A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Rosilda dos Santos Morais
UNESP
rosildamorais@yahoo.com.br

Lourdes de la Rosa Onuchic
UNESP
lronuchic@gmail.com

Luis Ricardo Alves Soares
SESI – CE 422
luismat@live.com

Renata Roque
professora da rede pública de ensino
reehh@hotmail.com

Resumo:
Este trabalho é parte de um *Estudo de Caso* realizado em um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade particular na cidade de Piracicaba/SP, nos anos de 2010/11. A Resolução de Problemas era uma das disciplinas presentes na grade curricular do curso, com início no 4º período, estendendo-se até o 6º período, quando os estudantes já estavam concluindo o curso. Foi proposto aos estudantes um trabalho teórico sobre a Resolução de Problemas ao longo da história e da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino nas aulas de Matemática, conforme preconizam documentos oficiais, objetivando melhor preparar esses alunos, futuros professores, para o exercício da docência. Verificou-se ao final de três semestres que os futuros professores, eram capazes de pesquisar problemas, resolvê-los, levantar questionamentos sobre eles a fim de utilizá-los como desencadeadores de novos conhecimentos matemáticos, conforme propõe a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Formação de Professores.

1. Introdução

A formação inicial docente tem sido muito discutida nas últimas décadas, pois o trabalho realizado com alunos, futuros professores, nessa etapa da formação, terá efeito direto na sala de aula.

O local onde professor deveria iniciar o trabalho como educador para uma grande massa da população, a escola, tem sido o local onde ele efetivamente tem aprendido a exercer a docência, condição que deveria ter-se iniciado quando ele ingressou na universidade. A escola tornou-se espaço de aprendizagem do professor - o que não é de todo ruim não fosse esse o único espaço de aprendizagem para uma grande parcela dessa categoria -, pois muito do que ele aprendeu na universidade não apresenta relação nenhuma com o que ele tem que, agora, ensinar. A universidade tem deixado muito a desejar na formação inicial docente, pois forma seus professores a qualquer custo para atender às demandas sociais, que clamam por esses profissionais. O preço pago é o despreparo desses professores que, na grande maioria, quando colocados na sala de aula para exercer o papel que lhe foi designado, repetem velhas práticas, aquelas que aprenderam quando foram alunos, na escola básica.

Nas últimas décadas, muitos têm sido os esforços para mudar esse cenário, mas, são tantas as variáveis que caracterizam a instituição *escola*, que toda mudança parece ínfima. Esses esforços são constatados quando se faz uma busca rápida nas muitas tendências no ensino - que neste trabalho se ocupa do ensino de Matemática - quando se observa as diferentes áreas que se juntaram à Matemática no movimento de discussão e reflexão em torno das dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Este trabalho é mais um desses movimentos no sentido de mudar o tão difícil cenário da formação inicial docente, pois ele traz elementos que comprovam que, se houver uma mudança nas bases, quando o professor está ainda se tornando professor, aquilo que ele aprendeu na universidade poderá vir a incorporar sua prática, pois teve relação direta com o que irá ensinar. Seu foco será o trabalho de alunos, futuros professores, depois de eles terem vivenciado, na prática, metodologias de ensino que poderão ser incorporadas em seu trabalho, quando se tornarem professores.

2. A formação Inicial docente

A formação inicial docente de professores em geral - de Matemática em particular - tem sido motivo de preocupação de pesquisadores ao longo da história do ensino de

Matemática, sendo mais evidenciadas a partir do início do século XX. Pesquisas têm apontado que a formação inicial docente é deficiente, mas que esforços no sentido de melhorar essa prática têm sido a preocupação de todos os envolvidos na área. Ao encerrar os cursos de formação inicial docente, o professor, recém-formado, não se sente apto para atuar na sala de aula da Educação Básica, pois os anos que passou na universidade não foram o bastante para lhe oferecer segurança no exercício da docência.

