COMPREENSÕES DE IDEIAS ESSENCIAIS AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Ledevande Martins da Silva
UEPB
Ledevande.martins@gmail.com

Silvanio de Andrade
UEPB
Silvanio@usp.br

Resumo

O presente artigo se refere ao trabalho de mestrado que buscou evidenciar compreensões de funções por alunos e analisou as contribuições da metodologia resolução de problemas. Na fundamentação teórica trouxemos: representações múltiplas de funções; compreensões essenciais de funções por Cooney, Beckmann e Lloyd e para o trabalho em sala de aula optamos pela resolução, proposição e exploração de problemas, onde a interação e a mediação sejam elos para a formação de conceitos. A pesquisa é pedagógica, segundo Lankshear e Knobel, na qual o professor pesquisa sua própria prática em sala de aula. Descrições e análises de aulas apontam dificuldades conceituais, conversão de representações, dentre outras e os resultados evidenciaram que compreensões essenciais de funções se dão mediante transições entre ideias em múltiplas interpretações, características e conexões entre elas. A conclusão final deste trabalho evidenciou que resolução, proposição e exploração de problemas favorecem possibilidades de desenvolver compreensão essencial de funções.

Palavras Chave: Funções; Representações; Resolução de Problemas; Pesquisa Pedagógica.

1. Introdução

Ao longo da nossa vivência e experiência, como professor de Matemática de Ensino Médio, percebemos que os alunos apresentam muitas dificuldades de aprendizagem no estudo de funções. Dentre essas dificuldades, destacamos especificamente as dificuldades de aprendizagem, segundo Markovits, Eylon e Buckheimer (1995), que apontam em seus estudos uma grande complexidade na compreensão do conceito de função; pois, a definição de função da forma como é ensinada, atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, imagem, regra de correspondência – e diferentes formas de representação.

Na literatura acadêmica mais recente tem sido também apontadas cinco grandes ideias a serem exploradas nesse tópico de conteúdo no Ensino Médio que de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) são o conceito de função, a covariação/taxa de variação, as famílias de funções, a combinação/transformação de funções e as representações múltiplas de funções. Pois, estas ideias fundamentais fornecem as compreensões essenciais para o desenvolvimento desse tópico da Matemática.

Qual a nossa proposta de abordagem para a temática da função a partir dessas observações preliminares? Em resumo, a pergunta norteadora desta pesquisa foi a seguinte: *Que compreensões podemos evidenciar de ideias essenciais de funções por alunos, desenvolvidas na aplicação de um conjunto de atividades em situações-problemas? Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada ao uso de representações múltiplas, no estudo de funções?*

2. Representações Múltiplas no Ensino-Aprendizagem de Funções

Os autores Friedlander e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais à compreensão do ensino-aprendizagem de funções: representação verbal, numérica, gráfica e algébrica. É importante nos tornarmos cientes das vantagens e desvantagens de cada representação: 1. Representação verbal é geralmente usada para apresentar um problema. Mas, o uso da linguagem verbal pode gerar dificuldades inerentes à língua materna. 2. Representação numérica frequentemente precede qualquer outra representação. Entretanto, sua falta de generalidade pode ser uma desvantagem. 3. Representação gráfica é eficaz em proporcionar uma imagem clara de uma função de variável real. Mas, as representações gráficas podem não ter a precisão necessária dependendo da escala adotada. 4. Representação algébrica é concisa, geral e efetiva. Contudo, um uso exclusivo de símbolos algébricos pode causar obstáculos à aprendizagem significativa em Matemática. Cada uma dessas representações possuem vantagens e desvantagens na sua utilização. Por isso, Kaput (1992 apud Friedlander e Tabach, 2001) sugere a criação de um ambiente de representações múltiplas – ou seja – o uso combinado delas permitirá a representação de um problema e sua resolução em vários modos, dirimindo as lacunas de uma representação sobre outra.

