INVESTIGANDO DEMONSTRAÇÕES, JUSTIFICATIVAS E ARGUMENTAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Fabio da Costa Rosa
Universidade Federal do Paraná
fabiokinasz@gmail.com

Daniela Guerra Ryndack
Universidade Federal do Paraná
dani.dep@hotmail.com

Prof ª Dr ª Elisangela de Campos
Universidade Federal do Paraná
elismat@ufpr.br

Fernanda Machado
Universidade Federal do Paraná
fee.m@hotmail.com

Greicy Kelly Rockenbach da Silva
Universidade Federal do Paraná
greicyrockenbach@gmail.com

Willian Valverde
Universidade Federal do Paraná
willian_valverde@hotmail.com

Resumo:
Este trabalho tem como objetivo observar e analisar como são trabalhados as demonstrações, provas e justificativas no ensino fundamental, a partir da análise de um assunto do conteúdo de geometria, ângulos, de três livros didáticos, e como estes poderiam ajudar o professor a desenvolver o raciocínio lógico dedutivo nos seus alunos. Encontramos nos livros analisados, demonstrações formais, provas e justificativas informais, alguns problemas que induzem a utilização do raciocínio dedutivo do aluno. Esta análise contempla uma fase das análises preliminares, de uma pesquisa, utilizando a metodologia de Engenharia Didática, que visa planejar e aplicar sequencias didáticas com

o objetivo de responder a seguinte questão: é possível desenvolver atividades na sala de aula que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos?

Palavras-chave: Raciocínio Lógico; Demonstrações; Provas; Engenharia Didática**.**

1. Introdução

O PIBID, Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, é uma iniciativa financiada pela CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, que, por meio de bolsas a alunos de cursos superiores de licenciatura, busca, entre outras coisas, aperfeiçoar a formação acadêmica dos futuros professores de diversas áreas.[1]

Nós, alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Paraná (UFPR) participantes do projeto, entre outras atividades, nos reunimos semanalmente para discutir as experiências vivenciadas nas salas de aula e também textos e artigos sobre Educação e o Ensino de Matemática. Nestas discussões, um assunto que sempre apareceu foi que a matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para capacidade de argumentação dos alunos.

É comum ouvir de acadêmicos do curso de matemática e de professores já formados que um ensino que dê mais atenção a este aspecto se faz necessário, e que também mostra vantagens na formação do aluno em relação a um ensino "mecanicista" baseado em memorização de fórmulas, macetes e algoritmos.

A ideia de que um dos papeis da matemática na escola básica é a de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo pode ser observada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN's, ao afirmar que:

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. ...é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno... (BRASIL, 1997, p.24)

[1] http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid

Ainda de acordo com os PCN's, é objetivo do ensino da matemática fazer com que o aluno desenvolva habilidades para: resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos como: dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.

Entendemos, assim como Janzen (2011) que a dedução é um procedimento lógico que vai do geral ao particular. Já a indução realiza um caminho contrário ao da dedução, pois se parte de casos particulares e se procura uma lei geral, uma definição ou teoria geral que sintetize todos esses casos particulares.

No entanto, estes tipos de procedimentos estão ligados ao ensino superior, é nesse nível de ensino que somos apresentados aos processos dedutivos e indutivos, as demonstrações e a lógica matemática. Mas de acordo com os PCN's estes tipos de raciocínio deveriam ser desenvolvidos desde o ensino fundamental.

Analisando mais atentamente várias habilidades citadas nos PCN's, como por exemplo, conjecturar e desenvolver processos como de dedução, fazem parte do que chamamos de Pensamento Matemático Avançado, de acordo com Janzen, usando as idéias de David Tall (1991):

> [...]há todo um ciclo de atividades no pensamento matemático avançado: desde o ato criativo de considerar um problema no contexto da pesquisa matemática que leva a formulação criativa de conjecturas até o estagio final do refinamento e da prova. Muitas dessas atividades até aparecem no pensamento matemático elementar, mas as definições formais e as argumentações e deduções são o que distinguem o pensamento matemático avançado. (JANZEN, 2011, p.19)

Não pretendemos que os alunos do ensino fundamental realizem demonstrações formais, como as que encontramos no ensino superior, mas entendemos que é necessário incluir na sala de aula do ensino fundamental atividades que levassem os alunos a observar padrões, generalizar, conjecturar e justificar, mesmo que informalmente, os resultados matemáticos obtidos, para podermos cumprir os objetivos colocados pelo PCN.

