PERSPECTIVAS PARA O ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS INFINITAS COMO CAMPO CONCEITUAL

Camila de Oliveira da Silva
Escola Estadual Maria Constança Barros Machado
camimatt@hotmail.com

Resumo
Este texto tem como finalidade suscitar reflexões para a abordagem do conteúdo de progressões geométricas infinitas, estudadas, inicialmente, na educação básica brasileira. Assim, é proposto que este conceito seja abordado junto a diversos conceitos que dão sentido a ele, com o intuito de dar significado ao que observamos superficialmente, quando o foco está apenas no uso de expressões algébricas. Desta forma, busca-se por um estudo em que o aluno se expresse ao conjecturar e estabelecer relações com o que está sendo abordado. Esperamos que a exploração dos conceitos contidos no campo conceitual das progressões geométricas possa contribuir para o ensino-aprendizagem deste conteúdo e como referência para a prática de professores que o lecionam em sala de aula.

Palavras-chave: Progressões Geométricas; Campo Conceitual; Educação Básica.

1. Introdução

Na matemática da educação básica brasileira, encontramos vários temas que, geralmente, são estudados por meio de notações algébricas, fórmulas e, que muitas vezes se mostram um tanto sem significado para os alunos. A mera aplicação de técnicas para resolver algum problema, deixa a atividade matemática pouco atraente, quando poderia ser abordada de forma a fazer com que os alunos conjecturem sobre o que se observa e validem suas afirmações. Nesse último caso, o uso de uma expressão algébrica pode ser usado como método de resolução de problemas de forma consciente, quando o aluno sabe da onde saiu tal mecanismo, por que usá-lo em determinada situação e ao compreender até onde o procedimento pode ser aplicado.

Assim, a atividade matemática que favoreça com que o aluno seja ativo na construção de seu conhecimento, leva-nos a refletir sobre a forma com que possamos explorar os conteúdos matemáticos, para este fim. Nesse intuito, pensamos no estudo das progressões geométricas em que é basicamente explorado, em livros didáticos, sob a forma de padrões e uso de fórmulas gerais. Nessa abordagem, passa-se de uma progressão geométrica finita para a progressão geométrica infinita, a partir do uso de uma fórmula, apenas para encontrar a soma infinita de seus termos. Com o intuito de tornar mais significativo o trabalho com esse tema, priorizando a construção de conceitos e significados que possam fundamentá-lo, visamos uma abordagem que desperte o interesse dos alunos pelo assunto, envolvendo-o na busca de soluções. Nesse viés, o aluno é convidado a refletir sobre situações que envolvem um trabalho com a noção de infinito, o que requer maior abstração do que uma simples aplicação de técnicas.

Diante desse cenário, nos questionamos sobre: Como explorar o conteúdo de progressões geométricas infinitas, de forma a torná-lo mais significativo, para alunos de ensino médio, no estudo com o tema?

Em busca de responder a essa questão, tomamos como base os pressupostos de Vergnaud (1996), psicólogo francês, em que levaremos em conta o que o autor considera como sendo um c*onceito*, visto que esse é o ponto principal, para tentarmos compreender em que sentido e como um conceito pode ser explorado.

Vergnaud (1996) destaca que o *conceito* não consiste em uma definição textual e nem se encontra isolado, mas é composto por uma tríade (S, I, L) formada pelo conjunto de situações *(S)*, que dão sentido a um conceito, os i*nvariantes* operatórios *(I)* que são constituídos pelos conceitos em ação e teoremas em ação (significados) e as *formas de linguagem (L)* que permite expressar um conceito (os significantes). Dessa forma, as representações simbólicas usadas, as propriedades conceituais que são trabalhadas e os significados envolvidos em diferentes situações fazem parte do ensino formal de conceitos, como aponta Borba (2009), ao se referir o quanto a compreensão de um conceito está fortemente ligada a esses fatores conceituais. Nesse sentido, buscaremos vincular essa tríade, para melhor compreender o campo de estudo das progressões geométricas infinitas.

2. O Campo das Progressões Geométricas Infinitas

Como relatamos anteriormente, o conteúdo de progressões geométricas infinitas é apresentado em livros didáticos do ensino médio de forma quase “solta” em termos conceituais, isto é, sem realizar vínculos com outros conceitos e sem propor situações que podem dar sentido a esse conceito. Ao realizar a passagem do reconhecimento de regularidades cuja abordagem encontra-se nas progressões finitas, para o estudo do tema junto a noção de infinito, muitas vezes é deixado de lado os conceitos que permitem aos alunos compreenderem os significados das fórmulas e as representações simbólicas utilizadas.

