EXPLORANDO DIFERENTES DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA FORMAÇÃO DE NOVOS PROFESSORES

Cristéwany Regina Capitani[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
cristewany_rc@hotmail.com

Ana Caroline Botelho Biazin[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
ana_botelhotkd@hotmail.com

Resumo: Com as várias mudanças que estão ocorrendo na educação, é necessário que a formação de novos professores se adapte a estas mudanças. Diversos conteúdos hoje são abordados de forma superficial, tanto na escola quanto na universidade, e o ajuste desse foco pode garantir que, tanto a formação de professores quanto dos próprios alunos, tenha mais qualidade. Um desses conteúdos que não inspiram muita abordagem, principalmente em se falando de sua demonstração, é o Teorema de Pitágoras, mas que se for dada a devida atenção, pode ser de grande utilidade, já que oferece uma variedade de opções de sua utilização, sem falar de seu âmbito histórico. Este trabalho faz parte das atividades desenvolvidas no Projeto PIBID Matemática da UTFPR – Campus Pato Branco no eixo Profissional na ação Pesquisa Pedagógica orientado por um professor da área de matemática.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Demonstrações; Formação de professores; Educação matemática.

1. Introdução

Muitas mudanças vêm sendo observadas no âmbito da educação atualmente, sendo uma a invasão tecnológica na vida dos estudantes, e consequentemente, o seu uso inadequado, deixando-os desmotivados para as tarefas escolares. Com a evolução da sociedade, a formação dos indivíduos deve ser cada vez mais ampla, o que acarreta na introdução de novos conteúdos e disciplinas no currículo escolar. Além disso, temos uma significativa desvalorização dos professores pela sociedade como um todo. Neste contexto, o desafio do profissional da educação aumenta muito no sentido de corresponder às expectativas a ele propostas, desafios estes que exigem um preparo profissional bem maior para os docentes.

[1] Bolsista PIBID da UTFPR – Campus Pato Branco, C. E. Arnaldo Busato – município de Coronel Vivida.
[2] Bolsista PIBID da UTFPR – Campus Pato Branco, C. E. Premem – município de Pato Branco.

"A questão de provas e demonstrações em aulas de matemática oferecidas para alunos de 12 a 18 anos vem sendo retomada há algum tempo por pesquisadores" (ALMOULOUD – FUSCO, 2010). Neste sentido, estão ocorrendo várias mudanças na área de educação matemática. Parte destas mudanças pode decorrer de parcerias que ocorrem entre instituições de ensino superior e escolas.

Por médio do PIBID, que contribui na formação do futuro professor que já está atuando na escola, realizamos uma pesquisa pedagógica mais aprofundada e de forma extracurricular sobre o Teorema de Pitágoras. Isto se justifica, pois vários cursos de Licenciatura em Matemática não dão tanto enfoque a este tema, sendo este restrito basicamente a minicursos, ou seminários, ou ainda a atividades complementares promovidas pelas universidades.

Ainda como justificativa do estudo mais aprofundado do Teorema de Pitágoras vem sendo o fato verificado "nas escolas públicas que provas e demonstrações não estão presentes na comprovação de conteúdos programáticos oferecidos aos alunos, tal feito pode ser comprovado através de análise de livros didáticos que não contemplam essa forma de validação de resultados apresentados" (ALMOULOUD, FUSCO, 2010). Muitos alunos do Ensino Fundamental, área em que esse conteúdo é contextualizado, só aprendem a fórmula e como aplica-las nos exercícios repassados, o que nos leva ao questionamento: "quais motivos levam os professores de matemática a evitar provas e demonstrações em suas aulas" (ALMOULOUD, FUSCO, 2010.), seja qual for o tema trabalhado, inclusive o Teorema de Pitágoras?

Em se falando dessas parcerias, trabalhando em conjunto, poderiam ser construídas abordagens, de acordo com a faixa etária dos alunos alvo, utilizando muitas vezes materiais diversificados já existentes, uma vez que muitas das demonstrações são mais conhecidas, e mais rápidas de se fazerem entendidas, utilizam a área dos quadrados formados pelos catetos e o da hipotenusa como forma de apresenta-la. Isso é bom, uma vez que, gerando a visualização material do resultado, se torna mais fácil a aprendizagem por parte dos alunos.

2. Algumas demonstrações

Cabe a apresentação de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras de forma didática, que podem ser repetidas em sala de aula, já que não oferecem muita dificuldade de entendimento. Antes de vermos as demonstrações, lembramos que o Teorema de Pitágoras nos diz que se T é um triângulo retângulo de hipotenusa de comprimento a e catetos de comprimento b e c, então vale $a^2=b^2+c^2$.

