UMA COMPARAÇÃO CRÍTICA ENTRE A GEOMETRIA EUCLIDIANA E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: PERSPECTIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Autor: Willian José da Cruz[1]
Instituição: Uniban
E-mail: Lukinha@barbacena.com.br

Resumo

Este minicurso expõe de maneira didática uma possível comparação crítica entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas, mostrando aspectos que possam ser relevantes na introdução desses conceitos tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Os trabalhos serão conduzidos de maneira dinâmica com o uso do software cabri e com o auxilio da história da matemática, os quais permitirão conhecer e inferir aspectos das geometrias não euclidianas, em especial da geometria hiperbólica, em contraste com a geometria euclidiana.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometrias não Euclidianas, Ensino de geometria.

1. Introdução

Por mais de dois mil anos, a obra, "*Os Elementos de Euclides"* foi considerada como um paradigma do raciocínio matemático formal (rigoroso), distinguindo-se de outras obras por sua estrutura axiomática. Esta obra, composta por 13 livros, expõem resultados da matemática elementar numa sequência lógica. Somente quando os fundamentos dos modernos métodos axiomáticos foram estabelecidos no final do século XIX é que esta obra perdeu sua preeminência no contexto de matemática rigorosa.

Considerando o livro I de Euclides como a chave do método axiomático, a partir de algumas definições são apresentados 9 axiomas e 5 postulados dos quais Euclides deduz 465 teoremas. Sendo o livro I objeto de vários comentários por causa do quinto postulado, muitos matemáticos tentaram deduzi-lo a partir dos outros, mas sem sucesso.

Inúmeras das tentativas de provar o quinto postulados não obtiveram êxito pelo uso indevido de resultados equivalentes a ele. Porém, no final do século XVIII, foram feitas novas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides usando os processos de demonstrações indiretas, mas ao invés de gerar uma contradição, este novo conjunto de axiomas deu base a uma teoria consistente, conhecida hoje como as Geometrias não

[1] Willian José da Cruz, Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante Anhanguera e Professor do ensino fundamental da Prefeitura Municipal de Barbacena.

Euclidianas. Neste minicurso, buscaremos conhecer de forma lúdica e com o auxilio da história da matemática, os aspectos dessa nova geometria em contraste com a geometria euclidiana, criando possibilidades para o professor, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio, conhecer e se possível inserir em sua proposta de ensino esses conceitos.

O objetivo deste minicurso é aprofundar e produzir conhecimentos acerca do desenvolvimento da geometria plana de Euclides, da Geometria hiperbólica de Bolyai (1832) e da geometria esférica de Riemann (1854), utilizando o software "cabri geométre". O intuito é despertar a curiosidade e desenvolver a capacidade de argumentação envolvendo a geometria hiperbólica e esférica, em contraste com a geometria euclidiana.

2. A obra de Euclides e o quinto postulado

A distinção da obra de Euclides em relação a todas as outras que chegaram até nós é a sua estrutura axiomática, o que faz reconhecer a sua grandeza. O livro I é considerado a chave da apresentação do método matemático rigoroso. Composto de 23 definições, 9 axiomas, 5 postulados, 48 proposições, o livro I foi objeto de vários comentários, isto tudo por causa do quinto postulado. A sua forma um pouco complicada incitou muitos matemáticos que tentaram deduzi-lo a partir dos outros. Os postulados eram proposições para as quais se pediam para aceitá-las sem demonstração. De acordo com a tradução de Vitrac (1994), eram cinco os postulados:

Postulado 1 - Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer. Neste contexto, a palavra reta na obra de Euclides significa segmento de reta na linguagem de hoje.

Postulado 2 **-** Pode-se prolongar uma reta infinitamente. Esse postulado garante a existência da reta.

Postulado 3 - Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio. Esse postulado garante a existência da circunferência.

Postulado 4 - Pode-se considerar todos os ângulos retos iguais entre si.

Postulado 5 - Se duas retas interceptadas por uma terceira reta, formam, do mesmo lado dessa reta secante, dois ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas quando suficientemente prolongadas se interceptam por esse lado da secante. Numa linguagem moderna, podemos traduzir este quinto postulado como: Se $\alpha+\beta<180°$ então as retas r e s se intersectam do lado de α e β.

