INTRODUZINDO O ESTUDO DA FUNÇÂO EXPONENCIAL ATRAVES DA TORRE DE HANOI

Jussara Gomes Araújo Cunha
Secretaria de Educação do Estado da Bahia / EMFoco
jussaragac@yahoo.com.br

Resumo:

Este trabalho apresenta o resultado do desenvolvimento de atividades realizadas em uma escola pública de Salvador, turma de 2º ano do Ensino Médio, cujo objetivo foi introduzir o estudo de função exponencial. Os recursos utilizados foram: a Torre de Hanói e um bloco de atividades. O papel do professor foi fundamental e a partir dos resultados ficou claro que a sala de aula é um lugar privilegiado onde se deve colocar o “faça você mesmo” para a construção do conhecimento. A metodologia aplicada foi a Investigação Matemática e neste contexto, a ação do professor deve fazer pensar, despertando desequilíbrio e busca de conhecimento, favorecendo e possibilitando o acesso a novos elementos. Após a realização das atividades foi possível constatar que despertar no aluno a predisposição para aprender e introduzir novos conceitos a partir dos conhecimentos que já estavam formados na sua estrutura cognitiva foi determinante para os resultados obtidos.

Palavras-chave: Jogo; Investigação; Aprendizagem.

1. Introdução

O papel do professor do *sec. XXI* é estimular o aluno para que ele relacione ideias, tenha autonomia de pensamento, descubra, crie, pense e raciocine. Para isso ele deve trabalhar com ideias por meio de situações problema e que o faça realmente pensar, analisar, julgar e decidir.

O professor deve propiciar aos alunos momentos que os levem a querer buscar o saber e, dessa forma, fazer com que os alunos não sejam simplesmente os espectadores do processo de ensino e aprendizagem, mas sim protagonistas conscientes e capazes, vivenciando experiências significativas desenvolvidas na sala de aula.

Segundo Moreira, 2011 (apud Ausubel, 1978, p.41), se o professor pretende promover uma aprendizagem significativa, é necessário que ele conheça o que o aluno já sabe. Ele considera que o aluno só aprende a partir daquilo que sabe, além de ser imprescindível sua predisposição para aprender.

A utilização de jogos nas aulas de Matemática tem sido discutida há algum tempo principalmente no que se refere ao grande potencial que ele traz no desenvolvimento do raciocínio, além de possibilitar um trabalho em grupo rico em discussões, reflexões e experimentos.

Esta atividade foi elaborada para trabalhar, inicialmente, com conteúdos que os alunos tinham conhecimento e foi realizada no Colégio Estadual Deputado Manoel Novaes, em Salvador, Bahia, em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, turno vespertino, com 35 alunos, idades entre 15 e 17 anos, planejada e realizada em quatro etapas, no total de 10 aulas.

Etapa 1- Foi realizada em uma aula de 50 minutos com o objetivo de revisarem as propriedades da potência tomando conhecimento de aplicações em situações diversas

Etapa 2 – Esta etapa ocorreu em uma aula de 50 minutos e este momento foi utilizado para leitura da lenda sobre a Torre de Brahama, interpretação e estabelecimento de regras para que os grupos iniciassem o jogo e a confecção da Torre de Hanói.

Etapa 3 – Ocorreu em 3 aulas de 50 minutos cada, onde as duas primeiras aulas foram utilizadas para que os alunos realizassem o jogo e a terceira aula foi utilizada para socialização das descobertas através da análise das tabelas construídas durante o jogo.

Etapa 4 – Realizada em três aulas para construção de gráficos e análise dos mesmos

