensiná-los a trabalhar corretamente a relação entre a Matemática e suas aplicações. Acreditamos ser esta uma possível forma para se transpor a barreira do "menos vezes menos dá mais".

## 6. Agradecimentos

Agradecemos à Fundação Araucária pelo apoio à apresentação deste trabalho.

## 7. Referências

ANGELO, C. L. Concepções de futuros professores sobre a multiplicação de números inteiros. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiência/Trabalhos/RE84996560991T.doc>. Acesso em 19 jul. 2010.

CYRINO, M.C.C.T.; PASQUINI R.C.G. **Multiplicação e divisão de números inteiros:** uma proposta para formação de professores de Matemática. Coleção História da Matemática para Professores. Belém: SBHMat, 2009.

LINS, R.C. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M.V.; BORBA, M.C. **Educação Matemática:** Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

NETO, F.R. **Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais"**. Disponível em:<http://.ufpe.br/filosofia/arquivos/10%20Duas%20ou%20tres%20coisas%20sobre%20o%20menos%20vezes%20menos%20da%20mais.pdf>. Acesso em 20 jul. 2010.

POMMER, W.M. **Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z**. Disponível em:<http://www.nilsonjosemachado.net/sema2010316.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2010.

SILVA, D.P. **Epistemologia dos números relativos**. Disponível em: <http://matematizando.no.sapo.pt/Curiosidades/Epistemologia%20dos%20numeros%20relativos2.htm>. Acesso em 20 jul. 2010.