

## SENTIDOS CIRCULANTES: AS IDEIAS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS EM ALUNOS DE UMA TURMA DO CURSO NORMAL

*Bruno Marques Collares*

*UFRGS*

[collares.bruno@hotmail.com](mailto:collares.bruno@hotmail.com)

### **Resumo**

O texto relata uma tentativa de compreensão sobre os sentidos que são dados à multiplicação por alunos que fazem parte de uma turma de um Curso Normal (antigo Magistério) de uma escola pública de Porto Alegre. Para tal, foi analisada uma coleção de problemas envolvendo multiplicação, voltados para séries iniciais do Ensino Fundamental e criados pelos próprios alunos deste curso, com o propósito de encontrar as ideias de multiplicação mobilizadas pelos estudantes, e classificá-las quanto à natureza dos problemas multiplicativos. A pesquisa apresentou entre as questões criadas uma tendência ao sentido proporcional como norteador de problemas multiplicativos, seguido da ideia de multiplicação no contexto combinatório, e por fim, com menor incidência, está a ideia de problemas multiplicativos como o produto de medidas do ponto de vista geométrico.

**Palavras - chave:** Matemática, Ensino, Séries Iniciais, Multiplicação, Problemas Multiplicativos.

### **1. Introdução**

O debate a respeito dos significados da multiplicação é um tópico relevante para o ensino e aprendizagem de matemática. Muitas das dificuldades que aparecem em alunos durante sua vida escolar, em especial nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, podem provir de lacunas ou incompreensões a partir de sentidos mal configurados nas séries iniciais Ensino Fundamental. Por exemplo, um aluno do 7º ano das séries finais do Ensino Fundamental pode encontrar dificuldades ao entender o processo de “*pôr em evidência*” um fator comum na resolução de uma equação do tipo  $6x+8y=2$ , que neste caso é o número 2 do lado esquerdo da expressão, que resulta em  $2(3x+4y)=2$ , e esta dúvida pode estar referida a um entendimento restrito do processo de multiplicação como operação aritmética e suas propriedades. Da mesma forma, um aluno do 5º ano, ao resolver questões que envolvam multiplicação relacionada à geometria poderá encontrar obstáculos ao solucionar um exercício do tipo “*Encontre a área de um retângulo cujos lados medem 9 e 7.*”; parece ser um problema elementar de geometria, ou talvez um aluno que não tenha

definido área de um retângulo como o produto das medidas de seus lados poderá encontrar dificuldades em encontrar esta área se não relacioná-la com a multiplicação. Para alguém que deu sentidos corretos à multiplicação nos primeiros anos de formação, talvez seja mais provável que consiga deduzir a área da figura a partir do produto de suas medidas, sem precisar definir de maneira particular esta “fórmula” geométrica no cálculo de áreas.

Considerando que os alunos começam a construir a noção de multiplicação desde o início de sua vida escolar, perguntamos: quais são os sentidos da multiplicação empregados pelos professores das séries iniciais quando ministram suas aulas? O objetivo desse texto é tentar compreender quais são os sentidos dados para problemas de multiplicação às crianças nas séries iniciais, a partir de um estudo preliminar feito com alunos de um Curso Normal, em nível médio, em processo de formação docente.

A ideia surgiu durante as práticas de Estágio em Educação Matemática 3, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, as quais ocorreram no Instituto Estadual Dom Diogo de Souza, de Porto Alegre, estado do Rio Grande do Sul, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio do Curso Normal, responsável por formar futuros professores das séries iniciais. A prática se deu durante uma das disciplinas ministradas por mim na escola, chamada “Didática da Matemática”, que tratam de assuntos voltados ao ensino de matemática nas séries iniciais.

Para tanto, neste artigo, na primeira seção serão discutidas as noções e os sentidos do conceito de multiplicação, bem como suas diferenças com a adição. Mais a frente, serão apresentados os tipos de problemas multiplicativos existentes. Finalmente, em posse de problemas de multiplicações criados pelos alunos do Curso Normal, serão analisados os sentidos empregados por eles à multiplicação, mais especificamente a problemas de multiplicação voltados a alunos das séries iniciais.