George Polya em 1962, em seu livro *Mathematics and Discovery* (1962), ressaltou a fragilidade dos cursos de formação inicial de professores para a escola secundária (atual Ensino Médio) dizendo que a preparação de professores para este nível de ensino era insuficiente e que competia aos Departamentos de Educação e Departamentos de Matemática, ou seja, a todos os envolvidos na formação inicial docente, esforços para mudar o cenário. Essa mudança deveria, segundo Polya, iniciar-se pela revisão dos cursos oferecidos a futuros professores da escola secundária. Anterior a Polya, em 1908, Félix Klein no livro *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* já havia manifestado preocupação com a formação docente, alegando que jovens universitários, recém-formados, eram confrontados com problemas na sala de aula que não se referiam, em nenhum aspecto, às coisas com as quais eles haviam sido envolvidos na escola. Até aquele momento a prioridade dos professores de Matemática, em sua maioria homens, voltava-se à ciência sem nenhuma preocupação com a matemática escolar.

Mais de um século se passou desde as primeiras preocupações com a formação inicial docente e reconhece-se que muito já foi feito no sentido de melhorar essa tão importante etapa da formação, seja por meio de congressos, artigos, grupos de pesquisa, seminários, simpósios, etc. Contudo, a realidade desses cursos, no que diz respeito a transformações que visam melhor preparar o docente, capacitando-lhe à *proficiência de ensino*[1], caminha a passos lentos. Uma justificativa para essa lentidão, como apontou Blanco (2003), refere-se aos distintos estamentos que envolvem a formação docente: sociedade, instituições, pesquisadores, formadores de professores, professores, alunos. Para a autora, apesar de a formação docente estar em constante processo de evolução, essas

[1]Kilpatrick et.al. (2001)

particularidades fazem com que ela seja vista e sentida como problemática. Um aspecto do problema, relativo a esta etapa da formação, "seria a definição de programas de formação que respondessem às demandas provenientes dos distintos setores afetados; um programa que possibilitasse a formação de profissionais do ensino com capacidade para desenvolver suas tarefas no âmbito de sua própria e contínua aprendizagem e desenvolvimento profissional" (p.51-52).

Silver (2006) afirmou que apesar de o cenário estar longe do desejado, há um progresso significativo realizado ao longo das últimas décadas, especificamente a partir da década de 1990, com currículos mais provocativos e instigantes; relatos de experiências bem sucedidas no ensino de Matemática estão à disposição com mais facilidade; há uma melhor noção do que vem a ser um professor de matemática bem "qualificado"; e o desenvolvimento da consciência para a necessidade de uma melhor qualificação profissional.

O presente trabalho traz resultados que corroboram com as expectativas de Blanco e Silver no que se refere a ações movidas para melhorar o cenário atual, relativo à formação inicial docente de professores de Matemática. Trata-se de um *Estudo de Caso*, realizado em um curso de Licenciatura em Matemática, com duração de 3 anos, em uma universidade particular na cidade de Piracicaba, São Paulo.

O *Estudo de Caso* vem da tradição da pesquisa médica e consiste de uma análise holística que considera "a unidade social estudada como um todo, seja um indivíduo, uma família, uma instituição ou uma comunidade, com o objetivo de compreendê-los em seus próprios termos" (GOLDENBERG, 2003, p.33). O procedimento utilizado foi a *observação participante* que teve seus registros em um diário de campo. Neste registro foram consideradas as participações dos estudantes, futuros professores, nos trabalhos propostos e na dinâmica de organização dos trabalhos em grupos.

3. A disciplina *Resolução de Problemas*

O curso de Licenciatura em Matemática da universidade em estudo havia passado por uma reestruturação (2007) em seu projeto pedagógico, com uma nova grade curricular, visando a atender às demandas atuais na formação docente. Sua ementa apregoava que fossem apresentadas diferentes tendências no ensino e na pesquisa em Educação Matemática e, por essa razão, optou-se por trabalhar textos teóricos sobre diferentes tendências em *Educação Matemática* no primeiro semestre, dentre as quais a *Resolução de Problemas* foi uma das abordadas. No segundo semestre foram propostos problemas que deveriam ser resolvidos à luz dos pressupostos teóricos da *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas*[2]. Por último, no terceiro semestre, os alunos deveriam preparar um projeto de aula de Matemática onde deveriam considerar a *Metodologia* como eixo norteador. Esse trabalho foi realizado no segundo semestre de 2010 e durante todo o ano de 2011. O estudo abrangeu as dimensões teórica e prática[3] da *Resolução de Problemas*[4].

