CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM CANUDOS E NYLON: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS GRAFOS

Lauro Chagas e Sá
Instituto Federal do Espírito Santo
proflaurosa@gmail.com

Rayara Barroca Silva
Instituto Federal do Espírito Santo
rayarabarroca@gmail.com

Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo
sandrafraga7@gmail.com

Resumo:
Apresentamos uma proposta de atividade para o ensino médio que aborda o tema *grafos* simultaneamente à construção de esqueletos de sólidos geométricos com canudos e nylon. A escolha do tema Grafos deve-se à pertinência da matemática discreta na educação básica e à presença deste tópico no Currículo Básico da Rede Estadual do Espírito Santo. Essa atividade foi aplicada, em nível de estudo piloto, em oficina no Laboratório de Ensino de Matemática do Ifes-Campus Vitória. Nessa ocasião, alunos de licenciatura e professores da educação básica discutiram sobre a construção de prismas, pirâmides e antiprismas com materiais alternativos. Concluímos que essa atividade tornou-se investigativa e proporcionou uma retomada de conceitos relacionados à geometria espacial. Além disso, verificamos que a pergunta “Quais sólidos podemos construir passando o nylon uma vez em cada canudo?” conduziu os participantes ao teorema principal da Teoria dos Grafos: o teorema da existência de caminhos eulerianos.

Palavras-chave: Sólidos Geométricos; Geometria Espacial; Teoria dos Grafos; Caminhos Eulerianos; Ensino Médio.

1. Introdução

Este trabalho é parte de duas pesquisas de iniciação científica que estão inseridas no Projeto “Investigações sobre atividades didáticas desenvolvidas para o Pibid no Laboratório de Matemática do Ifes/Vitória”. Iniciamos os estudos ao verificar que a introdução à Teoria dos Grafos figura no Currículo Básico da Escola Estadual (ESPÍRITO SANTO, 2009) e do apontamento que poucos professores têm conhecimento desse ramo da matemática.

Compartilhamos da ideia de Malta (2008), quando ressaltamos a pertinência da Teoria dos Grafos na Escola Básica, mas nos questionamos sobre como este tópico poderia ser abordado em sala de aula. Vimos, em outra oportunidade (SÁ; SILVA, 2012a), que a história da matemática pode ser um caminho, mas também acreditamos que as aulas de geometria espacial apresentam-se como interessante cenário para abordagem de grafos no Ensino Médio.

Partimos de uma experiência de Giostri (*et al*, 2011) na construção de sólidos geométricos com canudos e nylon no contexto do Pibid ensino médio para organizarmos parte da oficina "Ensinando grafos no ensino médio por meio de resolução de problemas", ofertada em maio de 2012 no Laboratório de Ensino de Matemática – LEM/Ifes. Essa oficina nos possibilitou discutir tópicos iniciais da Teoria dos Grafos com um grupo de vinte e cinco participantes, entre eles alunos de licenciatura em matemática e professores da educação básica.

Este artigo sistematiza discussões sobre a construção de prismas, pirâmides e antiprismas e apresenta conclusões obtidas a partir do problema "Quais sólidos podemos construir passando o nylon uma vez em cada canudo?", o que nos levará a associação da construção do esqueleto desses sólidos ao teorema da existência de caminhos eulerianos. Antes, porém, reforçamos as contribuições da construção de sólidos com canudos para o ensino da geometria espacial e apresentamos uma introdução[1] à Teoria dos Grafos.

2. Introdução à Teoria dos Grafos

Um Grafo é uma estrutura matemática definida por G=(V,E)[2] formada por um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V, cujo os elementos de V são denominados vértices (ou nós) de G e os elementos de E são arestas de G. Aplicando essas definições ao Grafo G_1 apresentado a seguir, encontramos V = {a, b, c, d} e E = {(a,b);(a,c);(a,d);(b,d);(b,c);(d,d)}.

[1] Outras definições e teoremas sobre grafos podem ser encontrados em Lovász, Pelikán e Vesztergombi (2005), Jurkiewicz (2007) e Sá e Silva (2012b).
[2] A notação G=(V,E) vem do inglês, onde os V significa vertex (vértices) e E significa edges (arestas).

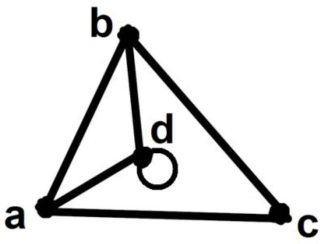

Figura 1: Grafo G_1

Um conceito que será bastante explorado neste trabalho é o de *Grau de um vértice, ou G(v)*, que pode ser definido como o número que representa a quantidade de arestas de um vértice dado. Por exemplo, em G_1, temos que G(a) = 3 e G(c) = 2. Saber identificar o Grau dos vértices de um grafo é importante na discussão de caminhos eulerianos, que é nossa principal discussão ao falar da construção de sólidos geométricos com canudos e nylon.