De nossas observações na escola temos que o que é priorizado no ensino básico é a memorização de fórmulas e algoritmos, os alunos não são estimulados a observar, conjecturar e justificar suas observações. Perguntamo-nos, o porquê dessa escolha dos professores, seria a falta de tempo? Seria por não saber como fazer de forma diferente? Ou os alunos não conseguiriam desenvolver tais habilidades? Os livros didáticos fazem demonstrações, formais e informais, na explicação do conteúdo ou em atividades e exercícios, que poderiam ajudar o professor a trabalhar com isso na sala de aula?

Dessa forma, entendemos que seria importante compreendermos quais as atividades em sala de aula contribuíriam para o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, mais especificamente o raciocínio lógico dedutivo. E se é possível desenvolvê-las em sala de aula. Para isto, estamos trabalhando em uma pesquisa qualitativa utilizando a metodologia engenharia didática. Este artigo traz os resultados de nossa análise preliminar, a análise de capítulos sobre geometria de três livros didáticos, na qual buscamos indícios de demonstrações, provas e justificativas de resultados matemáticos nas explicações sobre a teoria e atividades que levassem os alunos a observar, conjecturar e justificar.

A escolha pela geometria se deu por uma maior facilidade de utilização da visualização, tal como intuição e imaginação, como parte do processo de formulação das conjecturas e justificativas. Pois de acordo com Leivas (2009, p.136), o pensamento geométrico avançado "[...] é um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos".

Para este autor, o pensamento geométrico avançado é formado também pela imaginação, intuição e visualização. Para justificar sua definição Leivas recorre a Tall da seguinte maneira:

> Para Tall (1991, p. 20) muitos dos processos de pensamento matemático avançado já são encontrados em níveis mais elementares (convencer a si próprio, a um amigo, a um inimigo e, antes de um teorema ser conjecturado e provado, há muito trabalho quanto às ideias e relações que serão frutíferas).
> (LEIVAS, 2009, p.135)

Podemos observar um elemento importante referente ao pensamento: a questão da argumentação. Desta maneira, os elementos que compõe o raciocínio (sistematizar, relacionar, observar coerência, combinar enunciados respeitando estruturas formais, entre outros) são essenciais para a argumentação, um elemento que constitui o pensamento.

2. Engenharia Didática

Para desenvolver a nossa pesquisa optamos pela engenharia didática que se caracteriza como “[...] uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática” (PAIS, 2001, p. 99)

A opção por tal metodologia de pesquisa se deu pela possibilidade de interligar conhecimento teórico e prático no ensino da matemática. Além disso, a forma metódica de organizar a pesquisa possibilitaria uma maior compreensão do(s) objeto(s) de pesquisa por nós alunos do curso de matemática, mais acostumados com mecanismos sistematizados de organização de ideias e iniciantes na pesquisa em Educação Matemática.

Uma pesquisa baseada na engenharia didática se dá através de quatro fases consecutivas: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; aplicação de uma sequência didática, análise *a posteriori* e a avaliação. Na primeira fase,

> o objeto é submetido a uma análise preliminar, através da qual se fazem as devidas inferências, tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada.
> (PAIS, 2001, p. 101)

Nesta fase também é feito o levantamento do referencial teórico sobre o tema, são formuladas as hipóteses de pesquisa e também são definidos alguns dos procedimentos que serão tomados nas demais fases da pesquisa.