3. Compreensão de Ideias Essenciais de Funções para o Ensino Médio

O pensamento funcional está presente desde cedo, na Matemática Escolar, da simples contagem à observação de padrões em busca de regularidades e generalizações por meio de experiências significativas, vivenciadas pelos alunos na sala de aula de Matemática. O *conceito de função* é, intencionalmente, amplo e flexível, permitindo-se aplicá-lo a uma vasta gama de situações numéricas e não numéricas. A noção de função engloba muitos tipos de entidades matemáticas, além das funções de variáveis reais, que descrevem quantidades que variam continuamente. As matrizes, sequências e transformações geométricas também podem ser vistas como funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

As funções fornecem um meio para descrever como se relacionam as quantidades que variam juntas – *covariação*. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações funcionais pelo entendimento da taxa de variação em que uma quantidade varia em relação à outra. Portanto, uma *taxa de variação* é a medida da covariação entre duas variáveis; é uma das principais características que determina que tipo de fenômeno do mundo real a função pode modelar (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

As funções podem ser classificadas dentro de diferentes *famílias de funções*, cada uma com sua única característica própria. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real. Membros de uma família de funções compartilham o mesmo tipo de taxa de variação, a função afim é caracterizada por uma taxa de variação constante, a função quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear, a função exponencial é caracterizada por uma taxa de variação que é proporcional ao valor da função, dentre outras (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

A maioria das funções matemáticas estudadas é uma combinação aritmética. As funções podem ser analisadas corriqueiramente do ponto de vista de como elas são feitas de outras funções. Portanto, as funções podem ser combinadas, decompostas em partes e transformadas em muitas diferentes maneiras, permitindo-nos analisar funções para ver relações entre gráficos de funções – *combinação e transformação de funções* (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

As funções podem ser representadas em múltiplas maneiras, incluindo representações algébricas, gráficas, verbais e tabulares – *representações múltiplas de funções*. Mudando o modo que a função é representada não faz mudança de função, embora representações diferentes destaquem características e de alguma maneira apresentem uma parte somente da função. Algumas representações de função podem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto e conexões entre representações são importantes no estudo de funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Essas ideias e compreensões estão todas conectadas e interconectadas. Transitar entre e em meio a cada uma delas pode ajudar a desenvolver compreensões de ideias essenciais de funções. Os alunos precisam desenvolver a habilidade de mover-se facilmente entre muitas interpretações, suas características e os modos em que elas podem ser usadas para representar fenômenos do mundo real.

4. Resolução, Proposição e Exploração de Problemas

Podemos afirmar que resolver problemas é uma atividade intrínseca à Matemática, ou seja, ao fazer matemático. Mas afinal, o que é um problema? Segundo Lester (1980. p.287):

> Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema.

Somente com o trabalho de George Polya *How to Solve It*, traduzido para o português como *A Arte de Resolver Problemas*, publicado em 1945, é que se pode falar em metodologia de resolução de problemas imaginada para uma sala de aula.

Schoeder e Lester (1989) apresentaram três concepções de ensino da resolução de problemas: 1) ensinar para a resolução de problemas, ficando para a etapa final da apresentação do conteúdo. 2) ensinar sobre a resolução de problemas, enfatizando as heurísticas e as quatro fases do Polya: compreender o problema; elaborar um plano de ação; executar o plano e fazer retrospecto. 3) ensinar através/via resolução de problemas, tomando como ponto de partida o problema para fazer a construção do saber e do saber fazer matemático.

Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004) e Onuchic e Allevato (2011) apresentaram um roteiro da proposta metodológica de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas que foi evoluindo e ganhou a seguinte formatação: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo.

Já Andrade (1998) trabalhou a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas na sua dissertação de mestrado, apresentando a resolução e exploração de problemas a partir da relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-R-RS) envolvendo dois aspectos: o processo e o produto como componentes essenciais de resolução de problemas. Para esse autor essas relações não são lineares e também não seguem uma sequência de passos. Pois, o enunciado do problema traz sempre algo novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula, e o planejamento do trabalho é flexível, podendo ganhar vários formatos e explorações, inclusive podendo ser ampliado para discussões de temas políticos, sociais e culturais.