Para melhor entendimento nas demonstrações a seguir, tomando um triângulo ABC como exemplo, a área será denotada por $|ABC|$, já os segmentos serão $\overline{AB}$, e seu comprimento será AB. A notação de ângulo será dada por $A\hat{B}C$.

2.1. Pelas áreas dos quadrados formados pelos catetos e pela hipotenusa

Uma demonstração interessante do Teorema de Pitágoras é pelas áreas dos quadrados formados pelos catetos e pela hipotenusa. A seguir as ilustrações que provam que $a^2= b^2+c^2$.

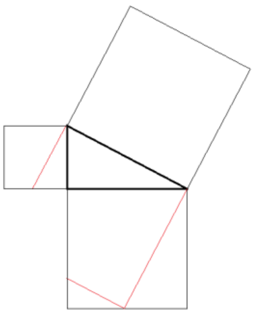


Figura 1

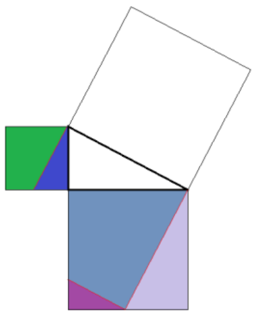


Figura 2

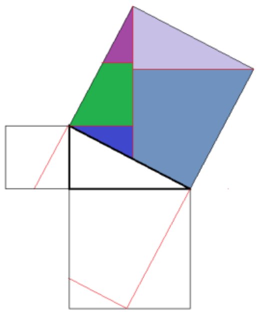


Figura 3

No esquema acima foram seguidos os seguintes passos: primeiramente foi desenhado o quadrado da hipotenusa sob o resto da figura (tracejado vermelho da figura 1). Após isso, foram diferenciadas as figuras que se formaram (figura 2), e estas foram distribuídas dentro do quadrado da hipotenusa (figura 3), provando assim o Teorema de Pitágoras que diz que o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

É importante ressaltar que essa “demonstração” não tem muito caráter matemático, mas é de grande valia se for utilizado para iniciar o estudo do teorema com os alunos, pois pode ser caracterizado como um quebra-cabeça, para motivar o raciocínio, por exemplo, como faria para “colocar dois quadrados menores em um terceiro quadrado”.

2.2. Semelhança de triângulos

A seguir, vamos apresentar a regra geral de semelhança de triângulos, que será utilizada na demonstração 2.2.1.

A semelhança é devido à proporcionalidade que há entre os triângulos, já que, em um triângulo retângulo, ao ser traçada a altura relativa à hipotenusa, os triângulos formados serão semelhante entre si, e estes serão semelhantes também ao original. Isso é fácil de verificar pela relação ângulo-lado-ângulo. Analisando a figura 4 temos:

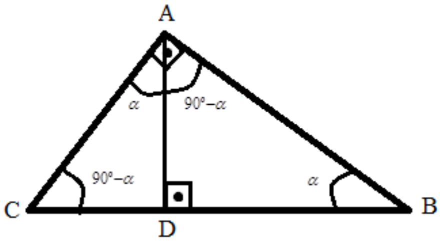


Figura 4

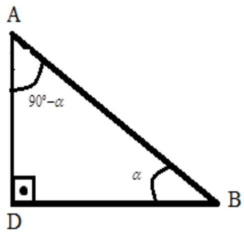


Figura 5

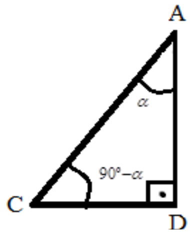


Figura 6

ABC é um triângulo com ângulo reto em *A*. Ao traçar a altura relativa à hipotenusa, esta forma um ângulo de 90º com o lado $\overline{BC}$, ou seja, os ângulos $B\hat{D}A$ e $A\hat{D}C$ nas figuras 5 e 6 respectivamente, são retos. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Como o triângulo *ABC* tem ângulo reto em *A*, temos que os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ são, respectivamente, α e 90°-α (figura 4). Já que os triângulos das figuras 5 e 6 são recortes do triângulo *ABC*, os ângulos o seguem. Pelo mesmo motivo que foi aplicado neste último, os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{A}D$ das figuras 5 e 6 são, respectivamente, 90°-α e α. Provada as congruências dos ângulos dos triângulos, nota-se que os lados correspondentes são proporcionais, assim temos as relações, sendo respectivamente doa triângulos *ABC* e *DAC* e também *ABC* e *DBA*:

$$CB/CA = CA/CD = AB/DA \qquad CB/AB = CA/AD = AB/DB$$

Logo, os triângulos *DBA* e *DAC* são semelhantes entre si e em relação a *ABC*.

