TRANSFORMAÇÕES NO PLANO: SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS BASEADAS NO ESTUDO DAS OBRAS DE M. C. ESCHER.

Alexia Castro da Silva[1]
Universidade de Brasília
alexiacastro_s@hotmail.com

Resumo:
Este artigo apresenta duas sequências didáticas com o objetivo de desenvolver conhecimentos relacionados às transformações no plano (isometrias e homotetias), além de desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico do aluno. São usadas as metodologias de modelagem matemática e de resolução de problemas para a estruturação dessas sequências. Essas sequências foram desenvolvidas no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID – do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (MAT⁄UnB) para aplicação com os alunos de escolas públicas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio participantes do programa.

Palavras-chave: transformações no plano; simetria; sequência didática; modelagem matemática; resolução de problemas.

1. Introdução

Neste artigo, são apresentadas duas sequências didáticas com atividades que visam auxiliar o desenvolvimento de conceitos básicos sobre as transformações no plano – isometrias e homotetias. O objetivo central da primeira sequência é levar o aluno a aplicar seus conhecimentos sobre isometrias para entender e construir recobrimentos como os de M. C. Escher. O objetivo da segunda sequência é, ainda trabalhando com obras deste artista, levar o aluno a relacionar o uso de isometrias e homotetias em uma mesma obra e em um mesmo elemento da natureza.

Estas sequências foram planejadas com base nas metodologias de resolução de problemas e de modelagem matemática, de forma a conduzir o aluno no caminho da construção dos conceitos, estimulando o seu raciocínio e sua criatividade.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (MAT/UnB)[2].

[1] A autora foi bolsista do programa PIBID/CAPES durante a elaboração deste trabalho.

2. Fundamentação teórica

As dificuldades que têm sido enfrentadas pelos professores de matemática em sala de aula estão em grande parte ligadas ao fato de que o conhecimento apresentado não tem real significado para o aluno. Isso acontece porque, na maioria das vezes, o conteúdo não é vinculado a áreas de interesse e da realidade do educando e, além disso, esse aprendizado se torna mecânico, já que o aluno aprende um algoritmo para solução dos exercícios propostos sem ter que desenvolver suas próprias soluções. Sendo assim, e com frequência, a Matemática é considerada uma ciência desligada do mundo real dos alunos (ABDELNUR, 1994).

As metodologias de Modelagem Matemática e de Resolução de Problemas podem contribuir significativamente para acabar com essas dificuldades, já que elas incentivam a criatividade e a participação do aluno no seu aprendizado, fazendo com que a matemática deixe de ser algo desvinculado de sua realidade.

A Modelagem Matemática "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2004, p. 16). Nesse contexto, a Modelagem Matemática torna-se um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas (BARBOSA, 2001), como, por exemplo, as artes ou a natureza.

Já a resolução de problemas, segundo Pozo (1998), baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas. Consiste na realização de várias ações ou operações para se obter o resultado, que deve ser construído. Dessa forma, o aluno deixa de ser apenas receptor para se tornar o construtor do conhecimento, sendo o professor apenas um mediador desse processo.

Uma possibilidade para tornar a Matemática mais significativa é utilizar essas duas metodologias em conjunto para levar o aluno a enfrentar a aprendizagem como um problema real, para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Além disso, fazem parte das competências em matemática previstas pelo Parâmetros Curriculares Nacionais (2002): as relações entre conhecimentos disciplinares,

[2] Este trabalho foi orientado pelo prof. Guy Grebot.

interdisciplinares e interáreas, fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada e compreender o mundo, do qual a matemática é parte integrante, que pode ser descrito por meio de modelos e representações.

As sequências didáticas apresentadas neste artigo usam essas metodologias para propiciar a construção dos conceitos de transformações no plano através da análise de obras de arte e elementos da natureza, apresentados como aspectos motivadores para o aprendizado. O fato de dar espaço para criações do aluno também é bastante importante nesse contexto para desenvolvimento de sua criatividade. Além disso, a articulação de diferentes conhecimentos, isometrias e homotetias, ajuda o aluno a assimilar de fato cada um desses conceitos.