O estudo sobre a pesquisa em proposição de problema de maneira mais sistematizada é mais recente. Segundo English e Sriraman (2010), ela começa com os trabalhos de Brown e Walter (2005) e English (2003). A proposição de problemas é uma dentre as atividades centrais dos matemáticos que consistirá não somente na busca de respostas corretas e sim perguntas bem formuladas. Fazer com que os alunos possam elaborar seus próprios enunciados, vai exigir deles um controle maior sobre os elementos e objetos matemáticos do seu domínio. Vejamos como a autora brasileira Chica (2001. p.151) se refere ao trabalho com a proposição de problemas:

> Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que pretende. (...). O aluno deixa, então de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

A resolução de problemas como proposta de trabalho em sala de aula permanece com o mesmo nome. No entanto, atualmente a ela incorporamos novos elementos e ferramentas que venham a favorecer novas questões, novas perspectivas, ampliando cada vez mais o campo de pesquisa. No século XXI, percebemos uma forte tendência das pesquisas em resolução de problemas em sala de aula, conforme English e Sriraman (2010), na perspectiva da modelação matemática sob uma visão interdisciplinar.

Nossa metodologia de ensino-aprendizagem se propôs a trabalhar a resolução, proposição e exploração de problemas, aliada ao uso de representações múltiplas, em que o diálogo, a interação social, a colaboração e o compartilhamento de ideias entre aluno-aluno, professor-aluno(s) são extremamente importantes para que possamos viabilizar nossa proposta didático-pedagógica. Diante desse sistema complexo apresentado, a perspectiva interacionista de Vygotsky (2007; 2008), junto com outros constructos de sua teoria, tais como a mediação, Zona de Desenvolvimento Proximal e a formação de conceitos vão nos ajudar a esclarecer e entender o caminho metodológico por nós assumido.

5. Metodologia

A metodologia adotada nesta pesquisa é qualitativa na modalidade pesquisa pedagógica segundo Lankshear e Knobel (2008), na qual o professor pesquisa sua própria prática de sala de aula exercendo o papel duplo de professor- pesquisador.

A pesquisa foi realizada em uma Escola Pública Estadual de Pernambuco na cidade de Recife com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. Esta ação/interação foi iniciada em 19/04/2012 com término em 30/08/2012, na qual se revelam as condições para o levantamento/coleta de dados por meio de aulas ministradas, notas de aulas, descrições e análises de aulas e produções de alunos. Não recorremos à gravação nem filmagem, porque no universo de uma turma de 44 alunos, as ações poderiam perder naturalidade para o trabalho que foi realizado, preferencialmente em pequenos grupos.

6. Descrições e Análises de Aulas

Selecionamos dois encontros dos 27 que totalizam 41 horas-aula como uma pequena amostra de um recorte desta pesquisa que venha a ser representativo deste trabalho.

Encontro 01: Aulas 01 e 02 (19/04/2012):

Atividade 1: A secretária de uma escola de Ensino Médio precisa comprar dois tipos diferentes de produtos de escritório para a sala da diretoria. O primeiro produto tem preço unitário de R$ 5,00 e o segundo produto tem preço unitário de R$ 10,00. A secretária tem R$ 100,00 disponíveis para usá-lo na compra desses dois tipos diferentes de produto. Pede-se:

A) Montem uma tabela mostrando a relação entre todas as quantidades possíveis na realização de uma compra incluindo esses dois tipos diferentes de produtos;

B) Façam um esboço gráfico dessa relação entre essas duas quantidades;

C) Descrevam a equação que expressa quantidade de produtos de R$ 10,00 relacionados à quantidade de produtos de R$ 5,00;

D) Determinem para quais valores numéricos está definida a quantidade possível na compra de produtos de R$ 5,00 nessa relação;

E) Encontrem a variação dos valores para a quantidade possível na compra de produtos de R$ 10,00 nessa relação.