4. Desenvolvimento

Inicialmente foi proposto aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática (eram 11 os alunos) o estudo de algumas tendências no ensino e pesquisa em Educação Matemática. Foram contempladas: *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas, O uso de Tecnologias no Ensino de Matemática* e a *Modelagem Matemática como estratégia de ensino*. O favoritismo em relação a esses temas e não a outros dentro da grande área EM se deu em razão da necessidade de delimitar o trabalho, imperando, ainda, a simpatia ou ignorância da professora (uma das autoras deste texto) pelas tendências escolhidas.

No primeiro semestre do oferecimento da RP (quarto do curso), o desenvolvimento da disciplina compreendeu o estudo teórico das tendências escolhidas e a elaboração de um relatório final. Após esse semestre, a professora propôs que as aulas fossem desenvolvidas

[2] A partir deste momento do texto, sempre que for feito o uso da palavra Metodologia, entenda-se: *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas*.

[3] Considera-se teoria o estudo de publicações (artigos, relatos, documentos sobre a Resolução de Problemas, trabalhos de grupos que pesquisam o tema, etc.) sobre Resolução de Problemas. O aspecto prático refere-se à aplicação da Metodologia nas aulas de Matemática.

[4] Os R e P maiúsculos indicam a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e, r e p, referem-se ao ato de resolver problemas.

tendo a Metodologia como eixo norteador seguindo o que propõe Onuchic (1999)[5] para uma aula baseada na *Metodologia*. Com isso, problemas foram propostos – sendo um problema para cada aula com duração de 120 minutos[6] – aos alunos, que trabalharam em grupos, conforme propõe a *Metodologia*. Na RP eram cinco os grupos.

Em vez de apresentar neste trabalho os problemas que foram propostos pelo professor na disciplina RP[7], dada a limitação de páginas deste texto, priorizou-se por apresentar o resultado dessa ação refletido no trabalho dos alunos, futuros professores, através de aulas preparadas por eles, à luz do referencial teórico estudado na RP, ao longo de pouco mais de dois semestres. Essas aulas foram ministradas a seus colegas, ainda no terceiro semestre da RP.

Iniciado o terceiro semestre da RP, último período do curso, aos alunos foi dada a tarefa de pesquisar por diferentes problemas buscando identificar aqueles que seriam considerados bons problemas, isto é, problemas que serviriam como ponto de partida para o ensino-aprendizagem de novos conceitos matemáticos, como pressupõe a *Metodologia*: "O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir" (p.82), pois nessa *Metodologia*,

> os problemas são postos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento do aluno é feita continuadamente, durante a resolução do problema. (ONUCHIC;ALLEVATO, 2011, p.85)

---

[5] Onuchic (1999): preparação do problema; leitura individual do problema; leitura conjunta do problema; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca de consenso; formalização do conteúdo.

[6] Em alguns problemas, dado o "calor" da discussão, a formalização foi deixada para a semana seguinte.

[7] O trabalho desenvolvido pelo professor da RP segue na linha do que é desenvolvido no grupo de pesquisa GTERP, do qual é integrante. Segue o link do GTERP: http://grupogterp.blogspot.com.br/ ou http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=quem-somos

Foram disponibilizadas algumas aulas para a pesquisa de problemas e, ao final, cada grupo selecionou um problema para trabalhar, tendo a *Metodologia* como suporte. Após a escolha do problema, uma nova etapa, que incluía além da resolução do problema, o questionamento sobre quais conceitos poderiam ser desenvolvidos com o problema, o levantamento de questões norteadoras, pensar num *problema auxiliar*[8], verificar se o enunciado era claro, dentre outras ações, foi iniciada.

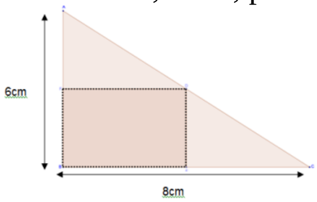
Após a seleção e estudo do problema, os alunos, futuros professores, organizaram-se para elaborar o plano de aula. As aulas foram ministradas nos meses de Outubro e Novembro de 2011.

5. Resultados dos trabalhos dos alunos

Será apresentado neste texto o trabalho de apenas um dos grupos, chamado G1 neste trabalho. Em momento oportuno serão apresentados novos trabalhos que contemplarão o que foi desenvolvido por outros grupos. O G1 era formado por dois alunos, hoje, professores e autores deste trabalho, que propuseram o mesmo problema em duas disciplinas diferentes: Na RP e no *Estágio Supervisionado*[9] (ES), que era desenvolvido no mesmo semestre da aplicação do problema, na RP. No entanto, diferentes abordagens seriam dadas ao problema em cada uma das disciplinas.