Ao identificar as progressões geométricas infinitas como campo conceitual, levamos em conta uma rede de conceitos que estão intimamente ligados ao tema e, que é por meio deles que consideramos uma abordagem concisa desse conteúdo. Dentre alguns deles, relatamos:

O Estudo dos números racionais e suas operações: apresentamos inicialmente esse conceito matemático, pois o consideramos essencial para o estudo das progressões geométricas. São estes conceitos que estarão sempre permeando a ação do aluno, ao resolver os problemas propostos. Posteriormente, elencamos o *estudo de uma função,* visto que é necessário estabelecer ligações com o tema, ao representar graficamente os termos de uma progressão, analisando o comportamento de seus termos, a importância do domínio desta função, pois só assim é possível ter uma compreensão das linguagens a serem usadas. Cabe ressaltar que muitas vezes os livros apenas menciona este conceito, ao abordarem a definição de sequências numéricas, deixando muito a desejar.

Outro "conceito" intimamente interligado no conceito de progressões é *a noção de infinito*. Neste estudo o infinito é peça chave, uma vez que este não é estudado, mas está intrínseco a vários conteúdos matemáticos. Aqui é necessário observar se os alunos transportam as propriedades relacionadas às grandezas finitas para as infinitas, por exemplo, ao considerar a variável n como sendo representante do infinito. Essa compreensão é fundamental, pois só assim os alunos poderão conceber essa noção e estudar o tema de forma a compreender todo o processo.

Paralelamente está *a noção de infinitésimo*, ao observarmos os termos de uma progressão geométrica decrescente. Ao identificar os termos da sequência, em uma reta numerada, por que não, questionar o aluno sobre o que ele observa quanto ao comportamento de seus termos, quando n cresce indefinidamente? Um exemplo desta aplicação pode ser verificado na atividade 02, em anexo. Nesta, usamos os três conceitos já citados e outros a serem abordados, como a ideia de convergência, uma vez que é possível retomar o estudo do conceito de número racional, estimular o pensamento intuitivo com a noção de infinito e infinitésimo, além de aprimorar o estudo de uma função com domínio natural, ao analisar graficamente o comportamento dos termos da função considerada. Este "exercício" é, portanto, ir além de um trabalho pontual e sem significado, mas sim, levar os alunos a explorarem os conceitos que pode ser observado intuitivamente e comprovados após o trabalho com os mesmos.

As expressões algébricas são conceitos que permitem expressar um pensamento, uma vez que a atividade algébrica deveria ser melhor explorada. É traduzir um pensamento e utilizar uma linguagem (significante) para expressar as situações que se observa. Outro conceito diz respeito à *noção de limite (convergências).* É por meio das convergências que é possível instigar os alunos a levantar conjecturas e a refletir sobre o que acontece com os termos de uma progressão geométrica infinita. Essa noção pode ser explorada com o tema, ao dar significado e fundamentar as ações que fazemos, em especial, quanto às somas infinitas, sendo nas mesmas que se encontra a maior problemática do estudo das progressões geométricas.

Contudo, é nesta perspectiva que, ao abordar esse tipo de soma, refletirmos sobre o campo de possibilidades que há em termos de conceitos a serem explorados, levando em conta o pensamento intuitivo do aluno no estudo com problemas que envolvem o infinito.

Gimenez e Lins (1997) apontam que, o papel que a intuição desempenha na construção das ideias complexas se mantem essencialmente importante, ao valorizar o conhecimento que os alunos trazem ao lidar com uma situação não prevista. Porém, é a partir da intuição que buscamos gerenciar a passagem da descoberta de regras e estratégias a um modelo explícito, sem deixar de considerar a construção dos conceitos pelos alunos ao gerenciar e validar suas afirmações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destaca o papel da resolução de problemas, ao afirmar que:

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos [...] (BRASIL, 1998, p.110).

Com esse intuito, as atividades 01 e 03, em anexo, consistem em possibilidades para que se estabeleçam relações entre os diferentes conceitos diante do estudo de progressões geométricas infinitas, em especial no que tange as soma infinita dos termos de progressões geométricas. Assim, acreditamos que a atividade 01 possa contribuir para atividade matemática com relação ao tema, de forma a desestabilizar cognitivamente o aluno frente a um primeiro contato com a noção de infinito. Ainda nesta, o aluno é levado a conjecturar a respeito de algum significante (expressão algébrica) que possa retratar a situação observada. Nesta situação, os alunos podem realizar conversões entre frações e números decimais em busca de encontrar uma solução, a partir de cálculos aproximativos ou até mesmo expressarem uma regra-em-ação do tipo (x - 1)/x que condicionaria a observar que o recipiente tenderia a encher a medida que x cresce infinitamente, após analisar o infinitésimo 1/x. Da mesma forma, a atividade 03 estabelece uma relação mais sistematizada com relação à fórmula de S_n. Nesta, o aluno é levado a conjecturar frente às propriedades geométricas, a partir da figura de um quadrado, analisando nesta situação, uma soma infinita de termos, expressos na forma racional. Após buscarem uma expressão algébrica que expressem a enésima área considerada, será necessário realizar o estudo de passagem ao limite na fórmula da soma dos termos de uma PG, uma vez que n cresce indefinidamente. Por esta situação sistematizar a passagem ao limite focaremos, a seguir, o estudo da soma infinita dos termos de progressões geométricas, na perspectiva de melhor compreender o processo de construção dos conceitos envolvidos na passagem ao limite.