Distribuímos a atividade 1 em papel impresso e papéis milimetrados para todos os alunos e, em seguida, pedimos-lhes que fizessem primeiramente uma leitura individual do problema. Após a leitura, houve inicialmente algumas manifestações por parte de alunos como exemplo do aluno A41 disparador do seguinte diálogo entre professor-aluno(s) e vice-versa:

A41: Eu posso comprar 20 *produtos de* $R\$\ 5{,}00$ *ou* 10 *de* $R\$\ 10{,}00$*, já que os dois resultados dão* $R\$\ 100{,}00$.

PP: Façam uma leitura mais atenta do problema, veja que existe uma condição. (Pausa) *E agora, você acha que é possível?*

A41: *Não, professor, ela precisa comprar sempre dois tipos diferentes de produtos.*

PP para o GG: Ok! Pessoal. A aluna A41 chegou à conclusão que a secretária não pode comprar somente um tipo de produto. Vocês concordam com ela?

GG: *Concordamos* (coro)

A18: Professor, eu tentei começar com 1 *produto de* $R\$\ 5{,}00$*, mas não teria como fazer compras de produto de* $R\$\ 10{,}00$ *pra dá* $R\$\ 95{,}00$*. Então, eu pensei: compro* 50 *reais de cada produto, ou seja,* 10 *produtos de* $R\$\ 5{,}00$ *e* 5 *produtos de* $R\$\ 10{,}00$*, seria essa a resposta?*

GG: Sim (Alguns alunos responderam)

PP: Ok! Concordo com vocês. Porém, essa é apenas uma opção de compra e nós precisamos obter todas as quantidades possíveis de compra distribuindo os dois tipos de produtos (dirigindo-se ao GG).

Formamos grupos de quatro alunos, demos um tempo à turma e continuamos circulando pelos grupos. Observamos que boa parte dos grupos já haviam completado todas as possibilidades. Perguntamos ao grande grupo sobre as possibilidades de compras possíveis e eles disseram por unanimidade que eram 9 possibilidades.

Por meio de representações múltiplas no trabalho em grupo, os alunos utilizaram tabelas, equações e gráficos, e ainda de maneira intuitiva, eles conseguiram escrever os conjuntos do domínio e imagem dessa relação sem usar essa nomenclatura, apenas enumerando a variação de cada produto. O conceito de função é muito complexo, segundo estudos de Markovits, Eylon e Buckheimer (1995) e Cooney et al. (2002 apud Cooney, Beckmann e Lloyd, 2010), porque envolvem os componentes da definição de função, tais como o seu domínio e a sua imagem, devendo ser introduzido na medida que forem aparecendo nos problemas trabalhados em sala de aula, e, também devido as sua diversas representações.

Optamos inicialmente em realizar pequenas intervenções, porque não queríamos deixar os alunos desmotivados para o trabalho. Houve menos interferência quando o aluno estava trabalhando nos seus respectivos grupos, tanto nós como os colegas mais experientes fizeram o papel de mediadores, favorecendo a aprendizagem, onde os alunos puderam aumentar de níveis de desenvolvimento para patamares mais elevados. Portanto, a ponte foi representada pelos alunos e o professor que trabalharam no que Vygostsky (2007) chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), responsáveis pelas variações que ocorreram durante esse primeiro encontro.

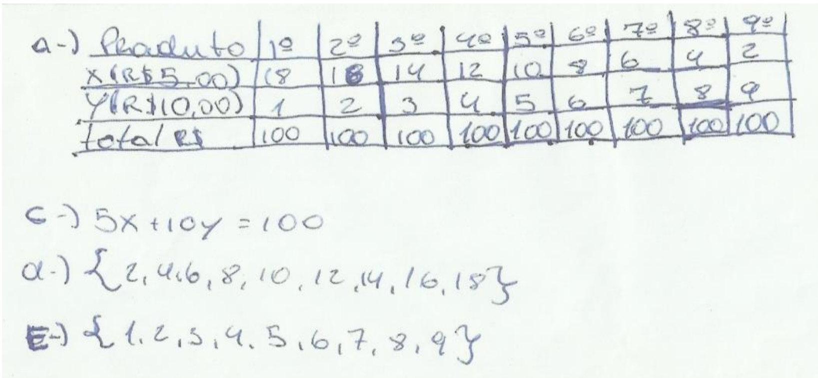


Figura 01: Resolução da atividade 1.1 do aluno A06, representando seu grupo.