3. A sequência e sua elaboração

As duas sequências didáticas (cadernos) têm como motivação principal algumas obras de M. C. Escher tendo em vista que elas foram construídas por meio da utilização de isometrias e homotetias. Nosso objetivo foi, a partir delas, desenvolver esses conceitos com os alunos, fazendo com que, ao final das sequências, eles pudessem construir seus próprios mosaicos e aplicar seus conhecimentos na construção de modelos de conchas de caramujo.

Os cadernos apresentados foram construídos com base em um estudo preliminar sobre os conceitos matemáticos envolvidos e sobre as metodologias desenvolvidas em sua construção. Essa etapa é uma etapa-padrão para o desenvolvimento de sequências didáticas no âmbito do programa PIBID/MAT/UnB.

Temos, na elaboração das duas sequências, uma ordem lógica de atividades para o desenvolvimento das habilidades e para a construção dos conhecimentos propostos. No primeiro caderno, desenvolvemos os conceitos de isometrias a partir da construção de diferentes recobrimentos do plano, além de trabalhar com polígonos e os tipos de recobrimento que eles permitem. No segundo, trabalhamos o conceito de homotetia utilizando a necessidade que temos de ampliar certos objetos, além de trabalhar com a razão entre os tamanhos, as áreas e a semelhança entre as figuras. Nesta última sequência, tentamos também trabalhar e relacionar esses diferentes conceitos de transformações no plano em obras do mesmo artista e em um mesmo elemento da natureza.

4. Considerações Finais

As sequências apresentadas nesse artigo são apenas exemplos de como a Matemática pode ser interessante para o aluno e como podemos desenvolver certas habilidades com esse estudo, como a criatividade, o raciocínio e a capacidade de se expressar matematicamente, ao mesmo passo que construímos conceitos matemáticos relevantes para o dia-a-dia do aluno. No caso, ao estudar as transformações no plano, conseguimos modelar certas obras de arte e elementos da natureza, dando espaço para o aluno entender esses conceitos, discuti-los e descrever o que estava sendo aprendido. Além disso, o aluno pôde construir seus próprios mosaicos e conchas como o deseja, desenvolvendo sua criatividade.

5. Referências

ABDELNUR, M. 1994. Formação de professores: o poder, a matemática e a interdisciplinaridade. Rio Claro, SP. Dissertação de mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 172 p.

BRASIL. MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica: Brasília (DF), 2002.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001, 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2001.

BASSANEZZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2004.

POZO, Juan Ignácio. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed Editora, 1998.

6. Anexos

ANEXO 1: SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

Recobrimentos do plano

Um recobrimento do plano é o preenchimento de toda a superfície do plano com peças sem espaços vazios e nem superposições entre elas. Esses recobrimentos são vistos em todo o mundo desde aqueles famosos que embelezam palácios islâmicos até os que preenchem os pisos de nossas casas.

Inspirado pelas obras que viu em Alhambra, na Espanha 1 , M. C. Escher (1898-1972), um artista gráfico holandês, desenvolveu vários desses recobrimentos usando formas de animais ou pessoas.

1. Material: Peças dos polígonos regulares (até o heptágono) e de paralelogramos.

Observação: Restringiremos esse estudo aos recobrimentos do plano lado-lado, ou seja, uma aresta do recobrimento é lado de exatamente dois polígonos adjacentes.

a) Analise como um paralelogramo pode recobrir o plano. Desenhe como se dá esse recobrimento.

b) Quais são os polígonos regulares que recobrem o plano? Assim como na questão anterior, desenhe como essa peça recobre o plano.

c) Qual é a regularidade presente nos nós (vértices dos polígonos) desses recobrimentos?

d) Levando em conta as observações anteriores, quais são os critérios necessários para que um polígono recubra o plano?