O problema escolhido pelo G1: "É dada uma folha de cartolina como na figura abaixo. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima" (IEZZI, MURAKAMI, 2008, p. 150).

A *Figura 1*, ao lado, ilustra o enunciado:



[8] "é aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro – o nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo" (POLYA, p.119, 1995)

[9] As aulas de Estágio Supervisionado (ES), no primeiro semestre, eram desenvolvidas na universidade. Eram estudados documentos oficiais que regulamentam o Estágio Supervisionado, como também, eram dadas orientações aos alunos de como elaborar uma aula que deveria ser ministrada, na universidade, ao professor (mesmo professor na disciplina de ES e RP) e aos colegas de sala. No segundo período do ES os alunos iam para as escolas regulares e ocupavam salas de aula de Matemática, apenas observando o trabalho do professor. Já no terceiro período do ES, faziam as regências

A *Figura 1* é exatamente igual à apresentada no livro didático. Contudo, na folha que foi entregue aos alunos optou-se por não indicar as medidas do triângulo, para que os mesmos pudessem medir, com régua, suas dimensões e, posteriormente, definir os intervalos de valores reais, fechados, com os quais poderiam trabalhar. Ao solicitar a medição, desejava-se que os alunos fizessem uso de instrumentos de medidas – no caso a régua – para trabalhar com intervalos reais. Esses intervalos determinariam o domínio real da função, que seria definida no final da aula. A proposta era a de que o aluno pudesse, por ele mesmo, observar o que era um intervalo real, como também, verificar nesse intervalo o domínio de uma função.

No ES, o foco dado ao problema foi na construção de gráficos de funções a partir do exemplo da construção do gráfico de uma Função Quadrática - cujas variáveis eram a base dos retângulos inscritos no triângulo e sua respectiva área - por meio da construção de uma tabela de valores, com pares ordenados, e do software Graph®. Na aula de RP o enfoque dado foi para as relações algébricas e geométricas necessárias para a resolução do problema.

Os conceitos que poderiam ser trabalhados no problema e elencados pelo G1 foram: Área de Figuras Planas; Congruência de Triângulos; Semelhança de Triângulos; Razão e Proporção; Expressões Algébricas; Plano Cartesiano; Noção Empírica de Função; Noção Empírica de Limite; Intervalos Reais; Função Quadrática; Gráficos de Funções; Pontos de Máximos e Mínimos; Função, Limites e Derivação.

As questões abaixo foram levantadas pelo G1 para o direcionamento da aula:

1. Quais as dimensões da folha de cartolina?
2. Quais os possíveis valores para as bases e alturas do retângulo procurado?
3. Dado o triângulo ABC (desenhado e recortado numa cartolina), podem-se inserir, dentro desse triângulo, alguns retângulos que, visualmente, aparentam ter área máxima. Ao registrar, na Tabela 1, os valores das bases dos retângulos construídos e de suas respectivas áreas como pares ordenados, resultantes do produto da base escolhida pela altura identificada no retângulo, obter-se-á uma coletânea de retângulos. Algum desses retângulos aparenta ser o retângulo procurado?

Medida	Base (x cm)	Área [A(x) cm^2]
1		
2		
...		
9		
10		

Tabela 1

4. Pode-se perceber que, para cada valor da base do retângulo, existe uma área correspondente, o que nos sugere que a área da figura é função da base. Sendo assim, sejam x a medida da base do retângulo construído, e A(x), isto é, a área A em função de x, formando pares ordenados, que podem ser plotados no Plano Cartesiano. Para isso, utilizando o software Graph®, responda: **a)** qual o comportamento desses pares ordenados no Plano Cartesiano? Que tipo de figura esses pares ordenados sugerem?; **b)** matematicamente, pode-se construir uma lei de formação para tal figura, ou seja, uma expressão analítica que representa a relação funcional entre a base do retângulo e sua área? **c)** essa figura apresenta pontos extremos? Quais seriam esses pontos?; **d)** de que modo se podem encontrar esses pontos e o que eles nos fornecem?

5. Existe algum padrão de semelhança e congruência de triângulos neste problema? Caso exista, observando tal padrão você é capaz de deduzir alguma relação algébrica que lhe permita encontrar a função determinada anteriormente pelo software Graph®?