Foi possível aos alunos analisarem as representações múltiplas de funções produzidas por eles mesmos a partir das confluências de ideias, onde uma função não muda porque mudou a sua representação. Favorecendo assim a realização de conexões entre essas representações nos campos numérico, algébrico e gráfico. Estas visões das compreensões essenciais da ideia de representações múltiplas são referendadas pelos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Não houve nesse momento, por parte dos alunos, indícios da compreensão de que algumas representações de uma função devem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto.

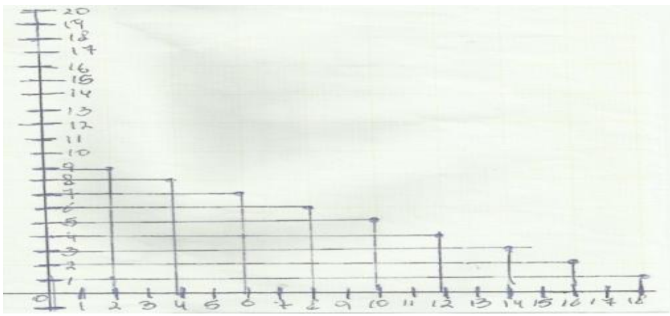


Figura 02: Representação gráfica da atividade 1.1 do aluno A43, representando seu grupo.

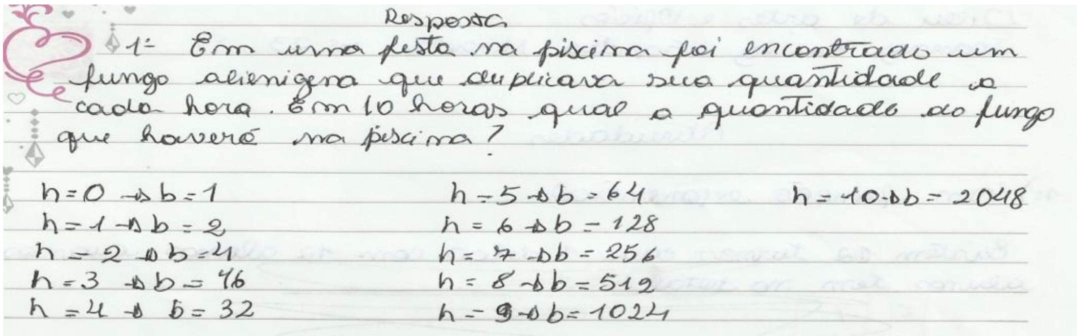
Evidenciamos, neste primeiro encontro, que os alunos mobilizaram conhecimentos numéricos como a de representação de conjuntos numéricos por extensão e por compreensão de propriedades, justificando sua linguagem a partir da necessidade surgida durante a resolução de problemas. Também na construção de tabelas, ao realizarem levantamentos de informações do enunciado do problema. Quanto ao conhecimento algébrico, os alunos modelaram o problema por meio de uma equação linear e depois da nossa mediação, a equação funcional do problema. E quanto ao conhecimento geométrico, eles representaram a função por pontos discretos no domínio dos números naturais, com exceção de uma das equipes de trabalho que uniu os pontos traçando uma reta, possivelmente influenciados por estudos de anos anteriores.

Encontro 27: Aulas 40 e 41 (30/08/2012)

Atividade 2: Criem e resolvam um problema envolvendo o raciocínio exponencial.