## **2. Das noções e sentidos para a multiplicação nas séries iniciais.**

Muito se ouve sobre a multiplicação e sua relação com a adição. Neste âmbito, há um pressuposto entre educadores, que classificam a multiplicação como uma adição repetida de parcelas iguais. Por exemplo, para resolvermos o produto  $3 \times 6$ , basta somarmos o número 6 três vezes. Esta concepção ainda aparece com certa frequência entre educadores e alunos em formação docente nas faculdades e escolas de formação para o Magistério. Isto parece bem claro nas práticas que vivenciadas durante a graduação em

matemática, e em muitos casos professores e colegas afirmaram com veemência esta prerrogativa.

Porém, atualmente já se discute esta questão de maneira crítica, partindo de uma argumentação que encontra diferenças cruciais entre multiplicação e adição, com algumas particularidades em comum somente. Para Nacarato et al (2008), *“do ponto de vista conceitual, existe uma diferença significativa entre adição e multiplicação – ou, de maneira mais ampla, entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo”* (NACARATO et al, p. 78).

De acordo com Nacataro et al (ibid.), o raciocínio aditivo segue uma axiomática de que o todo é igual à soma das partes, que é a essência do raciocínio aditivo parte-todo. Já para o raciocínio multiplicativo existe uma analogia de duas grandezas em relação constante entre si. Ou seja, problemas multiplicativos nos levam a procurar um determinado valor que corresponde a outro anteriormente dado, que por intermédio de uma operação resultou neste produto:

Quando resolvemos um problema de raciocínio aditivo, estamos sempre deduzindo algo que está baseado na relação parte-todo. Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante entre as duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo (NACARATO et al, p. 79).

Assim, vemos que a conexão anteriormente feita entre a adição e a multiplicação não é suficiente para definirmos o conceito de multiplicação. Para Backendorf (2010):

Pode-se utilizar a adição repetida nos cálculos de multiplicação onde um dos fatores é inteiro, pois a multiplicação é distributiva com relação à soma; no entanto a adição e a multiplicação são operações com significados distintos e que envolvem também raciocínios de natureza distinta. (BACKENDORF, p.52).

Portanto, justificar a multiplicação como uma adição repetida é apenas basear-se em um caso particular da multiplicação. A origem dos conceitos se difere, e devem ser trabalhadas de maneiras distintas uma da outra.

### **3. Classificações (ou sentidos) dos problemas multiplicativos**

Backendorf (2010) nos apresentou uma síntese clara sobre os problemas do tipo multiplicativo definidos por Vergnaud (2009). De acordo Backendorf (ibid.), Vergnaud

organiza os problemas de multiplicação em três subtipos: Isomorfismo de Medidas, Produto de Medidas e Proporção Múltipla.

Problemas de Isomorfismo de Medidas estão relacionados com as ideias de proporcionalidade simples e direta entre dois conjuntos de mesma medida, a partir de uma relação quaternária entre quatro quantidades (Vergnaud, p. 239). De modo análogo, Backendorf (2010) nos diz que problemas de proporções simples envolvem apenas duas variáveis e são adequadamente modelados por uma função linear (p. 48). Todavia, a autora também indica que esta transfiguração para a função linear não é um caminho apropriado aos alunos, e que o melhor seria aplicar as propriedades isomórficas que abrem a soma “ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ” e a multiplicação “ $f(a.x)=a.f(x)$ ”. Justamente por causa desta modelagem às propriedades isomórficas, Vergnaud chama este subtipo de problemas de Isomorfismo de Medidas. Por exemplo, podemos identificar esta propriedade que “quebra a soma” no problema “*Um tonel tem capacidade para armazenar 200 litros de gasolina. Se a empresa possuir 10 tonéis do mesmo tipo, quanto de gasolina poderá armazenar?*”. A multiplicação é aplicada ao número de tonéis e à quantidade de litros de gasolina: se  $f(1)=200$ , então  $f(10) = f(10 \times 1) = 10 \times f(1) = 10 \times 200 = 2000$  litros. Para a criança, esta aplicação da segunda propriedade do Isomorfismo pode ser representada analogamente por um esquema tabular:

Tonel	Gasolina
1	200 litros
10	x

Esquema análogo: Isomorfismo de Medidas

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do 1º ciclo do Ensino Fundamental (Brasil, 1997), esta estrutura isomórfica é subdividida em duas ideias, a de multiplicação comparativa, e a de proporcionalidade; ambas fazem parte do subtipo Isomorfismo de Medidas. Vejamos um exemplo característico de problemas de multiplicação comparativa: “*se um carteiro distribuiu em um bairro 110 cartas, e no bairro seguinte que era maior distribuiu o triplo de cartas, quantas cartas foram entregues neste segundo bairro?*”. Este problema nos apresenta uma comparação entre o número de cartas que um carteiro distribuiu em cada bairro a partir da conotação do termo “*triplo*”, que nos indica que a

quantidade inicial deve ser multiplicada por três. Por esta razão, este problema é encaixado dentre os que são de multiplicação comparativa. Já o problema dos tonéis, apesar de haver uma comparação entre a quantidade de um tonel e a quantidade de dez tonéis, apresenta uma clara proporção entre as medidas inicial e final.