6. Você percebe algum outro método que lhe permita "desconfiar" de ter encontrado o retângulo de área máxima procurado?

7. De quais conceitos matemáticos este problema trata?

Obs: A altura necessária para o cálculo da área foi obtida pelo processo de medição, com régua, indo do x assumido como base do retângulo, até a hipotenusa do triângulo ABC. As questões levantadas pelo G1 não foram entregues aos alunos, elas eram lançadas à medida que o problema ia sendo desenvolvido.

6. O desenvolvimento da aula do G1

Na aula de ES, o G1 propôs o que chamou de "método experimental", pois cada aluno traçou, no triângulo da *Figura 1*, retângulos que imaginava ter área máxima, mediu com régua suas dimensões e calculou sua área, manualmente. Os registros (base do retângulo e área respectiva) foram colocados na *Tabela 1* e em seguida, registrados num *Plano Cartesiano* na planilha do Graph®, um software livre disponível na web para download. Uma das ferramentas desse aplicativo, após inserir os pontos numa tabela, plota o pontos no *Plano Cartesiano*. Noutra ferramenta do aplicativo, pôde-se pedir uma melhor curva para a série de pontos selecionados e, concomitante, o aplicativo deu a expressão analítica da função que representava a curva obtida a partir dos pares ordenados coletados.

A expressão analítica encontrada referia-se a uma Função Quadrática, cujo valor máximo indicava o par ordenado procurado. O passo seguinte caracterizou-se pela busca das coordenadas desse par ordenado.

Sobre a questão **4a)**, ao serem questionados, todos os alunos concordaram que a figura seria algo parecido com uma parábola, representação geométrica de uma Função Quadrática, cujas particularidades (concavidade, zeros e vértice) foram trabalhadas. Foi possível notar, nessa etapa, que no registro de alguns alunos, alguns pontos estavam dispersos em relação aos demais, o que os motivou a retomar o processo de medição verificando que se tratava de *erros aleatórios*. O estudo realizado levou o G1 a trabalhar o cálculo do vértice da parábola e o coeficiente angular da reta tangente à curva no par ordenado procurado (nesse ponto o coeficiente angular, obtido pela derivada da função, é nulo). Assim, cada aluno pôde calcular a base, que levava à área máxima do retângulo, encontrando sua altura máxima pelo processo de medição, e esgotando o que havia sido proposto para a aula de ES. O principal objetivo do G1 com a aula de ES foi o de trabalhar com a *Metodologia* nas aulas de Matemática, num curso de formação inicial docente, tendo o apoio das Tecnologias da Informação como ferramentas de trabalho.

Na aula de RP foram levantadas outras possibilidades de resolução do problema e, com elas, conceitos matemáticos importantes foram construídos. Duas dessas possibilidades envolviam construções por dobraduras.

6.1 Dobraduras

Um grupo de alunos, chamado neste texto de A1, construiu o triângulo ABC com as medidas propostas pelo problema e o recortou. Perceberam que ao sobrepor o vértice A e o vértice C, do triângulo ABC, ao vértice B, acabavam por construir um retângulo que se inscrevia perfeitamente no triângulo ABC (*Figura 2*).

Como justificativa, A1 afirmou que a composição de dois triângulos retângulos idênticos formou o retângulo BEDF, não havendo outra possibilidade de compor um retângulo, a partir de dois triângulos, que seja inscrito no triângulo retângulo ABC. Sabendo que a soma das áreas dos dois triângulos (BFD e BDE) corresponde à área de um retângulo, A1 verificou que o retângulo obtido é o de área máxima procurado. Constatou ainda, utilizando a régua, que os vértices F e E do retângulo BEDF eram pontos médios dos catetos AB e BC, respectivamente, do triângulo retângulo ABC. Desse modo, as dimensões do retângulo de área máxima procurado eram:

$$\begin{cases} BF = \frac{1}{2}.AB \rightarrow BF = \frac{1}{2}.6 \therefore BF = 3cm \\ BE = \frac{1}{2}.BC \rightarrow BE = \frac{1}{2}.8 \therefore BE = 4cm \end{cases}$$