Na *concepção e análise a priori,* para Pais (2001), define-se quais as variáveis que tem interferência no fenômeno da pesquisa. Esta etapa envolve tanto a análise referente ao planejamento e aplicação de uma sequência didática específica quantos às variáveis que terão interferência na pesquisa de uma forma mais global. O objetivo desta etapa é definir quais são as variáveis que será possível efetuar algum tipo de controle, relacionando o conteúdo em questão com as atividades que os alunos podem desenvolver para apreensão dos conceitos estudados.

A diferença entre estas duas etapas é que enquanto as análises preliminares estão mais ligadas à pesquisa teórica como um todo, a concepção e análise *a priori* esta relacionada a uma ligação entre as pesquisas teóricas e o desenvolvimento das atividades práticas, buscando compreender como e em qual grau as características e quantidade da amostra de pesquisa interferem ou não nos resultados obtidos. Nesta segunda etapa, é de vital importância conhecer as características e experiências da(s) turma(s) analisada(s) a fim de garantir legitimidade e maior qualidade e confiabilidade na pesquisa.

Já a *sequência didática* "é formada por certo número de aulas planejas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática." (PAIS, 2001, p. 102)

É nesta etapa que boa parte dos dados empíricos é levantado e as principais hipóteses são testadas, enquanto que na *validação e análise a posteriori* todos os dados obtidos - sejam nas análises preliminares, na observação do pesquisador durante as sequências didáticas, ou em qualquer parte da pesquisa, recebem o tratamento - são analisados pelo pesquisador, que, a partir destes dados, chega as suas devidas conclusões.

É importante ressaltar que estas etapas, apesar de seu caráter de ordem não são fixadas a todo instante e o pesquisador acaba transitando entre elas de forma não linear.

3. Provas e Demonstrações em Matemática

Partindo das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para o ensino fundamental, e nas Diretrizes Curriculares Estaduais-DCE, temos nestes, enfatizada a importância da demonstração em matemática, bem como, vários pesquisadores apontam o valor das provas e demonstrações, tanto na matemática como na Educação Matemática.

O ensino/aprendizagem da argumentação, da prova e da demonstração em matemática, vem sendo objeto de muita discussão entre pesquisadores, principalmente no que corresponde ao papel que a atividade deveria desempenhar na Educação Matemática. (HANNA, 2000, apud ORDEM, 2010).

Seria possível aos alunos produzirem teoremas, conjecturas e provas? Em resposta, temos o trabalho de Boero (1996, apud Almouloud, 2007), em que ele discutiu o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de 8°série. O autor verificou se os alunos poderiam produzir teoremas (conjecturas e provas) se colocados em condições ideais para tal. O autor concluiu que isso é possível desde que o processo tenha as seguintes características: (1) durante a produção da conjectura, o aluno trabalhe a sua hipótese argumentando e justificando de acordo com suas escolhas; (2) durante a etapa seguinte da prova, o aluno organiza algumas justificativas (argumentos) produzidas durante a construção de acordo com uma corrente lógica.

Já Heinze (2004, apud Ordem, 2010), com base em uma pesquisa empírica, propõe um modelo para ser implementado em sala de aula para a produção das demonstrações. Esse modelo é composto por etapas, denominadas por ela como fases: *Fase 1*: Exploração da situação problema, produção de conjectura e identificação dos diferentes tipos de argumentos que tornaram plausíveis a conjectura; *Fase 2*: Formulação precisa das conjeturas, de acordo com as convenções textuais compartilhadas; *Fase 3*: Identificação dos argumentos adequados a conjectura e elaboração de uma estratégia para a demonstração; *Fase 4*: Combinação dos argumentos em uma cadeia dedutiva que constitui um esboço para a demonstração final; *Fase 5*: Escrita da demonstração.

Balacheff (1987, apud Almeida, 2010) coloca uma classificação para as provas produzidas pelos alunos, que se diferenciam por seu desenvolvimento cognitivo: Provas Pragmáticas que são justificativas fundamentadas em ações diretas e simples sobre algumas representações de objetos matemáticos e as Provas inteletuais que não apresentam a ocorrência de ações de carácter empírico, mas apresentam as ações internas, das quais se destaca a utilização do discurso lógico dedutivo para a caracterização dos objetos.