O segundo grupo denominado Produto de Medidas é apresentado por Backendorf (2010) como:

[...] uma estrutura que consiste numa composição cartesiana entre dois espaços de medida e um terceiro. Ele descreve um satisfatório número de problemas relacionados à área, volume, produto cartesiano, trabalho e vários outros conceitos físicos [...] (BACKENDORF, p. 50).

Esta definição apresentada, baseada na obra de Vergnaud (2009), também pode ser referendada nos PCNs. Esta estrutura é denominada Configuração Retangular (Brasil, 1997, p. 73). Esta forma de classificação nos apresenta uma proximidade entre a multiplicação e a geometria. Por exemplo, problemas típicos que envolvem esta ideia são aqueles em que se pretende calcular a área de uma sala retangular; o resultado obtido pelo produto “*x metros de largura*” vezes “*y metros de comprimento*” é a área total da sala em metros quadrados. Vergnaud (2009) afirma que “*o esquema mais natural para representar essa forma de relação é aquele da tabela cartesiana porque, de fato, é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas.*” (idem, ibidem, p. 254).

A terceira classe de problemas multiplicativos é denominada Proporção Múltipla. Do ponto de vista aritmético, esta classe e a anterior são muito parecidas (Backendorf, 2010). Neste caso, teremos três espaços de medidas proporcionais. Nos PCNs, este subgrupo é associado às ideias de Combinatória, pois em muitos casos o problema aciona o princípio multiplicativo durante sua resolução. Por exemplo, na seguinte situação podemos arrolar as três variáveis para chegar ao resultado do problema:

- Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes? Os alunos costumam solucionar esse tipo de problema por meio de tentativas apoiadas em procedimentos multiplicativos, muitas vezes representando graficamente o seguinte raciocínio:
- Um rapaz e 3 moças formam 3 pares.
- Dois rapazes e 3 moças formam 6 pares.
- Três rapazes e 3 moças formam 9 pares.
- Quatro rapazes e 3 moças formam 12 pares (BRASIL 1997, p. 73-74).

Basicamente, estas três configurações apresentadas englobam grande parte dos problemas de multiplicação que integram as aulas de matemática nas séries iniciais.

#### **4. A experiência na sala de aula**

Os encontros com os alunos serviram para discutirmos questões relevantes para o ensino de matemática nas séries iniciais, bem como para a produção de materiais e para a crítica sobre a sua viabilidade. As operações aritméticas de adição e subtração foram exaustivamente trabalhadas e instrumentadas. Porém, o tópico que mais chamou a atenção foi o trabalho com a multiplicação, especificamente a criação de problemas multiplicativos.

Na primeira aula deste tópico iniciamos o tema “problemas de multiplicação” aplicados a séries iniciais. Era o primeiro momento em que estávamos tratando a multiplicação. Portanto era a primeira discussão que a turma teria sobre problemas multiplicativos na disciplina. Como tarefa inicial da aula, foi pedido aos alunos da turma que criassem pequenos problemas de multiplicação que pudessem ser aplicados a alunos das primeiras séries do Ensino Fundamental. Os problemas seriam feitos sem qualquer restrição dada.

É importante salientar que esta tarefa não foi precedida por qualquer tipo de discussão ou leitura sobre problemas multiplicativos. O intuito foi, a partir da própria percepção dos alunos em formação docente, perceber que sentido estão dando para problemas multiplicativos. Foram criados pelos alunos um conjunto de 16 problemas, e a partir deles entenderemos que sentidos os alunos estão dando a problemas de multiplicação voltados para crianças.

#### **5. Procurando os sentidos dos problemas de multiplicação**

Analisando os problemas entregues pelos alunos, notamos que do total de 16 problemas, nove referiam-se à multiplicação como Isomorfismo de Medidas, pois apresentavam claramente aspectos de proporção simples e multiplicação comparativa. Um problema era do grupo denominado Produto de Medidas, pois lançava uma ideia geométrica em seu enunciado. Já cinco deles se encaixaram nas Proporções Múltiplas pelo

seu caráter combinatório; e por fim, houve um problema que não se encaixou em alguma das subdivisões.