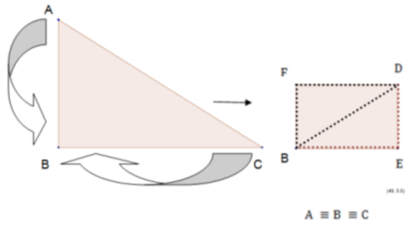


Figura 2

A1 prolongou sua análise acerca do problema, questionando-se se o segmento de reta $\overline{BD}$ poderia ser a mediana relativa ao lado AB do triângulo e bissetriz do ângulo B. Para tanto A1 percebeu as seguintes congruências nos triângulos retângulos AFD (adjacente ao lado DF) e DEC (adjacente ao lado DE):

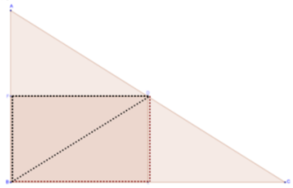


Figura 3

$$\begin{cases} AF \equiv DE \ldots (1) \\ \hat{F} \equiv \hat{E} \ldots (2) \\ FD \equiv EC \ldots (3) \end{cases}$$

Em conclusão, A1 afirmou: resulta de (1), (2) e (3) e do caso Lado Ângulo Lado (LAL) para congruência de triângulos, que os triângulos retângulos AFD e DEC são congruentes. Portanto as hipotenusas AD e DC possuem a mesma medida o que torna o ponto D ponto médio do lado AC do triângulo retângulo ABC. Concluiu-se então que o segmento $\overline{BD}$ é a mediana relativa ao lado AC do triângulo ABC.

Para verificar se $\overline{BD}$ era bissetriz do ângulo B, o G1 fez a seguinte intervenção: Sejam os triângulos ADB e BDC (*Figura 4*).

Do caso de congruência de triângulos visto anteriormente, temos que os lados AD, BD e CD são congruentes. Sendo assim, os triângulos ADB e BDC são Isósceles o que implica em $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}D$, bem como, $D\hat{C}B \equiv D\hat{B}C$. Contudo, os lados AB e BC são diferentes, o que torna também diferentes os ângulos $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$. Dessa forma, o segmento de reta $\overline{BD}$ não é bissetriz do ângulo B.

O trabalho acima descrito, resultado dos questionamentos do G1 com os grupos, foi ocorrendo à medida que eram feitos questionamentos sobre o problema. Partindo da dobradura, uma operação manual proposta pelo grupo A1, buscou-se auxílio na Álgebra para responder os questionamentos levantados.

Outro grupo, chamado nesse texto de B1, desenhou o triângulo AGC - que na *Geometria Euclidiana Plana* é a reflexão do triângulo ABC, sendo *AC* o eixo de simetria - formando um retângulo (*Figura 5*) de medidas 6cm e 8cm. Ao dobrar o retângulo ao meio, verticalmente e horizontalmente, foram gerados 4 retângulos menores com dimensões congruentes, ao menos experimentalmente. Um desses retângulos ficou perfeitamente inscrito dentro do triângulo ABC, conforme a figura abaixo:

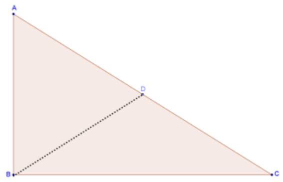


Figura 4

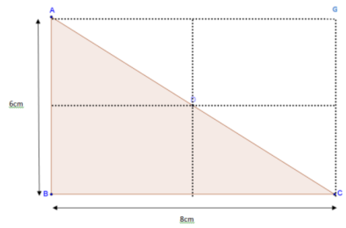


Figura 5

Dessa forma, B1 argumentou que a área máxima do retângulo procurado seria igual a um quarto da área do retângulo ABCG:

$$\mathrm{A_{máx}} = \frac{1}{4}\,.\,\mathrm{S_{ABCG}} \longrightarrow A_{\mathrm{máx}} = \frac{1}{4}\,.\,(6.8) \longrightarrow \mathrm{A_{máx}} = 12\ \mathrm{cm}^2$$

Visto que as dobraduras foram feitas em cima dos pontos médios dos lados do retângulo ABCG, constatou B1, foi imediato afirmar que as medidas dos lados do retângulo de área máxima inscrito no triângulo ABC é igual à metade das medidas dos lados do retângulo ABCG. Dessa forma, as dimensões do retângulo de área máxima procurado são 3cm e 4cm, visto que (3cm) x (4cm) = 12cm^2, que corresponde a ¼ da medida da área do retângulo ABCG. Nesse instante, outro grupo, chamado de C1, questionou se o retângulo de área máxima (igual a 12cm^2), inscrito no triângulo ABC, seria único.