Vale salientar que este foi o último encontro, pois os alunos já haviam explorados muitas ideias de funções e tinham trabalhado com muitos modelos de funções exponenciais, dentre outros, em problemas de contextos diversos. Solicitamos a formação de duplas de alunos e colocamos na lousa a questão dois (2). Pedimos para os alunos que formulassem problemas com enunciados dentro de uma situação-problema.

Depois de termos dado as informações sobre o trabalho de elaboração dos problemas, circulamos na sala de aula, observando o trabalho das duplas. Nesta atividade, surgiu um dado novo que foi a exploração da criatividade na elaboração dos alunos dos seus próprios enunciados como propositores de problemas e não somente da criatividade deles na busca de estratégias de resoluções diferentes para o mesmo problema. Pedimos, após o término do trabalho de elaboração e resolução dos problemas, que os alunos nos entregassem suas produções a fim de que pudéssemos selecionar alguns trabalhos das duplas para participar de plenárias. Fazendo as defesas dos problemas por meio das suas enunciações para o grande grupo e expondo suas resoluções na lousa, tendo cada dupla selecionada, o direito de escolher um aluno da sua equipe para representá-los diante da turma.



Resposta

1ª Em uma festa na piscina foi encontrado um fungo alienígena que duplicava sua quantidade a cada hora. Em 10 horas qual a quantidade do fungo que haverá na piscina?

$h=0 \to b=1$ $h=5 \to b=64$ $h=10 \to b=2048$
$h=1 \to b=2$ $h=6 \to b=128$
$h=2 \to b=4$ $h=7 \to b=256$
$h=3 \to b=16$ $h=8 \to b=512$
$h=4 \to b=32$ $h=9 \to b=1024$

Figura 05: Texto e resolução de problema pela dupla de alunas A41 e A46.

Comentário: Este erro na passagem da segunda para terceira hora foi cometido pela aluna A41 na sua exposição à lousa, que foi observado pelo aluno A39. Imediatamente, ela pôde fazer as devidas correções, encontrando a solução 1024 fungos alienígenas para este problema que foi enunciado por ela e outro colega da dupla. Provavelmente, foi cometido esse engano por falta de atenção. Daí, podemos justificar a importância do trabalho em equipe, nas discussões e consensos em plenárias.

Fizemos intervenções chamando a atenção dos alunos para descobrir a fórmula geral do problema enunciado acima, pois o valor inicial é igual a um fungo alienígena e o fator de aumento corresponde a dois, representando a base de aumento da função exponencial e o tempo é a variável exponencial n. O problema consistiu em encontrar a saída, $f(10)$, de uma entrada ($n = 10$), ou seja, calcular a função a partir da imagem de um domínio dado correspondente. De onde o aluno A47 pode concluir que a equação da função exponencial é $f(n) = 2^n$. Enquanto, o aluno A24 comentou: *Então, é só substituir n por dez, fazendo dois, elevado ao expoente 10 igual a 1024.*

Solicitamos a próxima dupla constituída pelas alunas A02 e A09 para fazer a enunciação e explicar a resolução do problema para o grande grupo.