2. Material: Recobrimentos da atividade 1.

a) Para cada um dos recobrimentos da atividade anterior, cite quais foram as transformações geométricas feitas na peça para obter o recobrimento desejado.

b) Quais dessas transformações ou compostas delas fornecem a mesma imagem?

3. Material: Desenho do recobrimento feito com paralelogramos na atividade 1, papel vegetal.

a) Desenhe o paralelogramo que origina o recobrimento em uma folha e o modifique através de um corte na peça ou adição de uma figura.

b) Aplique as transformações necessárias para originar o recobrimento nessa nova peça, obtendo assim um novo recobrimento.

c) Qual é o formato da peça que agora recobre o plano? De que forma eu a obtenho a partir do paralelogramo original?

d) Quais são os critérios para mudar a peça de forma que ela continue recobrindo o plano da mesma forma que o paralelogramo?

Recobrimentos de Escher

O trabalho de Escher, que é admirado em todo o mundo por sua genialidade, tem como base apenas esses simples recobrimentos que acabamos de estudar. Tomando um desses polígonos que recobrem o plano, Escher cortava uma ou várias partes do polígono original para situá-las em posições diferentes dessa peça mediante as transformações do recobrimento formado com esse polígono.

4. Material: Cópias das figuras 1 e 2, papel vegetal, régua e compasso.

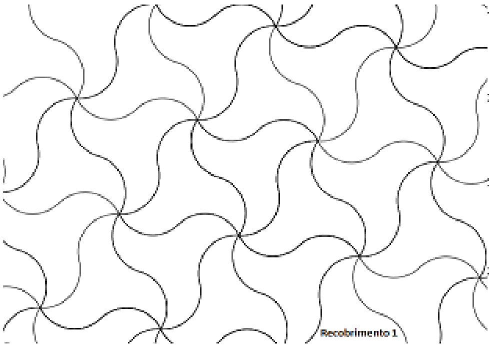

Figura 1

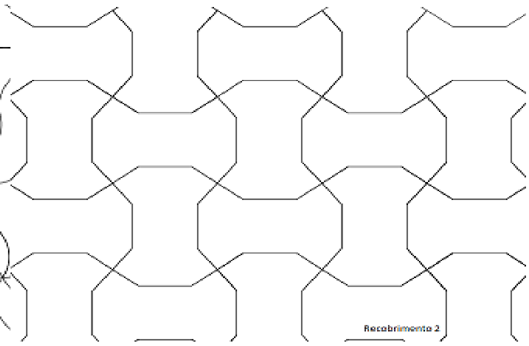

Figura 2

Vamos analisar como foram encontrados esses motivos dos recobrimentos.

a) Em primeiro lugar, quais são os polígonos regulares que deram forma a esses motivos?
b) Por quê?
c) Sabendo que os vértices do polígono original devem ser mantidos, e utilizando o papel vegetal sobre os recobrimentos, desenhe esse polígono.
d) Agora descreva qual foi o processo usado para a obtenção desses dois motivos a partir dos polígonos regulares.

5. Material: Folha A3, tesoura, régua, compasso e lápis de cor.

Agora é sua vez de montar seu próprio mosaico, use sua criatividade.

a) Escolha um dos polígonos que recobrem o plano para usar como base do seu motivo e o desenhe em uma folha de papel.
b) Como os vértices do polígono devem ser mantidos, recorte uma parte de um dos lados do seu polígono. O que poderia acontecer se você recortasse dois lados de formas distintas?
c) Aplique as transformações do recobrimento formado por este polígono na peça cortada para obter o mosaico. Você consegue obter um recobrimento usando qualquer uma dessas transformações?
d) Qual é o motivo do seu mosaico? Como você o obtém a partir do polígono escolhido no começo da atividade?
e) Qual é a relação entre a área do motivo que você formou com a área do polígono que você escolheu?
f) Esse motivo mantém as mesmas simetrias do polígono original?
g) Agora desenhe esse recobrimento na folha A3 e pinte as peças como quiser. Esse é o seu mosaico.