Uma nova problemática foi instaurada e, nesse momento, questionou-se, inclusive, o enunciado do problema que dizia: “Determine <u>esse</u> retângulo, sabendo que a área é máxima”. Veja que o uso da palavra “esse” determina um único retângulo, mas, naquele momento, com o questionamento do C1, todos os alunos pensaram na possibilidade de haver outros retângulos. Por exemplo, o retângulo de base 3cm e altura 4cm poderia ser um dos inscritos no triângulo ABC? E o retângulo de base 2cm e altura 6cm?

Após algum tempo, C1 argumentou que se a base do retângulo está sobre o lado BC do triângulo ABC, esta base – que denotaremos por b – está contida no intervalo]0;8[. Do mesmo modo, se a altura do retângulo está sobre o lado AB do triângulo ABC, esta altura – que denotaremos por h – está contida no intervalo]0;6[: $\begin{cases} 0\text{cm} < b < 8cm \\ 0\text{cm} < h < 6\ cm \end{cases}$

Para resolver essa questão, o que permitiria encontrar as dimensões do retângulo de área máxima, de forma segura, o G1 buscou apoio na Álgebra.

6.2 Método Algébrico

Buscou-se por uma função que relacionava a área do retângulo com sua base a partir da Semelhança de Triângulos, nos triângulos ABC e AED (Caso: Ângulo Ângulo Ângulo - AAA).

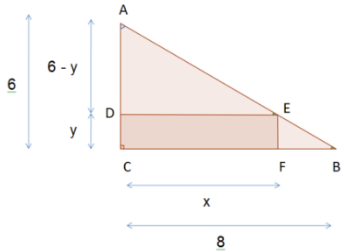


Figura 6

Assim, o G1, utilizando a fórmula que calcula a área A do retângulo DEFC (um retângulo genérico que indica o de área máxima procurado) e a relação de semelhança entre os triângulos ABC e AED escreveu: $\begin{cases} A = x.y & \dots(1) \\ \frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} & \dots(2) \end{cases}$

De (2) temos:

$\frac{6}{8} = \frac{6-y}{x} \rightarrow y = -\frac{6}{8}x + 6 \quad \dots(3)$

Finalmente substituindo (3) em (1) teremos que:

$$A(x) = x.\left(-\frac{6}{8}x + 6\right) \therefore A(x) = -\frac{6}{8}x^2 + 6x$$

Assim, A(x) é uma Função Quadrática, cujo gráfico apresenta um único ponto de máximo. Por essa razão, poder-se-ia encontrar um único retângulo de dimensões máximas, derrubando, por meio da Álgebra, a conjectura de que poderia haver mais de um retângulo de área 12cm² inscrito no triângulo ABC e garantindo que o enunciado do problema, com o uso da palavra “esse”, estava correto.

Fazendo uso dos conhecimentos prévios sobre o cálculo do vértice da Parábola e gráfico de uma Função Quadrática, o G1 deu continuidade: Seja x_v a abscissa do vértice da parábola A(x), que neste caso coincide com a medida da base do retângulo de área máxima procurado, então: $x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = -\frac{6}{2.\left(-\frac{6}{8}\right)} \rightarrow x_v = -\frac{6}{-\frac{6}{4}} \rightarrow x_v = 4cm$

Substituindo x = 4cm em (3): $y = -\frac{6}{8}.4\text{cm} + 6\text{cm} \longrightarrow y = 3\text{cm}$

Com isso o G1, juntamente com os demais grupos, concluiu que existia um único retângulo de área máxima igual a $12cm^2$ inscrito no triângulo retângulo ABC. Como justificativa para C1, foi-lhes dito que havia outros retângulos com área igual a $12cm^2$, como já havia sido diagnosticado, contudo, não são perfeitamente inscritíveis no triângulo ABC.