2. Desenvolvimento

Etapa 1 – Inicialmente foi distribuída uma lista com atividades constando alguns problemas envolvendo situações que, para serem resolvidas, os alunos deveriam utilizar conhecimentos anteriores sobre potência. Quando receberam a atividade ficaram inquietos e curiosos querendo saber se era um teste, se poderia(m) fazer em grupo, se era para nota, entre outros comentários. Neste momento a professora deu explicações, mesmo sem ter terminado de distribuir a atividade para todos. (P) – Vou distribuir uma atividade e gostaria de discutir a resolução com vocês. (A) – É para nota? (A) – É individual. Podemos consultar o caderno? (P) - Estou iniciando um trabalho que será realizado em vários momentos e durante todos eles a avaliação irá ocorrer. (A) – Vai ter prova? Diante dos questionamentos insistentes, surgiu a necessidade de explicar cada etapa do trabalho, como seria feito e como os alunos seriam avaliados. As possibilidades de mudanças em relação às formas de avaliação, embora sendo necessárias, trazem inseguranças por parte de alunos e professores e requerem uma melhor compreensão por parte de todos os envolvidos. Para isto é necessário que o professor esclareça e saiba exatamente "o quê?", "o como?", "o por quê?" e "o para quê" ele avalia. Neste momento foi explicada a proposta do trabalho e como se daria a avaliação. Após os esclarecimentos foi solicitado aos alunos sugestões e a opinião deles sobre o que estava sendo proposto. Os comentários se resumiram em concordar e nos receios e preocupações em relação às notas que seriam dadas nas atividades realizadas em grupo. Logo após foi entregue a lista de atividades para aqueles que ainda não tinham recebido; os alunos optaram por se sentarem em grupo, sugestão feita pelos alunos e aceita pela professora. Logo após, iniciaram a atividade que consta na figura 1, abaixo, e pediram para realizar a atividade consultando o caderno.

Colégio Estadual Deputado Manoel Novaes

<u>Vamos Pensar!</u>

1) Se fosse solicitado o valor de:
2^0 , 3^0, 4^0,.......,m^0 , com $m \neq 0$, qual seria sua resposta?

Você já pensou sobre isso? Por que ? Como você explica?

----
2) Suponha que você tenha em suas mãos uma folha de papel de ofício.
(Sugestão – destaque uma folha do seu caderno)
Observe que ela tem uma forma retangular.
Dobre no meio e abra a folha.
Observe que você tem a forma retangular em cada uma das metades.
Volte a etapa anterior (dobrada no meio)
Continue dobrando ao meio.
O que você observa quando abre a folha?
Continue dobrando.
O que você observa ao abrir a folha?
Dobre novamente ao meio e o que você obtém?
Faça isso por várias vezes e anote as suas conclusões.

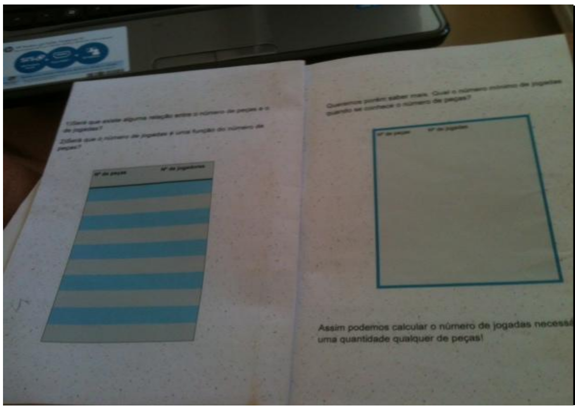
Fig. 01 – Atividade nº 1

Ao iniciarem a atividade, começaram os comentários; momento oportuno para os questionamentos necessários. (A) – Professora, eu sei que todo número elevado a zero é 1. (P) – Será? . (A) – Claro, é regra. (P) – Todos concordam? Neste momento, o silêncio foi total. Depois de alguns minutos alguns alunos se manifestaram concordando sobre a colocação do colega. (P) – O que vocês diriam sobre 0^0? (A) – É 1. (A) – É zero. (P) – Por que estão afirmando que é zero? . Era um momento ideal para que todos refletissem sobre o que os levou a fazerem tais afirmações e se já tinham pensado sobre o porquê das mesmas. (P) Observem os números da atividade e verifiquem o que eles têm em comum. (A) – O expoente zero. (P) – Correto! . Imaginem algumas situações onde obtemos o resultado zero! . Silêncio total! (P) – Pensem em algumas operações entre dois ou mais números! (A) – 2X0. (P) – Ótimo! Só? . (A) – (2 - 2). (P) – Vocês não têm outras sugestões? (A) – (3 – 3), (4 – 4). (P) – Que tal {2 + (- 2)}? . (A) – É mesmo. (P) – Vamos substituir o expoente zero da atividade 1 por cada uma das situações citadas? (A) – Como faço? . (P) – Alguém pode explicar como os números serão escritos? Este momento de discussão foi riquíssimo e diante das descobertas surgiu o interesse sobre o resultado ou qual o valor de 0^0. Algumas discussões surgiram em volta das propriedades, mas não chegaram a nenhuma conclusão e ficou como atividade para a próxima aula. Os alunos fizeram as substituições solicitadas e através dos questionamentos da professora eles revisaram as propriedades de potência. Nos exemplos que eles utilizaram a propriedade de divisão de potências de mesma base, não conseguiram perceber de imediato que o numerador e o denominador das frações eram iguais e poderiam pensar que isto significava dividir um número por ele mesmo. Após esta observação chegaram às conclusões tão esperadas. Em relação à atividade 2, os alunos não tiveram maiores problemas. Chegaram à conclusão que o número de retângulos visualizados seria igual a 2^n com $n \in N$. No final da aula foi solicitado a todos os grupos que fizessem uma breve avaliação sobre a aula e pesquisassem sobre o 0^0.