Chamamos de *caminho euleriano* o trajeto que percorre todas as arestas de um grafo. Esses caminhos classificam-se em fechado quando os vértices inicial e final coincidem ou em aberto, em caso contrário. A classificação do caminho de um grafo é realizada por meio do Teorema que diz que *um grafo conexo admite caminho euleriano fechado se, e somente se, todos os vértices têm grau par. O caminho euleriano é aberto quando exatamente dois de seus vértices tem grau ímpar*[3].

Cabe ressaltar que um grafo pode ser apresentado por meio de representação gráfica, na qual cada aresta é associada a linhas que interligam os pontos, que representam os vértices (figura 1). Mesmo sendo a mais comum, a representação gráfica não é a única, há outras formas de representar um grafo, como a matricial.

3. A construção de sólidos geométricos com canudos

Alguns livros e materiais sobre geometria espacial são disponibilizados para os alunos ou podem ser encontrados em bibliotecas. Contudo, a visualização no espaço tridimensional com materiais concretos torna-se mais interessante e atraente aos olhos de estudantes, pois é palpável, podendo ser visto de todos os ângulos. Concordamos com Kaleff (1998) e acreditamos que, assim, gera curiosidade e leva os alunos a explorarem e refletirem sobre sólido geométrico e seus elementos.

[3] Se um grafo possui mais de dois vértices com Grau ímpar, não é estabelecido nenhum caminho euleriano.

A experiência de Giostri (*et al*, 2011) evidencia a necessidade de ir além do desenho geométrico dos sólidos no quadro, ressaltando a importância do uso de materiais manipuláveis para a visualização e construção dos conhecimentos de geometria espacial pelos alunos. Essa manipulação facilita e torna o aprendizado sobre poliedros mais abrangente. Além disso, os estudantes ficam mais participativos quando a aula torna-se diferenciada das demais, favorecendo discussões e questionamentos a respeito da tarefa que está sendo realizada. Pensamos que essa atuação colabora com o ensino de Geometria, visto que é uma matéria pouco abordada no ensino básico. O artigo evidencia que a construção dos sólidos geométricos facilitou a análise e a identificação dos elementos dos poliedros e contribuiu na aprendizagem dos nomes desses sólidos.

A tarefa de construção de esqueletos de sólidos geométricos a partir de canudos e nylon envolve uso de materiais manipuláveis, e consequentemente, apresenta-se como uma abordagem diferenciada. Além de retomar conteúdos da Geometria Espacial, os participantes da oficina também tiveram a oportunidade de ter o primeiro contato com a Teoria dos Grafos. Ressaltamos que essa atividade foi parte de uma oficina mais ampla que envolveu outros problemas sobre grafos, foi a primeira parte dessa oficina com duração de 2 horas.

A proposta consistiu na visualização de alguns esqueletos de poliedros, a fim de analisar a existência, ou não, de caminho euleriano nesses sólidos posteriormente, os participantes foram convidados a construírem seus próprios esqueletos de poliedros previamente indicados para verificar na prática se é possível construir esses poliedros passando apenas uma linha de nylon por cada aresta. Essa atividade gerou discussões entre os participantes, eles identificavam algumas possibilidades, alguns preferiram utilizar o recurso do desenho para pesar nas possíveis soluções antes de praticar. Outros já realizaram a atividade diretamente na prática, essas diferentes maneiras de tentar solucionar os problemas foi discutida no geral com os participantes, solicitando que eles defendessem seus métodos de solução. Isso os levou a pensar e analisar os sólidos e seus elementos, envolvendo-os assim, na matéria de Geometria Espacial do Ensino Médio.

Destacamos que os participantes não conheciam a teoria dos grafos, mas perceberam as necessidades de se ter certo número de arestas saindo de cada vértice do sólido para conseguir realizar a atividade. Nesse momento iniciou-se a discussão sobre essas descobertas relacionando-as à existência ou não de caminhos eulerianos. Isso contribuiu para a formação desses licenciandos e professores, visto que foi um aprendizado do que não conheciam, que foi o teorema principal da Teoria dos grafos, relacionando a conteúdos de geometria espacial já conhecidos anteriormente.

4. Alguns conjuntos de sólidos geométricos

Sendo um poliedro construído a partir de canudos e nylon, ele não possui superfícies planas, portanto, não pode ser considerado como sendo de fato um sólido geométrico, deste modo, ao nos referirmos sobre a construção de sólidos geométricos através dos materiais citados, estamos na verdade fazendo referência a construção do esqueleto desse poliedro.