3. Como dar significado à soma infinita dos termos de progressões geométricas?

Segundo Gimenez e Lins (1997), o processo de caracterizar objetos abstratos tem se mostrado um tanto complexo, principalmente ao lidar com conjuntos infinitos. O autor exemplifica que não há como dar significados a eles, por meio de situações concretas, indagando-nos sobre o fato de como contar um conjunto infinito, tendo como base, tudo que aprendemos para os conjuntos finitos. Assim, a passagem das propriedades finitas para as infinitas, constitui em um processo longo e árduo, que se manifesta desde a história da matemática. Caraça (2005) ressalta que não há como associar as propriedades de soma finita às infinitas, uma vez que as propriedades comutativa, associativa não satisfazem essa nova entidade. Este autor ainda afirma que a soma infinita não se reduz ao cálculo aproximado de sua soma. Cientes de todo processo que constitui esse conceito, passamos a refletir, então, sobre a forma com que podemos dar significado a essas somas, já que não há lógica nos referir a um método de contagem, como meio de caracterizá-la.

Com o intuito de proporcionar aos alunos situações que eles possam refletir sobre, e elaborar conjecturas, vimos que o estudo das somas infinitas dos termos da progressão geométrica, pode partir, num primeiro momento, do cálculo aproximado, fazendo uso de calculadoras. Com isso, consideramos que o aluno é capaz de identificar o que acontece com esse tipo de soma, quando conseguimos somar algumas dessas parcelas. Deduzir o resultado, a primeira vista, é essencial para que depois, passamos ao processo de validação, e progredimos ao trabalho com o contínuo. Nesse caso, os alunos devem explicitar o que observou e, justificar suas afirmações. Para Gimenez e Lins (1997), o conhecimento é formado pela crença/afirmação junto a uma justificação. Nesse processo, o aluno constitui uma crença, em que o processo de justificação ainda é precário, porém essencial para buscar um método que justifique e dê significado ao que se observa intuitivamente.

Com esse pensar, buscamos instigar cada vez mais nossos alunos, ao processo de justificação. Tendo como base os conceitos que constituem o campo das progressões geométricas é necessário um trabalho que faça os alunos refletirem sobre uma soma finita, e um método de resolução. Por meio de uma situação problema elaborada com o propósito de questionar o aluno sobre o cálculo de uma soma '*grande*', porém finita, leva-nos a buscar por um método consistente e, que consiga dar significado ao que propomos. Assim, junto às propriedades geométricas levantadas anteriormente, faz-se necessário a dedução da fórmula da soma dos n termos de uma progressão geométrica. Nesse trabalho, acreditamos ser viável, se partirmos da aritmética, para que seja possível dar significado a cada expressão usada nesse processo. Atingindo esta soma e, conseguindo resolver os problemas nesse campo, cabe questionarmos: E, se em certa situação, tivermos uma soma infinita, será que podemos aplicar a fórmula usada anteriormente? Nesse caso, como lidar com o infinito?

Dada a expressão, pensemos sobre seu significado, em torno do núcleo das somas infinitas: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Visto que esta satisfaz situações cujo objetivo está em encontrar a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, onde n representa um número desconhecido, o qual pode variar dependendo do valor ao qual queremos obter. No entanto, quando pensamos no infinito, a variável n não pode representá-lo, já que esse consiste em um processo contínuo em que observamos o comportamento dessa soma, quando n cresce infinitamente, para que possamos concebê-la na condição de objeto, como ressalta David e Moreira (2007). Se, o estudo das progressões geométricas infinitas for explorado, no sentido que abordamos anteriormente, ao considerarmos os demais conceitos envolvidos nesse campo, é possível construir a noção de limite, como meio de fundamentar o sentido dessa soma. A noção de infinitésimos é essencial para entendermos a notação usada na fórmula acima, em relação à (q^n), já que é nesse caso que a soma irá convergir para um número finito, o qual denominamos o limite da soma considerada. Caso contrário, é possível verificar o comportamento dessa soma, a qual divergirá. O significado dado às somas infinitas, junto à passagem do limite, remete a um trabalho com os diversos conceitos ligados a este campo. Não basta apenas aplicar uma fórmula, sem identificar o pensamento que fundamenta tal expressão. No trabalho com as progressões geométricas infinitas, a atividade algébrica, deve ser construída de forma a produzir significado, estabelecer relações entre os termos utilizados, isto é, é uma atividade de pensar sobre uma situação a qual só terá sentido quando entendemos o processo ao qual é constituído.