A elevação da categoria pragmática para a intelectual de uma prova dependerá do desenvolvimento conjunto das formas de ação, formulação e validação. Balacheff identifica os seguintes níveis entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais:

- *Empirismo ingênuo:* (escala inicial do desenvolvimento cognitivo) Validação de uma proposição a partir da verificação de alguns casos.
- *Experimento Crucial:* Validação de uma proposição após verificação de um caso especial, geralmente não familiar.

- *Exemplo Genérico:* Validação de uma proposição após manipulação de exemplos de modo a deixá-los com uma característica que represente uma classe de objetos.
- *Experiência Mental*: Validação de uma proposição de forma genérica, porém, baseada no estudo de alguns casos específicos. Neste nível, os argumentos independem das representações concretas, sendo conduzidos pelo raciocínio que domina a generalidade .

As provas em sala de aula, além de ser um recurso para eliminarem-se as dúvidas dos alunos, ainda apresentam outras funções na matemática, segundo De Villiers (2002, apud Almouloud, 2007) são:

- *Verificação:* convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
- *Explicação:* compreensão dos "porquês" uma afirmação é verdadeira;
- *Descoberta:* de novas conjecturas, teorias, ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura.
- *Comunicação:* negociação do significado de objetos matemáticos;
- *Desafio intelectual:* satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
- *Sistematização:* organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

4. Análise dos Livros Didáticos do 8° ano do Ensino Fundamental

O objetivo desta análise é investigar se os livros didáticos de Matemática do 8° ano do ensino fundamental apresentam e de que modo apresentam demonstrações formais ou informais, indícios de demonstrações, argumentação e justificativas no conteúdo de geometria, mais especificamente no tópico sobre ângulos. Escolhemos três livros do PNDE- Programa Nacional do Livro Didático e os denominamos de A, B e C.

4.1 Como o livro argumenta no geral

O livro A traz ilustrações sobre cada assunto tratado, em algumas partes antes de formalizar alguma propriedade, começando com exemplos simples, acrescentando mais hipóteses que permitem chegar às expressões gerais ou à conclusão de alguma afirmação dada previamente. Os textos são acompanhados de figuras, tanto para a explicação de exemplos como para argumentações e demonstrações das propriedades.

O livro B traz exemplos de onde podem ser encontrados os teoremas que estão sendo tratado no livro, quando é provado que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, tem ao lado uma imagem de uma tesoura aberta com a explicação de que os ângulos opostos formados são ângulos congruentes. Há explicações de palavras próprias da matemática, como a palavra congruente, palavras que são utilizadas em demonstrações.

O livro C começa sem dar uma definição formal para o assunto em questão e logo partem para o desenvolvimento das propriedades. Em alguns casos, é apresentada aos alunos uma generalização ou demonstração, usando conceitos que não são definidos no capitulo, bem como, noções sobre linguagens e símbolos utilizados.

4.2 O que o livro demonstra e como demonstra

No livro A, a primeira demonstração feita é da proposição de que os ângulos opostos pelo vértice tem mesma medida. A demonstração é feita através de uma figura e pela interpretação dela, caracterizando-se como uma prova intelectual, visto que não há um enfoque empírico, sua função aproxima-se da ideia de verificação.

Há demonstração sobre os ângulos alternos congruentes, figuras com diferentes casos permitem a conclusão de que tanto ângulos alternos internos quanto externos são congruentes. Primeiro prova-se a propriedade e depois a enuncia, essa demonstração é uma prova pragmática, pois faz justificativas baseadas em representações de objetos, com cada ilustração dos pares de ângulos alternos internos e externos. Estas demonstrações tem a função de descoberta, porém, posteriormente, a função de sistematização se faz presente também. Da mesma forma é provado que ângulos colaterais são suplemntares.

Após é feito um experimento, através da investigação o aluno é levado a concluir a propriedade: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Este experimento tem a função de descoberta e os autores o utilizam para após sistematizar o conteúdo.