A etapa 2 foi realizada em uma aula de 50 minutos e a proposta era: trabalhar com a leitura e interpretação da lenda, estabelecer regras para o jogo que seria confeccionado naquele momento e como deveria ser feito o trabalho em grupo. O conhecimento é construído a partir das inter-relações entre os sujeitos e os objetos que os cercam. Precisamos pensar e entender que somos parte de um mundo que está sendo construído, onde o futuro deverá estar voltado ao viver junto, com dignidade. É necessário realizar atividades para desenvolver habilidades que possibilitem adotar atitudes de respeito mútuo, solidariedade, compreensão da convivência com o coletivo, regras e valores que estas envolvem. A solidariedade deverá ser a condição de sobrevivência, pois somos seres interdependentes. Para atender aos objetivos pretendidos o jogo foi fundamental, além de exercer uma grande importância no desenvolvimento cognitivo como atenção, memória, raciocínio e criatividade. A aula foi iniciada com os comentários sobre a pesquisa e depois de alguns comentários ficou resolvido que iriamos considerar 0^0, uma indeterminação. Assim, foi entregue a cada grupo um bloco de atividades (fig. 02) para que dessem prosseguimento ao trabalho. Para este momento estava estabelecido que fosse feita a leitura da lenda com comentários para que as regras fossem estabelecidas e posteriormente eles iriam confeccionar o jogo. Neste bloco constavam sugestões para confecção do jogo e devido ao tempo ficou acertado que iriam fazer em casa e trariam na próxima aula.

Fig. 02- Caderno de atividades

Iniciando a 3ª etapa, foi solicitado ao grupo que sentassem em duplas e começassem o jogo seguindo as regras estabelecidas. Neste momento a professora solicitou que abrissem o bloco de atividades e seguissem as instruções preenchendo a tabela que se encontrava no bloco, além de responderem às perguntas que nele constavam.



1- Será que existe alguma relação entre o número de peças e o número de jogadas?

2-Será que o número de jogadas é uma função do número de peças?

3- Qual o número mínimo de jogadas quando se conhece o número de peças?

4- Podemos calcular o número de jogadas necessárias para uma quantidade qualquer

Fig. 03- Atividades

Neste momento todos colaboravam para que as atividades fossem realizadas, mas o sentimento de competição entre as duplas ficou muito claro. Um dos objetivos era desenvolver a cooperação e a professora sentiu a necessidade de ampliar este sentimento que naquele momento estava limitado ao seu colega do lado (as duplas). (P) – Ficou acertado que iríamos dar início ao jogo com quantas peças? (A) – 3 peças. (P) – Com 3 peças, qual o número mínimo de jogadas que vocês encontraram? (A) – 7 jogadas. (P) – Você poderia mostrar para todos como foram os passos? A ideia era fazer com que eles socializassem suas descobertas com o espírito de colaboração para que os demais não simplesmente copiassem as respostas, mas percebessem que iriam buscar a solução com a colaboração dos demais, quando necessário.