Outra forma de resolver o problema, mas que não foi abordada pelo G1, é com o apoio da *Geometria Analítica*. Se o triângulo ABC fosse desenhado no Plano Cartesiano, estando seus catetos apoiados no sistema de eixos coordenados, poder-se-ia, por meio da equação da reta f(x) = y = ax + b, encontrar o coeficiente angular da reta (a) e o coeficiente linear (b). Isso porque, a equação da reta procurada é a hipotenusa do triângulo ABC. O coeficiente angular é calculado pela equação $a = tg \propto = \frac{cat\ oposto}{cat\ adjacente} = \frac{6}{8}$, mas como a reta procurada é decrescente, o coeficiente angular é negativo, logo, $a = -\frac{6}{8}$ e o coeficiente linear, ponto onde a reta intercepta o eixo Oy, é 6, ou seja, b = 6. A equação procurada é y = $-\frac{6}{8}x + 6$. Com essa equação, atribuindo valores para x, que no caso do problema é a base dos retângulos, calcula-se a altura y analiticamente e, consequentemente, a área desses retângulos. Existem infinitos retângulos inscritíveis no triângulo ABC (e isso pode ser comprovado atribuindo qualquer valor real positivo para x). Contudo, só há um deles com área igual a 12cm² inscrito no triângulo ABC, logo, o de área máxima.

O G1, durante o estudo dos conceitos que poderiam ser ensinados com o problema verificou a possibilidade de abordar o conceito de Derivadas. Durante a aplicação do problema, essa abordagem não foi sugerida pelos alunos e coube, ao G1, apresentá-la.

Considerando que as funções polinomiais são diferenciáveis em todo o seu domínio, disse o G1, a derivada de primeira ordem $\left[A'(x) = -\frac{6}{4}x + 6\ \right]$ da função polinomial $\mathrm{A(x)} = -\frac{6}{8}\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x}$, interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente à curva num dado ponto da função, quando igualada à zero, indica os pontos de máximo ou de mínimo da função. Igualando $\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dx}}$ a zero, obtém-se x = 4, que é ponto de máximo da função e o valor da base do retângulo de área máxima.

Para calcular o valor de y, largura do retângulo, basta substituir x = 4 em (3): y = $-\frac{6}{8}x + 6$, obtendo o valor de y que é 3. Essa abordagem usando conceitos do Cálculo Diferencial e Integral mostra-nos uma importante extensão do problema que, inicialmente, pareceu ser muito simples com a resolução empírica por meio de dobraduras, podendo ser trabalhado em séries iniciais do Ensino Fundamental II, passando pelo Ensino Médio com os importantes conceitos de Função Afim e Função Quadrática e, com mais rigor, no Ensino Superior, com a abordagem do Cálculo.

7. Considerações finais

Retomando o que disse Blanco (2004) no início deste texto, quando falou dos estamentos que envolvem a formação docente, veem-se, no que foi até aqui apresentado, algumas dessas particularidades em movimento, que poderiam solucionar, ao menos na esfera que compete aos que aqui foram citados, essa problemática. Viu-se: a instituição com um novo projeto curricular, o formador de professor, direcionando seu trabalho às novas tendências no ensino de Matemática e, os alunos, interessados em conhecer novas práticas, todos engajados num movimento de mudança.

A *Metodologia* possibilitou ao futuro professor estabelecer a relação entre conceitos matemáticos abordados nos diferentes níveis de ensino, da Educação Básica ao Ensino Superior. Com a experiência vivenciada na disciplina RP, espera-se que o professor, no exercício da docência, trabalhe a Matemática sob o ponto de vista de seu desenvolvimento, inter-relacionando os conteúdos, valorizando os conhecimentos prévios dos estudantes, fazendo conexões com conceitos já apreendidos e/ou com experiências já vivenciadas, a fim de promover uma aprendizagem mais significativa. A *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas* apresenta-se como um caminho possível.

8. Referências Bibliográficas

BLANCO, M.M.G. **A formação inicial de professores de Matemática: Fundamentos para a definição de um curriculum**. pp.51-86. In: Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Dario Fiorentini (org). Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

GOLDENBERG, M. (2003). **A arte de pesquisar – Como fazer uma pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** 7ª Edição. Record editora: Rio de Janeiro - São Paulo. 1ª edição: 1997.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, analysis**. Cosimo Classis: 1908.

ONUCHIC. L.R.;ALLEVATO, N.S.G (2011). **Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), v.5 – n.41 – Dezembro de 2011.

ONUCHIC. L.R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. Maria Ap. V. Bicudo (org). Editora Unesp: Rio Claro. 1999.

POLYA, G. **Mathematical Discovery – on understanding, learning, and teaching problem solving**. v.I. 1962.

SILVER, E. A. **Formação de Professores de Matemática: desafios e direções.** In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). n.26 – 2006.