Vejamos, por exemplo, um problema criado pelos alunos que diz “*Fábio foi à feira e comprou 4 caixas com 30 laranjas cada. Quantas laranjas ele teve ao total?*”. Neste caso, podemos representar esta proporção no esquema a seguir:

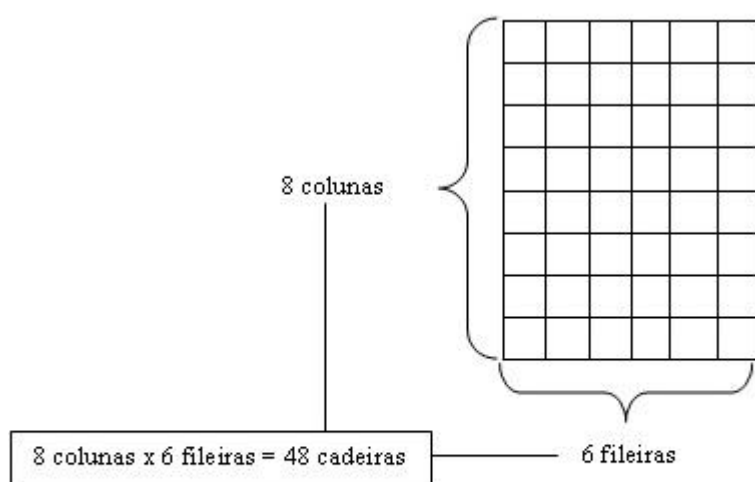
Caixa	Laranjas
1	30
4	x

Esquema do Problema

O problema acima nos traz a proporção  $\frac{1}{4} = \frac{30}{x}$ , onde x indica a quantidade de laranjas contidas em quatro caixas. Dos nove problemas de Isomorfismo de Medidas, considerando os PCNs, sete deles eram problemas de proporção direta. O sentido de proporção direta foi apresentado no esquema acima que, e justamente pelo formato proporcional dos sete problemas mencionados eles podem ser classificados neste grupo. Por outro lado, o o seguinte problema afirma “*Lais tem 6 bananas e João, o dobro dessa quantia. Quantas bananas João tem?*”. O que caracteriza a ideia comparativa neste problema é o termo “*dobro*”, por esta razão este problema faz parte da lista de problemas comparativos.

Encontramos uma curiosidade dentre os nove problemas de Isomorfismo de medidas. O seguinte problema nos apresenta uma curiosa junção de um problema multiplicativo com aditivo; seu enunciado diz “*Uma moça comprou um vestido que custava R\$ 23,00, mas ela resolveu comprar mais 3 vestidos. Quanto ela gastou ao total?*”. Note que a pergunta nos leva a deduzir que o total que a moça gastou é obtido pelo produto “*3 vezes o preço*”, e ainda devemos somar o primeiro vestido comprado, pois no enunciado aparece “*resolveu comprar mais 3 vestidos*”.

Por outro lado, outra questão criada, enunciada por “*Uma sala de aula tem 6 fileiras com 8 colunas. Quantas cadeiras tem nesta sala de aula?*”, é a única que constitui o subitem Produto de Medidas, denominado nos PCNs (p. 73) como Arranjo Retangular, uma vez que seu enunciado nos arremete a uma apreciação geométrica do problema. Desta forma, podemos esquematizar o problema como o produto das medidas dos lados de um retângulo, assim como foi discutido nas seções anteriores:



**Esquematisação do problema anterior**

A ideia de Proporções Múltiplas foi encontrada em cinco questões. Alguns deles continham de maneira explícita o termo “*combinações*” em seu enunciado, enquanto em outros, identificamos as expressões “*quantas opções*”, “*quantos pratos diferentes*” e “*quais as possibilidades*”, trechos indicativos de que os problemas seriam de proporções múltiplas.