Fig. 04 - Alunos jogando

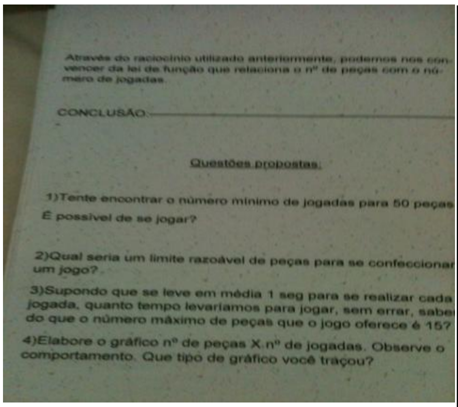
Todas as duplas conseguiram encontrar o número mínimo de jogadas para até 5 peças embora muitos sentiram alguma dificuldade e precisaram da ajuda de colegas.

Acima de 5 peças as dificuldades aumentaram consideravelmente e eles começaram a ficar inquietos com a situação porque o jogo foi construído com 8 peças (discos). Os entraves encontrados pela grande maioria nesse momento foram determinantes para que eles tentassem obter o resultado para continuarem preenchendo a tabela de outra forma e começaram a observar o que estava acontecendo. A convite da professora observaram a tabela, analisando o seu crescimento na vertical e na horizontal. (P) – Quando aumenta o número de peças, o que acontece com o número de jogadas? (A) – Aumenta também. (P) – De que forma? (A) – 7, 15, 31,... (P) – Será que vocês conseguem descobrir qual será o próximo número dessa sequência? Nesse momento, um aluno que tinha conseguido encontrar o número mínimo de jogadas enquanto jogava, respondeu. (A) – Eu consegui 63 professora, e a senhora disse que eu estava correto. (P) – Certo, dessa forma conseguem descobrir qual será o número mínimo de jogadas para 7 e 8 peças? . Neste momento a grande maioria encontrou a resposta sem muita dificuldade, simplesmente observando a sequência dada. Construíram a tabela e a professora solicitou que fizessem uma análise na horizontal. Todos estavam convencidos que o número de jogadas iria aumentando em função do número de peças, mas não estavam conseguindo fazer esta relação. Este foi um momento em que a professora precisou conduzir com algumas observações e questionamentos para não se sentirem desestimulados diante das dificuldades que estavam encontrando para obterem a relação. (P) – Se fôssemos escrever a sequência encontrada por vocês: 7, 15, 31, 63,..., na forma de potência, o que fariam? . (P) – Se fosse solicitado para que vocês escrevessem a sequência encontrada na forma de potência de base 2, conseguiriam? (A) – Não, eu conseguiria se fosse 8, 16, 32,... (P) – Ótimo! Agora imaginem que eu não posso ter como resultados 8, 16,32, 64,... e sim 7, 15, 31, 63,... O que devo fazer? (A) – Tiro 1. (P) – Maravilha! Devemos subtrair 1 unidade. (P) – Agora pensem! Como chegamos a esses números e qual a relação que existe entre o número de peças e o número mínimo de jogadas? Neste momento nenhum aluno conseguiu encontrar a relação e a professora resolveu solicitar ao grupo que preenchesse uma tabela (fig. abaixo) tentando fazer com que os alunos visualizassem a relação e avançassem nas atividades.

Nº de peças	Nº de jogadas	Nº de jogadas / (potência de base 2) – 1

Fig.05 – Sugestão de tabela

O preenchimento da tabela ocorreu sem maiores problemas e, sem maiores dificuldades, conseguiram generalizar, ou seja, identificar como perderíamos encontrar o número mínimo de jogadas quando se conhece um número de peças qualquer, usando o princípio da indução. Após o preenchimento da tabela foi solicitado que cada um dos grupos fizessem uma auto avaliação com comentários sobre as atividades realizadas na aula e tentasse resolver as questões do bloco de atividade para serem discutidas no próximo encontro.


Através do raciocinio utilizado anteriormente, podemos nos convencer da lei de função que relaciona o nº de peças com o número de jogadas.

CONCLUSÃO

Questões propostas:

1)Tente encontrar o número minimo de jogadas para 50 peças
É possivel de se jogar?

2)Qual seria um limite razoável de peças para se confeccionar um jogo?

3)Supondo que se leve em média 1 seg para se realizar cada jogada, quanto tempo levariamos para jogar, sem errar, sabe do que o número máximo de peças que o jogo oferece é 15?