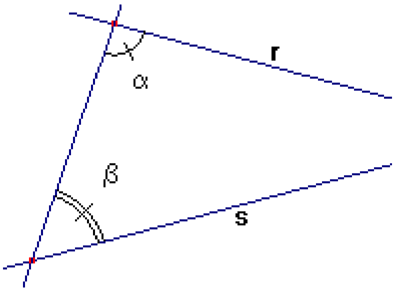

Figura I

Em 1795, o enunciado do quinto postulado de Euclides foi substituído por outro, equivalente, chamado hoje de *postulado das paralelas*. Tal formulação é devida a Playfair: “*Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada*” (BONGIOVANNI & JAHN, 2010).

3. O surgimento das geometrias não euclidianas

Várias tentativas sem sucesso de provar o quinto postulado de Euclides esbarravam no uso irregular ou indevido de resultados equivalentes a este postulado, como por exemplo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, a eqüidistância de retas paralelas e outros. Já no fim do século XVIII foram feitas novas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides usando as chamadas demonstrações indiretas. Mas, em vez de conduzir a uma contradição, este novo conjunto de axiomas formou a base de uma teoria consistente chamada hoje de geometrias não euclidianas.

Lobatchevsky em 1829 negou o quinto postulado de Euclides, dizendo que por um ponto fora de uma reta passariam no mínimo duas retas paralelas à reta dada. Ele foi a primeiro a publicar esta teoria, por isso é considerado o fundador oficial das geometrias não euclidianas, embora Gauss em 1824 numa carta enviada a Taurinus, já soubesse dessa possibilidade. Em 1832, Bolyai, independentemente, obteve os mesmos resultados. Essa geometria passou a ser chamada de *geometria hiperbólica*. Em 1854, Riemann nega o quinto postulado de Euclides admitindo a outra negação: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada. Essa outra geometria não euclidiana passou a ser chamada de *geometria esférica.*

4. Procedimentos metodológicos

Neste minicurso, faremos uma breve incursão histórica sobre a obra de Euclides, apresentando os tópicos dos treze livros de Euclides, em especial o livro I. Apresentaremos também os postulados, algumas definições e os axiomas deste mesmo livro, no intuito de fomentarmos uma discussão acerca da experimentação mental das demonstrações contidas nele. Discutiremos em alguns exemplos, como Euclides demonstrava algumas proposições do livro I, se justificando nos postulados, axiomas e definições. Ilustramos neste texto, a proposição I do livro I de Euclides, tomado como exemplo.

Sobre uma linha reta determinada dá para construir um triângulo equilátero.

Seja a linha reta AB de certo comprimento. Deve-se sobre ela descrever um triângulo eqüilátero. Com o centro A, e com o intervalo AB se descreva (Post. 3.) o círculo BCD; e com o centro B, e com o intervalo BA se descreva o círculo ACE. Do ponto C, onde os círculos se cortam reciprocamente, tirem-se (Post. 1.) para os pontos A, B as retas CA, CB O triângulo ABC será equilátero. Sendo o ponto A o centro do círculo BCD, será AC = AB (Def. 15.). E sendo o ponto B o centro do círculo CAE, será BC = BA. Mas temos visto CA = AB. Logo, tanto CA, como CB, é igual a AB. Mas as coisas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si (Ax. 1.). Logo, será CA = CB. Logo as três retas CA, AB, BC são iguais; e por conseqüência, o triângulo ABC, feito sobre a reta dada AB, é equilátero. O que era para ser feito (MUELLER, 1969).

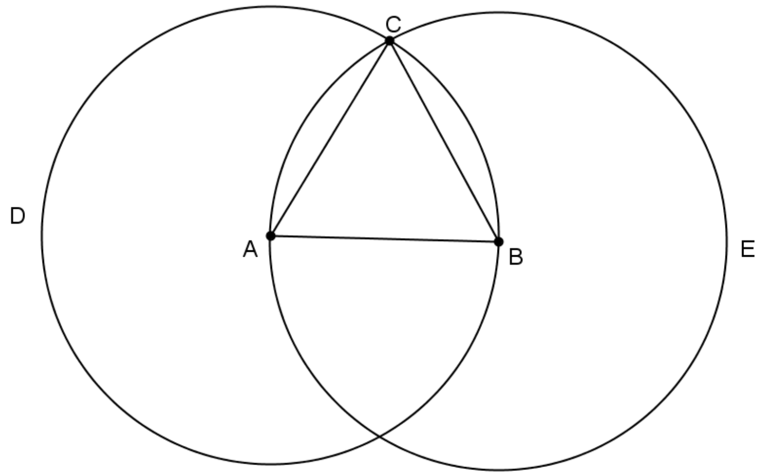

Figura II

Em que sentido Euclides deriva uma proposição dos primeiros princípios? Certamente, no sentido de que cada passo deva ser justificado por referência a estes princípios, mostrando que uma operação realizada (por exemplo, para desenhar um círculo tendo A como centro e AB como a distância) é permitida.