Nesse sentido, a soma infinita dos termos de progressões geométricas passa a ser condição de objeto a ser estudado, e compreendido no corpo de conhecimento, que dão sentido a ela. É no processo de construção dos conceitos que poderemos tornar o estudo das progressões geométricas infinitas, como meio de explorar situações e aprendizado e, não como reprodução de fórmulas e notações simbólicas sem significado.

4. Considerações finais

Com esse texto, buscamos explorar o tema das progressões geométricas infinitas, a qual é deixada ao final do capítulo nos livros didáticos e, como consequência, quase não é abordada pelos professores. Esse conteúdo nos mostrou um campo de conceitos a considerar, de forma a provocar o espírito investigativo dos alunos e a curiosidade ao lidar com o infinito.

Para o estudo deste tema, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio propõem que o aluno deva “reconhecer e utilizar a linguagem algébrica, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema” (BRASIL, 1998, p.122) e, com esse intuito buscamos suscitar uma reflexão para a abordagem de uma atividade algébrica com significado. Desta forma, propomos que ao abordarmos este conteúdo matemático, não deixemos de lado suas particularidades e os conceitos que podem neles ser explorados, para que possamos redimensionar novas reflexões a respeito deste objeto de estudo, com vista a melhoria do ensino e aprendizagem deste conteúdo escolar.

5. Referências

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros relativos. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs.). **A pesquisa em educação matemática: repercussões em sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009. p. 58 - 71.
BRASIL (País), Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2005.

DAVID, M.M.M.S; MOREIRA, P.C. **A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar**.Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

GIMENEZ, J.; LINS, R.C. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas – SP: Papirus, 1997.

VERGNAUD, G. **A Teoria Dos Campos Conceptuais**. In: BRUN, J. (org). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, Cap.3, p.155-191, 1996.

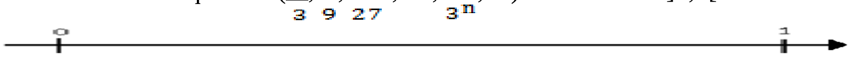
6. Anexos

Atividade 1. Num recipiente de capacidade de um litro, adiciona-se a cada dia a metade da quantidade de água que falta para encher o recipiente. Desse modo:

- No 1º dia, adiciona-se $\frac{1}{2}$ litro de água;
- No 2º dia, adiciona-se $\frac{1}{4}$ litro de água;
- No 3º dia, adiciona-se $\frac{1}{8}$ litro de água;
- No 4º dia, adiciona-se $\frac{1}{16}$ litro de água e, assim, sucessivamente.

a) Quando estivermos no 7° dia, qual será a quantidade de água contida no recipiente?
b) Qual a expressão que representa a quantidade de água contida no recipiente, no enésimo dia?
c) A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique sua resposta.

Atividade 2. Considere a sequência ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ... , $\frac{1}{3^n}$, ...) e o intervalo]0,1[sob a reta real abaixo.



a) Represente os dez primeiros termos da sequência sobre a reta real.
b) O que está acontecendo com os termos da progressão? Se continuarmos a representar os próximos termos da progressão, sobre a reta, o comportamento da sequência se manterá? Justifique sua resposta.

Atividade 3.
Considere o quadrado da figura abaixo, cuja área é 1 cm^2. Analise as divisões feitas na figura e responda as seguintes questões:

O quadrado inicial foi dividido ao meio, o qual tomamos uma de suas partes A_1. Da parte restante, dividimos ao meio tomando A_2. Da mesma forma, obtemos A_3 ao dividirmos a parte que restou de A_2, ao meio. Esse processo se repete infinitamente, como mostra a figura acima.

a) Represente a sequência das áreas de A_1, A_2, A_3, A_4 e assim sucessivamente.

b) Se somarmos as áreas A_1, A_2, A_3, A_4,**...**, o que será obtido ao final desse processo? Justifique sua resposta.
c) O que podemos fazer para encontrar a soma das áreas de todos os quadrados que se formam nesse processo, ao pensar na fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, quando n cresce indefinidamente? Justifique sua resposta.