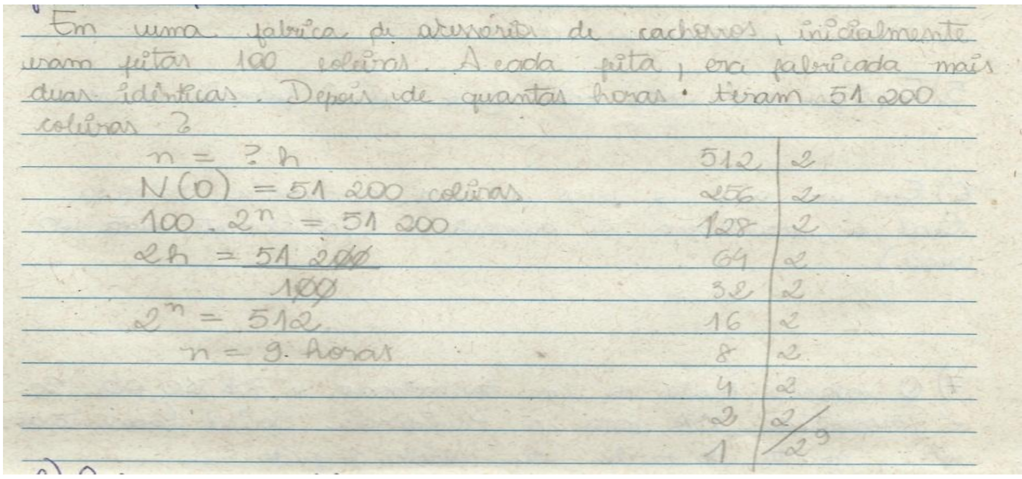


Figura 06: Texto e resolução de problema elaborado pela dupla de alunas A02 e A09.

Transcrição do problema da figura 06: Em uma fábrica de acessórios de cachorros, inicialmente eram feitas 100 coleiras. A cada coleira feita, eram fabricadas mais duas idênticas. Depois de quantas horas terão 51.200 coleiras?

Comentário: Embora, a solução apresentada estivesse correta, foi necessário esclarecermos o cuidado que os alunos deveriam ter nas representações simbólicas adotadas durante o processo de resolução do problema, como por exemplo, o de denotar o valor inicial de $\mathrm{N(0)} = 100$, o valor final $\mathrm{N(n)} = 51.200$, e a variável exponencial de n. Mantendo sempre a coerência tanto textual quanto da linguagem matemática que envolveu representações algébricas feitas durante todo o processo de tratamentos algébricos de resolução do problema que eles haviam produzidos:

$$100 \cdot 2^{\mathrm{n}} = 51.200 \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = \frac{51.200}{100} \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = 512 \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = 2^9 \rightarrow \mathrm{n} = 9 \text{ horas.}$$

Este problema diferentemente do problema anterior elaborado, explorando o raciocínio exponencial, recai numa equação exponencial. O problema informou o valor da imagem e pediu o domínio correspondente nessa função. Em outras palavras, o problema pede para encontrar a entrada, a partir de uma saída que corresponde a resolver uma equação. Não houve confusão entre os componentes do conceito de função domínio e imagem, entrada e saída. Simplesmente, houve confusão na hora de representar cada um desses elementos de maneira adequada; no entanto, acreditamos que estes conceitos estavam bem compreendidos.

Assim, registramos nesse momento uma superação de um problema que em outros encontros eram muito comum. Para uma dada função na sua representação algébrica, os alunos consideravam tarefa mais difícil encontrar o elemento do domínio correspondente, dada a sua imagem, do que no sentido contrário. E a explicação para esse fenômeno nos parece simples. Para achar os elementos do domínio, o aluno tem de resolver uma equação, ao passo que as suas imagens se acham diretamente através de cálculos numéricos por substituição.

Do ponto de vista das representações múltiplas. os alunos na proposição de problemas mobilizaram três maneiras de representações: verbal, numérica e algébrica. A representação gráfica não apareceu em nenhum dos problemas formulados por eles, indicando que a representação gráfica pelos alunos como propositores de problemas exigirá deles um domínio de um sistema de representação muito complexo. Vemos na produção dos alunos que inicialmente eles foram capazes de elaborar problemas com inventividade e criatividade. A resolução mais empregada passa pelas representações numéricas como uma das primeiras tentativas de interpretação e resolução dos problemas que Vygotsky (2008) coloca dentro da esfera dos conceitos cotidianos e a representação algébrica dentro dos conceitos científicos. No primeiro problema analisado, foi necessário realizarmos intervenções para se chegar à generalização da equação da função exponencial. Enquanto, no último problema analisado, os alunos já atingiram esse nível de abstração com independência; mesmo tendo-nos que fazer algumas observações quanto às anotações que estavam inadequadas. Porém, do ponto de vista das deduções feitas pelos os alunos na dupla de trabalho, mostram que eles atingiram os níveis superiores de pensamento.