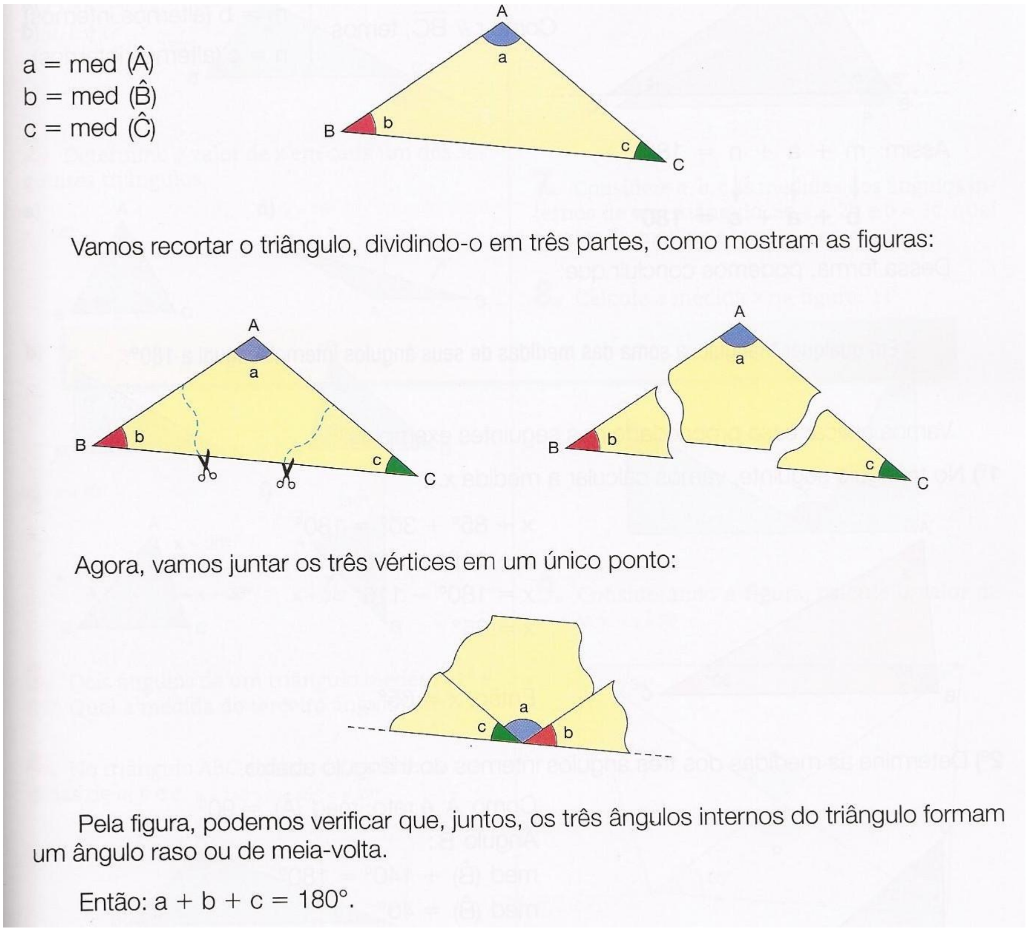


Figura 1: Livro A, p. 249. Fonte: próprio autor.

Há argumentações que levam à fórmula do cálculo do número de diagonais de um polígono. Estas argumentações se dá a partir de exemplo com triângulo e quadriláteros, e generaliza até a fórmula para o cálculo de polígonos de *n* lados. A prova é pragmática, pois apresenta ações de caráter empírico, sendo a função da demonstração de verificação.

Por fim, no livro A, há um quadro que argumenta e deduz a fórmula pra o cálculo das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono, começando com quadriláteros e generalizando pra polígonos de *n* lados, caracterizando uma prova pragmática, já que faz ações empíricas e diretas, representadas por figuras.

No livro B, é feito a demonstração de que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, formalmente se caracterizando como uma prova intelectual, visto que não há um enfoque empírico e após com função de sistematização.