Dos 16 problemas coletados, um deles causou estranheza, talvez por não parecer um problema que se encaixe em alguma das três subdivisões. É o caso do problema que diz “*Joana tem 3 balas, quantas vezes ela precisa repetir este número para ele se tornar par?*”. Temos duas possibilidades para este problema. Primeiro, o ato de repetir o número deixa suspeitas de que devemos, de fato, repetí-lo algumas vezes até que ele se torne par, isto é, recai em um problema de repetição ou soma de parcelas. Porém, ser par significa ser múltiplo de 2, ou seja, um número par é alguma quantidade natural multiplicada pelo 2. No primeiro caso, temos uma variante de um problema aditivo. Diferentemente, no segundo caso, ao referir-se ao termo “*par*” o problema trás em si propriedades da multiplicação. Isto nos apresenta uma dúvida que não me permitiu classificá-lo dentre os três subgrupos.

Em resumo, pelos dados obtidos, nove problemas estão na categoria Isomorfismo de Medidas, um está no Produto de Medidas, cinco estão dentre as proporções múltiplas e um parece não ter sido caracterizado por alguma das três classificações. Uma possível justificativa talvez passe pela forma com a qual se formulou o problema.

Sem uma delineação prévia, os alunos do Curso Normal em questão, cerca de 56% deles, parecem estar mais habituados a entenderem problemas multiplicativos voltados às



crianças das séries iniciais como proporções simples. Em segundo lugar, em torno de 31% dos casos, a ideia parece ser a de que problemas multiplicativos são problemas que envolvem proporções múltiplas e raciocínios combinatórios. Um único problema, cerca de 6% do total, representa o produto de medidas relacionado às ideias geométricas. E também representando em torno de 6% do problemas encontrados está aquele que não conseguimos definir, inclusive podemos abrir uma discussão se realmente ele faz parte de problemas da classe multiplicativa, para daí classificar como Isomorfismo de Medidas, Produto de Medidas ou Proporção Múltipla.

## **6. Considerações Finais**

Esse tema foi escolhido porque, primeiramente, é de grande importância na discussão sobre o ensino e aprendizagem de matemática, principalmente nas séries iniciais. Acredito que seja nos primeiros ciclos escolares que a criança construa a noção de multiplicação, e esta ideia parece ser a que impulsiona as demais ideias multiplicativas nas séries finais. Por exemplo, o princípio multiplicativo, bastante salientado quando se estuda as ideias de combinatória no Ensino Médio, é um sentido para a multiplicação que apareceu nos problemas criados pelos alunos do Curso Normal, voltados aliás para alunos das séries iniciais. Ou seja, o princípio multiplicativo não é uma ideia nova que surge nas séries finais da escola. Assim como algumas dificuldades podem dar indícios de uma má estruturação desses sentidos nas primeiras séries, poderíamos também considerar as vantagens que uma criança poderá ter quando defrontada com problemas mais complexos de multiplicação, se estes sentidos forem bem estruturados.

Um fato surpreendente durante a atividade foi o número de problemas criados cujo sentido empregado era o de proporções múltiplas. Não era esperado que um número tão expressivo de alunos considerasse essa subdivisão de problemas combinatórios como um tipo de problema multiplicativo.

A experiência como um todo, ocorrida durante o estágio, decorreu um esforço grande de adaptação aos desafios encontrados, e esse esforço desencadeou aprendizados além do esperado. Trabalhar na disciplina de Didática da Matemática realmente foi o maior desafio. Os dados obtidos durante o trabalho inicial a respeito de problemas de multiplicação para crianças dos primeiros ciclos serviram para que traçássemos um

panorama, bem preliminar, a respeito dos sentidos que estão sendo empregados nas escolas pelos professores que atualmente estão sendo formados.

O profissional da educação necessita estar interado destas questões, pois como vimos, algumas das ideias anteriormente tidas como “*canônicas*” estão sendo discutidas e postas em cheque; é o caso da multiplicação como soma repetida de parcelas, linha criticada por muitos autores. O desafio daqui em diante será pensar a formação docente do licenciado em matemática para o entendimento dos sentidos empregados ao raciocínio multiplicativo e aos problemas de multiplicação aplicados a alunos das primeiras séries, pois este é um tema pouco trabalhado na nossa formação durante a graduação.

## 7. Referências

NACARATO, Adair M. GOMES, Adriana A. M. GRANDO, Regina C. **Experiências com Geometria na Escola Básica:** narrativas de professores em (trans)formação. Pedro e João Ed. 2008, São Carlos – SP.

BACKENDORF, Viviane. **Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do ensino fundamental:** um estudo de caso. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática – UFRGS, 2010.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Ed. da UFPR, 2009 – Paraná.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Ensino de primeira à quarta série. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.