Sentimos que a elaboração de seus próprios problemas, por parte dos alunos em sala de aula, necessita de uma criação e de uma vivência anterior de um conhecimento e um desenvolvimento mínimo de modelos que servirão de inspiração para a proposição de problemas. Por essa razão, colocaríamos a proposição de problemas entre a resolução e exploração de problemas, porém, ela está dentro das atividades centrais do pensar matemático. Atualmente, não podemos conceber o ensino de Matemática contemplando somente um desses vieses, fazendo com que os alunos possam ao longo do desenvolvimento das aulas de Matemática resolver, propor e explorar problemas em sala de aula.

7. Resultados da pesquisa

Podemos apontar que as maiores dificuldades na compreensão do conceito de função continuam sendo os seus elementos componentes, tais como: domínio, imagem, regra de associação e também devido às diferentes representações de funções. Aproximando-nos das ideias defendidas pelos pesquisadores Markovits, Eylon e Buckheimer (1995) e Cooney et al (2002 apud Cooney, Backmann e Lloyd, 2010) que apontam essas mesmas dificuldades sentidas por alunos nas suas pesquisas.

Possivelmente, as representações numéricas foram durante a pesquisa as mobilizações mais espontâneas por parte dos alunos durante a resolução, proposição e exploração de problemas matemáticos. Para Vygotsky (2008) elas estão em um nível de conceitos cotidianos em que os alunos podem mobilizá-las por conta própria, nível real de desenvolvimento dos alunos.

A representação algébrica de uma função por meio de uma regra geral, a equação algébrica da função, para os alunos eram motivo de dificuldade, quando precisavam fazer a generalização da lei de formação de uma função. De acordo com Vygotsky (2008), o nível algébrico é mais abstrato e na maioria das vezes os alunos precisavam da nossa mediação, atuando dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal para que eles pudessem chegar aos níveis de pensamento superior, o pensamento algébrico funcional. De onde podemos concluir que a representação algébrica foi a mais complicada para os alunos porque envolveu um grau maior de generalização e abstração.

Evidenciamos no cotidiano da sala de aula, onde foi realizada esta pesquisa, que uma das maiores dificuldades dos alunos no estudo de funções foi com a sua representação gráfica e a conversão da representação gráfica para outras formas de representações se apresentou também de forma problemática. Fato esse superado por meio das explorações de transição de uma representação para outra, pois o estudo de funções em um só sentido não automatiza a conversão para realizações de mudanças em outras modalidades de representações.

Na nossa investigação, podemos apontar, por meio das atividades que foram realizadas nas ações e interações em sala de aula, o que os idealizadores das grandes ideias de funções Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) afirmam que os alunos evidenciam compreensão das ideias essenciais de funções no desenvolvimento de habilidades e estratégias fluindo entre e em meio a essas ideias, representações e características de funções. Dentre as cinco ideias essenciais de funções, podemos destacar as representações múltiplas de funções como ferramenta poderosa por excelência que perpassam por todas as formas de se fazer matemática via resolução, proposição e exploração de problemas. Portanto, no trabalho de resolver, elaborar e explorar problemas, os alunos, durante o desenvolvimento desta pesquisa, mobilizaram representações múltiplas de funções, garantindo assim um aprendizado mais significativo e enriquecedor.

8. Referências

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). p. 16-36

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p.151-173.

COONEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing essencial understanding of functions**: for teaching mathematics in grades 9-12. Reston, NCTM, 2010.

ENGLISH, L.; SRIRAMANN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMANN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. p. 263-290..

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001 (Yearbook 2001). p. 173-185.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. K. Research in mathematics problem solving. In: Shumway, R. J. (Ed.). Research in mathematics education. Reston, NCTM, 1980. p.286-323.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995. p. 49-69.

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

______. ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

______. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática. v.25, n.41, Rio Claro (SP): UNESP-IGCE, dez. 2011, p. 73-98.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizadores Michel Cole et al.; Tradução: José Cippolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

______. **Pensamento e linguagem.** Tradução: Jefferson Luiz Camargo; Revisão técnica José Cippolla Neto. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.