Da mesma forma, é feita uma prova intelectual da propriedade de que ângulos alternos internos e externos são congruentes. Porém anteriormente a essa prova, há demonstrações de que ângulos correspondentes são congruentes quando são formadas por retas paralelas e uma transversal, considerada como prova pragmática, pois há uma experiência feita com transferidor para um caso particular e depois provada formalmente. Aqui percebemos que inicialmente os autores utilizam uma demonstração com função de verificação, para depois apresentar demonstrações com funções de sistematização.

No livro C é iniciado o capítulo sem dar uma definição formal de ângulo e logo se parte para o tópico de ângulos notáveis e suas propriedades. Ao falar de ângulos opostos pelo vértice, é apresentado aos alunos uma generalização, utilizando-se de alguns conceitos que não haviam sido definidos no capítulo, como ângulos suplementares.

Na seção seguinte, ao falar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triangulo é 180°, é questionado sobre como triângulos com infinitos formatos diferentes tem o mesmo resultado da soma dos seus ângulos internos. Após é feito a demonstração, usando ângulos alternos internos, que a soma dos ângulos internos de qualquer triangulo é 180°. Essa prova é caracterizada como prova pragmática, pois faz experimentos apresentando ações empíricas e diretas, representadas por figuras. Notamos que esta prova possui funções tanto de descoberta quanto de explicação e posteriormente de sistematização.

É importante destacar a presença de uma figura que ilustra uma conversa entre aluna e professora no que diz respeito à veracidade dos fatos, o raciocínio em cima de um caso genérico, deduções e conclusões gerais.

Na seção seguinte referente à soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, é interessante destacar a presença da seguinte ilustração.

Figura 2: Livro C, p.104. Fonte: próprio autor.

Os autores usam essa frase para retomar a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180° (através de retas paralelas) e usam a mesma para provar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, e também, para provar que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540°. Seguindo com a mesma ideia para outros polígonos. Verificamos, aqui, a função de sistematização.

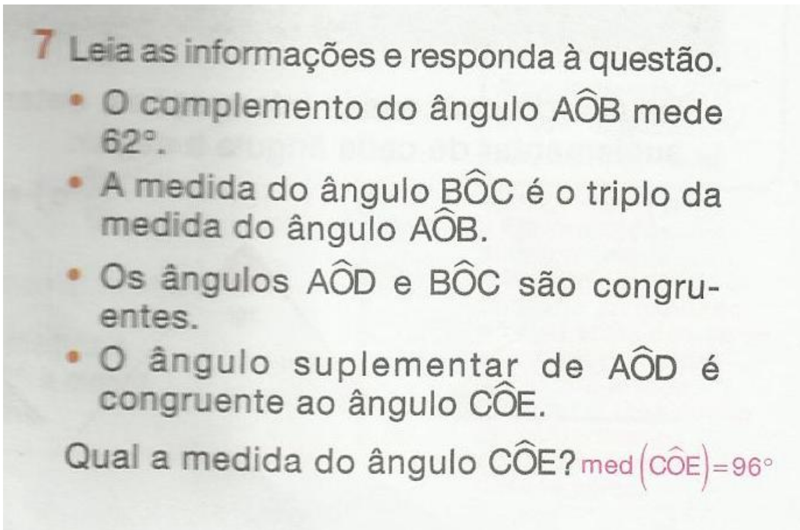
4.3 O que é deixado para o aluno argumentar- Tipos de exercícios

No livro A os exercícios são em grande quantidade, porém, bastante simples, os quais exigem apenas que o aluno aplique as propriedades e não as use para resolver algum problema mais elaborado. Em algumas vezes, ao final de cada seção aparecem desafios, que mesclam dois ou mais tópicos abordados anteriormente.