2.2.1. Demonstração que usa semelhança de triângulos

A partir de um triângulo *ABC* (figura 7), retângulo em *A*, traçamos a altura relativa à hipotenusa $\overline{AH}$, como observado a seguir. Da correspondência sobre os lados, conforme demonstrado acima, temos que, da semelhança de *HAC* e *ABC*, que $b^2 = am$ e, da semelhança de *HBA* e *ABC* tem-se $c^2 = an$.

Ao se somar estas duas relações membro a membro, podemos constatar que:

$$b^2 + c^2 = am \cdot an = a \cdot (m+n) = a \cdot a = a^2$$

Logo, o Teorema de Pitágoras é válido.

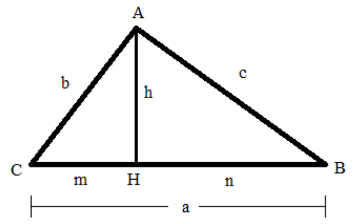


Figura 7

2.3. Demonstração de Euclides

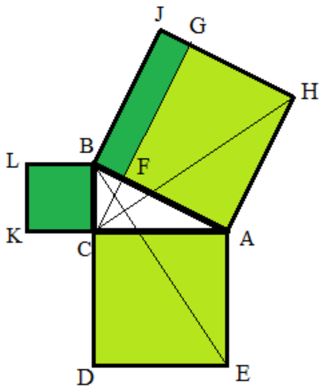
Sabe-se muito pouco de Euclides, apenas que viveu em Alexandria e que é considerado o pai da geometria, emprestando o seu nome a essa área da matemática. Dá-se a ele a autoria de dez livros, sendo que o primeiro relata dentre outros tantos teoremas, postulados e axiomas, a demonstração do Teorema de Pitágoras, que está descrito a seguir.

Antes de iniciarmos a demonstração elaborada por Euclides, primeiramente vamos considerar como verdadeiras as seguintes proposições.

- Proposição I-4: se dois triângulos, *ABC* e *EFG*, tem dois lados iguais entre si (*AB*=*EF* e *BC*=*FG*), e o ângulo formado por estes lados também forem iguais, então as bases serão iguais. Consequentemente, os triângulos serão iguais.
- Proposição I-41: se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo, e estes estão na mesma paralela, então a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo. (KILHIAN, 2013).

Considere um triângulo *ABC* (como indicado na figura 8), e com os quadrados *ACDE*, *BCKL* e *ABJH* construídos a partir dos lados do triângulo. Traçamos também o segmento $\overline{CG}$, paralelo a $\overline{BJ}$, intersectando em *F* o segmento $\overline{AB}$ e em *G* no segmento $\overline{JH}$. A ideia da demonstração é provar que $|ACDE|$ é igual a $|AFGH|$ e que $|BCKL|$ e igual a $|BFGJ|$, provando assim que a soma dos quadrados dos catetos é igual à soma do quadrado da hipotenusa.

Temos que $\overline{BD}$ é uma reta, pois $B\hat{C}A$ e $A\hat{C}D$ são iguais a 90º. Há também a igualdade de $B\hat{A}E$ e $H\hat{A}C$ que medem 90°+α, e que *CA*=*AE* e *BA*=*AH* (figura 9). Então pela Proposição I-4, $|BAE| = |HAC|$. Já pela Proposição I-41, $|BAE| = 1/2\,|ACDE|$, e da mesma forma, $|HAC| = 1/2\,|AFGH|$ e, portanto, se igualar as parcelas terá:



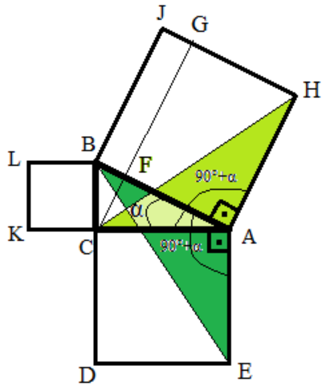


Figura 9

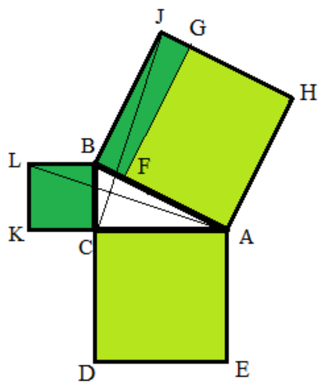


Figura 10

$$|BAE| = |HAC| \Rightarrow 1/2\ |ACDE| = 1/2\ |AFGH| \Rightarrow |ACDE| = |AFGH|$$

De forma análoga, temos que $|BCKL| = |BFGJ|$, (figura 10) e, portanto:

$$|ACDE| + |BCKL| = |AFGH| + |BFGJ| = |ABJH|$$

Logo, o Teorema de Pitágoras é válido.