4)Elabore o gráfico nº de peças X nº de jogadas. Observe o comportamento. Que tipo de gráfico você traçou?

1- Tente encontrar o número mínimo de jogadas para 50 peças. É possível de se jogar?
2- Qual seria um limite razoável de peças para se confeccionar um jogo?
3- Supondo que se leve em média 1 seg para se realizar cada jogada, quanto tempo levaríamos para jogar, sem errar, sabendo que o número máximo de peças que o jogo oferece é 15?
4- Elabore o gráfico de nº de peças X nº de jogadas. Observe o comportamento. Que tipo de gráfico você traçou?

Fig. 06- Atividades

Etapa 4- Este foi um momento onde ocorreram muitas discussões importantes em decorrência dos gráficos traçados O gráfico solicitado foi o do *nº de peças pelo nº de jogadas* e por nenhum momento os alunos consideraram que estavam trabalhando com o conjunto dos números naturais. Em decorrência ligaram os pontos. Neste momento a professora chamou a atenção dos alunos sobre o conjunto numérico que estavam trabalhando e pediu que eles ampliassem a situação analisada e considerassem uma função onde o universo numérico fosse o conjunto dos números reais. Diante da situação que foi colocada surgiu a oportunidade de trabalhar a função exponencial $f(x) = 2^n$ com n $\in$ R. A situação foi criada para que os alunos pudessem analisar os possíveis valores que a base poderia ser atribuída levando em consideração que o expoente era um número real qualquer (P)- Considere a função $f(n) = a^n$ com n pertencente ao conjunto dos números Reais. Quais os possíveis valores que podemos atribuir à base? (A)- Qualquer número. (P)- Será? (A)- Porque não? (P)- Vamos atribuir valores à base e ao expoente e observar o que pode acontecer? Neste momento os alunos começaram a atribuir valores e calcular os resultados para cada um dos casos, mas todos pensavam em valores inteiros para "a" e a professora teve que conduzir de forma a optarem por valores que não fossem números inteiros para a base e expoente. (P)- Vamos imaginar a situação onde temos $f(x) = a^x$ onde x é um número real. (A)- Não pode 0^0 (P)- -Ótimo, mas só existe esta impossibilidade? (P)- Imaginem outras situações que não pode acontecer! Silêncio total (P)- Bem, vamos analisar as possibilidades Considerem x um número real qualquer e analisem cada uma das situações: $a=0$; $a=1$; $0< a <1$; $a>1$; $-1 < a < 0$; $a< -1$. Neste momento discutiram as impossibilidades onde os questionamentos da professora foram determinantes para chegarem às conclusões desejadas. Após este estudo foi possível definir função exponencial sem maiores problemas onde os alunos puderam fazer as considerações em relação aos valores da base de forma consciente e com compreensão.

3. Considerações Finais

O professor deve propiciar aos alunos momentos que os levem a querer buscar o saber e, dessa forma, fazer com que não sejam simplesmente os espectadores do processo de ensino e aprendizagem, mas sim protagonistas conscientes e capazes, vivenciando experiências significativas desenvolvidas em sala de aula É necessário que o professor seja um mediador do diálogo entre o educando e o conhecimento. Ao professor deverá caber a orientação necessária para que o objeto do conhecimento seja explorado pelos alunos, sem jamais lhes oferecer a solução pronta. Acredito que esta proposta possa contribuir para uma aprendizagem com mais significado, uma vez que coloca o aluno como centro do processo educacional, enfatizando-o como ser ativo na construção do conhecimento e fazendo conexões com conhecimentos pré-existentes na sua estrutura cognitiva. Isto pode ser constatado ao observar o desenvolvimento do trabalho com o diálogo e as provocações ao longo de todo o estudo

4. Referências Bibliográficas

HELLE, Alro.; OLE, Skovsmose. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução de Orlando Fiqueiredo. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 160p.

LOPES, Celi A.(Org.); NACARATO, Adair M. (Org.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 192p. Reimpressão.

MOREIRA**,** Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa:** A teoria de David Ausubel**.** 2. ed. São Paulo: Centauro, 2001. 111p.

MOREIRA, Marcos Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186p.

______. **Teorias da Aprendizagem**. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011. 242p.

POLYA**,** George. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro:Interciência, 2006. 203p.