Particularmente, em relação à propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, o livro propõe aquilo que Balacheff (1987, apud Almeida, 2010) denomina como Experimento Crucial, onde se é proposto para um caso particular que tem por objetivo chegar à formalização da propriedade, que é enunciada ao final da seção. Os primeiros exercícios propostos para os alunos aparecem como aplicações de propriedades já os outros envolvem propriedades enunciadas e discutidas anteriormente, como ângulos opostos pelo vértice, ângulos colaterais ou ângulos alternos.

Em geral, o livro não solicita nos enunciados dos exercícios que o aluno argumente ou tente generalizar algo indicado. Apenas traz problemas relacionados às propriedades vistas na seção ou vistas anteriormente (quando não são exercícios de cálculo).

O livro B contém um exercício que ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, necessário para relacionar hipóteses no desenvolvimento das demonstrações, exemplificando isso, segue o exercício abaixo retirado do livro:



7 Leia as informações e responda à questão.

- O complemento do ângulo $A\hat{O}B$ mede 62°.
- A medida do ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo da medida do ângulo $A\hat{O}B$.
- Os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são congruentes.
- O ângulo suplementar de $A\hat{O}D$ é congruente ao ângulo $C\hat{O}E$.

Qual a medida do ângulo $C\hat{O}E$? $med(C\hat{O}E) = 96°$

Figura 3: exercício do livro B, página12. Fonte: próprio autor.

Neste livro encontramos atividades propostas que visam o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, tais como exercícios que envolvem relações a outros conteúdos e analogias, porém, os alunos não são levados a argumentar e justificar suas respostas.

No livro C, a seção referente à soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, os autores deixam ao aluno a pergunta se seria possível ter uma fórmula válida para todos os polígonos, trazendo após a confirmação dessa afirmação e salientando que o aluno irá encontrar a solução para essa pergunta nos próximos exercícios. Pudemos verificar que alguns exercícios propostos podem ser caracterizados dentro do nível que Balacheff (1987, apud Almeida, 2010) denomina Empirismo Ingênuo, onde os autores propõe com o objetivo de validar algumas proposições.

Atividades investigativas fazem parte do texto desse livro, trazendo uma grande quantidade de exercícios, bem elaborados e divididos em exercícios para serem feitos na sala de aula. O livro ainda faz sugestões de atividades extraclasses.

6. Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo, analisar três livros didáticos buscando responder a questão: Como os livros didáticos trazem as argumentações e demonstrações, formais ou informais, na explicação do conteúdo ou em atividades e exercícios, que poderiam ajudar o professor e o aluno a trabalharem em sala de aula.

Pela análise de um assunto do conteúdo de geometria, ângulos, podemos afirmar que eles trazem demonstrações formais, justificativas informais utilizando a visualização e manipulação de material concreto. Porém nem todos possuem problemas exploratórios que ajudariam os alunos a conjecturarem e justificarem suas conjeturas.

Dessa forma, podemos considerar que nossa análise preliminar nos indica que é possível trabalhar com atividades que desenvolvam o raciocínio dedutivo dos alunos, uma vez que os livros didáticos apontam caminhos para isso.

Para o que segue de nossa pesquisa, resta agora elaborarmos as sequencias didáticas com o acompanhamento da professora responsável pelas turmas e analisar o desenvolvimento dos alunos durante e depois de sua aplicação.

7. Referências

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. In: 30 ª REUNIÃO DO GRUPO DE TRABALHO-GT19, Minas Gerais, 2007.

ALMEIDA, J. C. P. **Argumentação e Prova na matemática escolar do ensino básico:** a soma das medidas internas de um triângulo. 208 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.. **A Conquista da Matemática.** São Paulo: Ftd, 2007.

IMENES, L. M.; LELIS, M. C. **Matemática para todos.** São Paulo: Scipicione, 2007.

JANZEN, E. A. **O Papel do professor na foram cão do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Paraná, 2011.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 294p. Dissertação (Doutorado em Educação)- Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria:** uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6° a 8° séries de Moçambique. 141 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma analise da influencia francesa.** Belo horizonte: Autentica. 2001. 128p.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patricia Moreno. **Vontade de Saber Matemática.** São Paulo: Ftd, 2009. 268 p.