3. A abordagem diferenciada na formação de novos professores

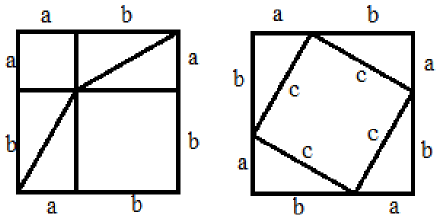
Figura 8

Como foi abordado na introdução desse mesmo texto, o estudo do teorema no ensino fundamental somente dirige-se à fórmula e suas aplicações, sendo geralmente excluídas as demonstrações com mais rigor matemático, sendo por vezes usada a própria fórmula para provar que ela é válida.

Mas então, o que fazer para que esse tema, em especial as demonstrações, possa ser abordado de forma diferenciada?

Em se falando do 4° ciclo do ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática (1998), afirma que “as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais ‘’dinâmico’ para esse estudo”. No estudo do teorema, é muito importante desenhar as figuras para ver que essa relação realmente funciona, e se forem utilizados materiais diversificados, como caixas, barbantes, quebra-cabeças, o “caráter dinâmico” é ainda mais valorizado.

Observando uma demonstração clássica, os PCN nos dá o seguinte exemplo de como deveria ser abordado numa aula uma demonstração:

> O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito da área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi "provado".
>
> 
>
>
> Figura 11
>
> Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda essas experiências possam ser aceitas como 'provas' no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais. (PCN – matemática, 1998, p. 126-127).

Além disso, "recursos tecnológicos, como *softwares*, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros" (Diretrizes Curriculares Estaduais – Matemática, 2008, p. 65), podem, e devem ser utilizados nas aulas de modo que isso venha a favorecer o aprendizado.

Todos esses âmbitos, podemos contribuir na formação inicial e continuada de professores, pois "o seguinte passo após a pesquisa pedagógica é aplicar nas escolas parcerias do PIBID tanto para os alunos e professores" (Subprojeto PIBID, 2009), desta forma a aprendizagem do Teorema de Pitágoras se tornará efetiva e apresentará resultados.

4. Considerações finais

Por nossa experiência como professores iniciantes, já atuando na rede pública como bolsista PIBID, e constatando o alto índice de desistência dos alunos ingressantes ao curso de Licenciatura em Matemática pela falta de familiaridade com demonstrações no ensino médio, seja porque "os professores não se sentem seguros ao trabalhar com demonstrações", ou porque "os livros também não trazem esse conteúdo", que o presente trabalho realça o domínio nas demonstrações do Teorema de Pitágoras, pois "sem dúvida, não se pode ensinar o que não se tem domínio" (ALMOULOUD, FUSCO, 2010).

Vem de claro a intenção de por o trabalho em prática o mais breve possível, a fim de analisar os fatos destacados acima, contribuir com a formação inicial e continuada de professores de rede pública e despertar nos alunos o prazer de se trabalhar com demonstrações.

5. Agradecimentos

Ao subprojeto PIBID – Matemática UTFPR – campus Pato Branco pela oportunidade de participar como bolsista da Capes, e também ao professor Dr. João Biesdorf, pela orientação no presente trabalho.

6. Bibliografia

ALMOULOUD, Saddo Ag; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Provas e demonstrações em matemática: uma questão problemática nas práticas docentes no Ensino Básico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X., 2010, Salvador. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** – Comunicação Científica.

DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA: **Matemática** / Secretaria de Estado da Educação do Paraná. – Paraná, 2008. 82 p.

EUCLIDES. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/euclides.htm>. Acesso em: 11 fev. 2013.

IMENES, Luiz Márcio. **Descobrindo o teorema de Pitágoras**. 7 ed. São Paulo: Scipione, 1992.

KILHIAN, Kleber. **O teorema de Pitágoras segundo Euclides** – a proposição I-47. Disponível em <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html>. Acesso em: 11 fev. 2013.

LIMA, Elon Lages et. al. **Temas e Problemas Elementares**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: **Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

RUTINALDO, C. **Demonstração de Euclides do Teorema de Pitágoras**. Disponível em: <http://rtcmaster.blogspot.com.br/2009/11/demonstracao-de-euclides-do-teorema-de.html> Acesso em: 11 fev. 2013.