ANEXO 2: SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

Transformações no plano

M. C. Escher (1898 - 1972) foi um artista gráfico holandês que se destacou por usar diversos conceitos matemáticos para construção de obras de arte complexas. Ele não era um matemático, tampouco um grande entendedor dessa ciência, mas, pela manipulação de imagens, foi capaz de criar essas obras.

Por exemplo, analisando-se a figura seguinte, podemos perceber que há conceitos matemáticos envolvidos na sua concepção.

Figura 1

1. Material: Cópias da Figura 1.

a) Analisando a figura 1, o que podemos dizer sobre as imagens que formam a obra?
b) Quais são as transformações geométricas que relacionam essas figuras?
c) Como caracterizar essas transformações?

Essas transformações do plano, as isometrias e as homotetias, aparecem relacionadas não só nas obras de Escher, mas também na natureza. Um exemplo disso são os chifres de alguns carneiros (Figura 2) e as conchas de caramujos (Figura 3).

Figura 2

Figura 3

Homotetia

Para tentar entender os conceitos envolvidos nas figuras 1, 2 e 3, precisamos entender cada uma das transformações envolvidas. Imagine que você precisa fazer o mural da escola e você tem em casa fôrmas de letras que gostaria de usar nesse mural, mas essas fôrmas são bem pequenas, pois são para escrita em papel A4.

2. Material: Molde da letra P em tamanho pequeno, régua, lápis.

a) Como você procederia para construir um aumento da letra P, para obter uma letra duas vezes maior?
b) Dado um ponto, é possível fazer um aumento da letra P a partir dele? Como? Justifique.
c) É possível, a partir desse mesmo ponto, fazer um P menor que o molde? Como?

3. Material: Molde das letras A e I, régua, lápis.

a) Quais são as semelhanças e diferenças entre o P pequeno e o P grande?
b) Qual é a relação entre os tamanhos de P pequeno e de P grande? De quanto foi aumentada a letra?
c) Qual é a relação entre as áreas da fôrma e do P construído?
d) Teríamos essas mesmas relações para outras letras do alfabeto necessárias para a construção do mural? Se necessário, faça as ampliações dos moldes com outras letras disponíveis.

4. Atividade

a) O que foi necessário para a construção das peças ampliadas acima? Descreva como foi feita essa ampliação.

b) Essa transformação do plano se chama homotetia. Defina-a.

Nesse mesmo mural, é necessário reproduzir a figura 4, que, assim como as letras, está em um tamanho pequeno para o mural. O professor disponibilizou um instrumento chamado pantógrafo para que você fizesse a ampliação e avisou que esta construção seguiria os mesmos princípios das ampliações feitas anteriormente.

Figura 4

5. Material: Pantógrafo, lápis, lápis de cor, cópias da Figura 4.

a) Analise o pantógrafo e explique seu funcionamento.
b) Como o pantógrafo pode ser usado para a construção de figuras homotéticas? Explique.
c) Construa uma figura 4 vezes maior que a figura 4 dada.
d) Qual a relação entre as áreas do animal pequeno e do animal grande?

Agora que entendemos as transformações no plano, podemos descrever o que acontece com os elementos das figuras 2 e 3. Existe um tipo de criatura marinha, conhecida como Nautilus, que possui uma concha, assim como o caramujo apresentado na figura 3. A diferença é que, se fizermos um corte nessa concha, obtemos a figura abaixo.

Figura 5

Figura 6

6. Material: Pantógrafo, lápis de cor, folha, lápis, tesoura, cola.

a) Analisando as figuras 5 e 6, percebe-se algum padrão? Represente a forma que parece ser reproduzida.
b) Como as transformações do plano estudadas podem modelar a formação da concha desse animal?
c) Desenhe apenas uma das secções dessa concha, como na figura 6. A partir dela, você está apto a desenhar as outras secções? Como? Qual transformação está sendo usada?
d) Após desenhar várias dessas secções, qual transformação do plano é necessária para que elas fiquem ordenadas como na concha do animal?
e) Monte a sua própria concha e cole-a em uma folha. Pinte-a, se quiser.