Na sequencia, faremos uma introdução de forma conceitual das geometrias não Euclidianas, momento histórico de sua concepção e apresentaremos, utilizando o software cabri, possibilidades de trabalhos em salas de aulas de matemática, bem como sugestões de trabalhos lúdicos que envolvam essas geometrias.

Como exemplo, apresentamos o triângulo equilátero no modelo plano do disco de Poincaré. Neste modelo, discussões a cerca da soma dos ângulos internos, medidas do lado, forma do triângulo, comparação como o modelo Euclidiano, são algumas questões que podem e serão exploradas neste minicurso.

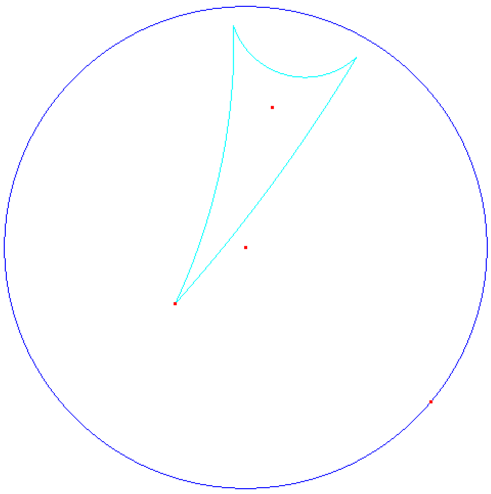

Figura III

6. Nível educacional ao qual o minicurso é direcionado

Este minicurso visa atender aos professores de matemática que lecionam no ensino fundamental e no ensino médio, trazendo uma proposta diferenciada para o ensino de geometria, mostrando de forma interativa as possibilidades de despertarmos o interesse e aproximação aos elementos matemáticos próximos das relações do cotidiano.

7. Atividades propostas

Atividade 1: Comparação da soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria hiperbólica com o triângulo na geometria euclidiana

a) Criar um triângulo hiperbólico utilizando a barra do menu hiperbólico.
b) Medir os ângulos.
c) Usando a calculadora, obter a soma das medidas dos ângulos internos.

Atividade 2: Estudo dos invariantes nas duas geometrias (hiperbólica e euclidiana)

a) Construir um triângulo isósceles utilizando a barra do menu hiperbólico.

b) Medir os lados e os ângulos da base.

Atividade 3: Discussão em torno do teorema de Pitágoras

a) Construir um triângulo retângulo utilizando a barra do menu hiperbólico.

b) Medir a hipotenusa e os catetos.

c) Verificar se o teorema de Pitágoras é válido.

d) Verificar que $\cosh \mathbf{a} = \cosh \mathbf{b} \times \cosh \mathbf{c}$ tal que **a** é a medida da hipotenusa e **b** e **c** são as medidas dos catetos.

Atividade 4: Comparação e definição de triângulos equiláteros nas geometrias hiperbólica e euclidiana.

a) Construir um triângulo equilátero sem utilizar o menu "triângulo equilátero" da barra do menu hiperbólico.

b) Medir os lados e os ângulos.

8. Referencial teórico

BOYER C.B. :*História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher 1996.

BONGIOVANNI, Vincenzo & JAHN, Ana Paula. *De Euclides às Geometrias não Euclidianas*. In: Revista iberoamericana de educación matemática - junio de 2010 - número 22 - página 37

CASTRUCCI. B.: *Lições de geometria plana*, livraria Nobel S.A, 1976.

EUCLIDES : *Les Éléments*, volume 1,2,3,4, PUF,1994. Tradução Bernard Vitrac 1994.

MUELLER, Ian. *Euclid's Elements and the Axiomatic Method*. Source: The British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 20, No. 4 (Dec., 1969), pp. 289- 309 Published by: Oxford.