Para analisar a construção de esqueletos de sólidos geométricos com canudos e nylon à luz da teoria dos grafos, é interessante que algumas definições e conceitos sejam retomados. Dessa forma, inicialmente apresentamos cada conjunto de sólidos para em seguida realizar uma análise da possibilidade de construção desses sólidos com apenas um fio de nylon de forma que o fio não passe duas vezes pelo mesmo canudo. As definições apresentadas a seguir podem ser encontradas em Dolce e Pompeo (2005).

4.1Prismas

Definimos prisma como um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Para tanto, consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) de vértices A_1, A_2, ...A_n situado num plano α e um segmento de reta PQ, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma (mais precisamente prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α. Prisma também pode ser definido como a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções. Podemos simplificar essa definição e considerar um prisma como sendo um poliedro no qual duas faces paralelas (bases) são polígonos regulares e a demais faces são quadriláteros.

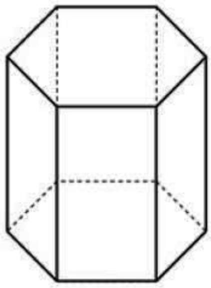

Figura 2: Prisma Pentagonal Reto

Para determinar o grau de cada vértice do prisma, tomemos um prisma genérico cuja base possui *n* lados. Segue que esse prisma possui *2n* vértices e *n+2* faces. Logo, podemos calcular a quantidade A de arestas do prisma por meio da Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$2n + (n+2) = A + 2$$

$$3n = A$$

Já que consideraremos a mesma aresta para a contagem do grau de *2* vértices, concluímos que o prisma de *n* lados possui grau[4] G (*s*) = *6n*. Como o número de arestas que incide em cada vértice é igual, podemos calcular o grau de cada vértice g(*v*) do poliedro dividindo o grau do prisma G(*s*) pela quantidade *q* de vértices.

$$g(v) = \frac{G(s)}{q}$$

$$g(v) = \frac{6n}{2n} = 3$$

Podemos observar essa característica pensando que de cada vértice partem duas arestas da base e uma aresta lateral. Dessa forma, como o grau de todos os vértices é ímpar, não é possível estabelecer nenhum caminho euleriano e consequentemente é impossível construir esse sólido nas restrições feitas.

4.2Pirâmides

Entendemos como pirâmide todo poliedro formado por uma base e um vértice oposto a ela, na qual esse vértice une todas as faces laterais triangulares. Para facilitar o

[4] Consideramos Grau de um sólido como sendo a soma dos graus de todos os seus vértices: G(s) = g(v_1) + g(v_2) + ... + g(v_n).

entendimento dos cálculos, chamaremos de cume o vértice não pertencente à base da pirâmide.

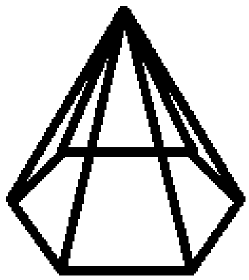

Figura 3: Pirâmide hexagonal

Para determinar o grau de cada vértice das pirâmides, tomemos uma pirâmide genérica cuja base possui *n* lados. Segue que essa pirâmide possui *n+1* vértices e *n+1* faces. Logo, podemos calcular a quantidade A de arestas do prisma por meio da Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$(n+1) + (n+1) = A + 2$$

$$2n = A$$

Já que consideraremos a mesma aresta para a contagem do grau de *2* vértices, concluímos que o prisma de *n* lados possui grau G (*s*) = *4n*. Como a quantidade de arestas que incide no cume é igual ao número de lados da base, G(*cume*) = *n*, e como o grau de cada um dos vértices da base é igual, podemos calcular o grau de cada vértice da base do poliedro dividindo o grau do prisma G(*s*) da seguinte forma:

$$\mathrm{g}(v) = \frac{\mathrm{G}(s) - n}{n}$$

$$\mathrm{g}(v) = \frac{4n - n}{n} = 3$$

Analogamente à discussão realizada a partir da visualização dos prismas, concluímos que no caso da pirâmide os vértices da base possuem sempre *grau 3* enquanto o cume possui *grau n*. Ou seja, considerando a figura de uma pirâmide hexagonal apresentada abaixo, podemos observar que na base temos um polígono de $n \geq 3$ lados, logo, há mais de 2 vértices com grau ímpar. Portanto, não é possível obter nenhum caminho euleriano, levando então a impossibilidade de construir esqueleto de tal sólido com canudos e nylon.

4.3Antiprismas

Definimos antiprisma como sendo um poliedro convexo, na qual suas bases são dois polígonos regulares e congruentes, de *n* lados cada, situados em planos paralelos, sendo esses, conectadas por uma faixa de polígonos triangulares, as faces laterais, de forma que cada vértice de base superior é equidistante de dois vértices da base inferior, portanto podemos definir os vértices como sendo o dobro do número de lados de uma base (*2n*). Sendo assim, podemos analisar e encontrar o grau de cada vértice do antiprisma para saber se podemos construí-lo através de canudos e nylon.

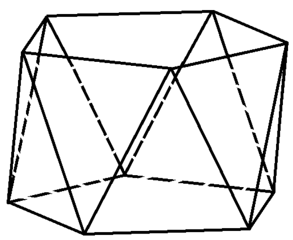

Figura 4: Antiprisma de base pentagonal

Para determinar o grau de cada vértice dos antiprismas, tomemos um antiprisma genérico cuja base possui *n* lados. Segue que esse prisma possui *2n* vértices e *2n+2* faces. Logo, podemos calcular a quantidade A de arestas do prisma por meio da Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$2n + (2n+2) = A + 2$$

$$4n = A$$

Já que consideraremos a mesma aresta para a contagem do grau de *2* vértices, concluímos que o prisma de *n* lados possui grau G (s) = 8*n*. Como o número de arestas que incide em cada vértice é igual, podemos calcular o grau de cada vértice g(v) do poliedro dividindo o grau do prisma G(s) pela quantidade q de vértices.

$$\mathrm{g}(v) = \frac{\mathrm{G}(s)}{q}$$

$$g(v) = \frac{8n}{2n} = 4$$

Podemos analisar essa característica pensando que cada vértice partem *2* arestas da base e *2* arestas laterais. Ou seja, podemos concluir que o grau de todos os vértices é par, e assim, é possível estabelecer caminho euleriano e construir esse tipo de sólido com apenas um fio de nylon e passando o fio apenas uma vez em cada canudo.

5. Algumas considerações

Acreditamos que oficinas de laboratório são importantes para que os licenciados e professores tenham oportunidade de vivenciar atividades matemáticas que promovam o diálogo entre diferentes tópicos da matemática.

Concluímos com este estudo que a construção de sólidos geométricos com canudos promove discussões que retomam a conceitos importantes da Geometria Espacial. Durante a oficina, os participantes perceberam que a construção de sólidos, nas restrições feitas, só é possível se todos os vértices do sólido tiverem número par de arestas ligadas a ele. Dessa forma, verificamos que a pergunta “Quais sólidos podemos construir passando o nylon uma vez em cada canudo?” conduz os participantes ao teorema principal da Teoria dos Grafos: o teorema da existência de caminhos eulerianos. Ressaltamos a importância de relacionar diferentes conteúdos e partir de experimentações e investigações, o que levou os participantes a concluírem importantes fundamentos de um conhecimento ainda não conhecido.

A proposta de atividade apresentada neste trabalho incentivou o lado investigativo dos participantes da oficina. Acreditamos que discussões como as apresentadas podem ser realizadas também no Ensino Médio. As análises feitas algebricamente podem ser realizadas de forma mais intuitiva pelo aluno da educação básica, estimulando assim a visualização espacial dos sólidos investigados.

6. Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (Ifes) e à Fundo de Apoio à Ciência e Tecnologia do Município de Vitória (Facitec) pela oportunidade deste estudo e aos participantes da oficina pela participação na

atividade. Reconhecemos que esse espaço de interlocução com os participantes ampliam as possibilidades de reflexão sobre os processos de ensino aprendizagem da matemática.

7. Referências

DOLCE, O.; POMPEO, J. N.. **Fundamentos de matemática elementar 10**: geometria espacial .6 ed. São Paulo: Atual, 2005.

ESPÍRITO SANTO (ESTADO). Secretaria da Educação. (2009) **Currículo Básico Escola Estadual - Ensino médio**: área de Ciências da Natureza. Vitória: SEDU, 2009.

GIOSTRI, A. B. *et al.* Construção de sólidos geométricos com uso de materiais alternativos. In: II Encontro Estadual do Pibid-ES, 2011, Vitória. **Anais.** Vitória: IFES, 2011.

JURKIEWICZ, S.. **Grafos**: Uma introdução. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007. N. 5. Parte integrante da coleção de 2007. Disponível em <http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas_pic2010/Apostila5-grafos.pdf>. Acesso em: 26 de maio de 2012.

KALEFF, A. M. M. R.. **Vendo e entendendo poliedros**. Niterói: EdUFF, 1998.

LÓVASZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K..**Matemática discreta**: elementar e além. Tradução de Ruy de Queiroz. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MALTA, G. H. S.. **Grafos no ensino médio**: uma inserção possível. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.

SA, L. C.; SILVA, S. A. F.. Uso de problema histórico para abordagem de Grafos no Ensino Médio. In: **Anais da VII Jornada de Iniciação Científica, Desenvolvimento Tecnológico e Inovação do Ifes**. Vitória, 2012a.

SA, L. C.; SILVA, S. A. F.. De Konisberg a Vitória: o problema das pontes da capital capixaba em uma atividade didática sobre grafos. In: Sociedade Brasileira de Matemática

(SBM), **Anais da VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática.** Campinas: SBM, 2012b.