MATEMÁTICA, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E SALA DE AULA: A APRENDIZAGEM EM QUESTÃO

José Milton Lopes Pinheiro
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
Jmilton.ufjf@gmail.com

Resumo:
O presente artigo traz uma reflexão sobre experiência vivida em torno de uma atividade proposta durante a disciplina Resolução de Problemas em Geometria, de um Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática de uma universidade pública. Aos alunos, foi solicitada a simulação de uma aula, na qual deveria ser trabalhada a Resolução de Problemas (RP), pautando abordagens metodológicas, práticas e teóricas da mesma. A proposta vivenciada e que aqui é a base do relato, consistia na apresentação de uma abordagem teórica sobre RP, seguida da proposição de um problema, a ser questionado quanto sua aplicabilidade em sala de aula, após ou durante a resolução do mesmo. São trazidos para este texto, as indagações, os desdobramentos na resolução do problema e considerações do autor sobre o movimento ocorrido, refletido à luz dos fundamentos teóricos da RP.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Geometria, Licenciatura em Matemática.

1. Introdução

Este artigo tem por objetivo relatar e refletir sobre a experiência de uma prática pedagógica, regida sob a perspectiva da Resolução de Problemas (RP) no ensino de matemática. Essa prática consistiu na simulação de uma aula sobre RP em Geometria e foi aplicada a uma turma de Mestrado em Educação Matemática na disciplina Resolução de Problemas em Geometria. Contribuíram e participaram ativamente da atividade em sala de aula o professor da disciplina, e cinco alunos mestrandos. O número reduzido de participantes facilitou o processo de mediação e observação.

No contexto da educação, a metodologia da RP tem-se mostrado objeto de estudo em todo o mundo; uma vasta literatura volta atenção à caracterização e categorização de verdadeiros problemas, para com isso, preservar e garantir a potencialidade, não de um problema em si, mas do processo que envolve a resolução do mesmo. Entendemos que a RP pode ser aplicada em todas as disciplinas, especialmente na Matemática, que a utiliza para o ensino e a aprendizagem, no intuito de estimular os alunos a fazer conjecturas, observar padrões, organizar informações, reconstruir e aplicar conhecimentos científicos e práticos.

Será promovida, neste artigo, reflexão sobre a experiência enquanto aluno-professor mediador da resolução de um problema de Geometria, descrevendo os acontecimentos observados, fiel àqueles que os participantes constituíram. A aplicação da aula, a princípio, visava atingir os mestrandos, fornecendo-lhes espaço para uma discussão teórica e prática da RP, e até para trabalharem com problemas no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos em suas aulas. Com este texto, pretende-se contribuir para o entendimento de um maior número de professores, mostrando-lhes que a RP em Matemática pode ser utilizada para aprendizagem de conceitos e habilidades necessárias para resolução de problemas matemáticos, em diversos níveis de complexidade.

2. O ensino e a aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas

Onuchic concebe que um problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado a resolver" (1999, p. 215). Não saber implica dizer que a resolução não é nítida ou óbvia, o que se aproxima dos pensamentos de pesquisadores como González (1998), que trata o ato de resolver problemas como uma Tarefa Intelectual Exigente (TIE)[1], e como Polya (1995), que aponta a Resolução de Problemas como complexa, na qual é exigido raciocínio, sistematização e aplicação de conhecimentos, o que é confirmado por Ponte (2003) que classifica um Problema como fechado, mas com elevado grau dificuldade.

Na resolução de um problema matemático, pesquisadores como Dante (2009) e Polya (1995) concordam ao apontar que, é exigido do aluno um trabalho intelectual, no intuito de sintetizar seus conhecimentos para determinar possíveis meios de resolução, ou seja, um problema deve gerar dificuldades no decorrer de seu desmembramento.

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como encontrar o fim, temos um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho a partir de uma

[1] "aquela que propicia um esforço de raciocínio e que não se realiza com o mero exercício de recordação e memória, nem com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrário, deve propiciar a realização de certo esforço intelectual". Gonzáles (1998, apud ONUCHIC, 2007, p. 84)

> dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados. (POLYA, In: KRULIK e REIS, 1997, p. 1-2).

Apoiando-se em Dante, Polya e Ponte, é possível inferir que, pra uma questão ser definida como um Problema, ela deve corresponder cuidadosamente ao "nível" e ao contexto cultural dos alunos, exemplificando: um problema para alunos das séries iniciais, dificilmente será um problema para alunos do nível médio. Isso não implica em dizer que, uma tarefa bem simples, não possa ser considerada um problema, uma vez que, o professor pode trabalhar a mesma, em perspectivas que gerem reflexões e desafiem aos alunos, tornando-a assim, um problema.

Segundo Polya (1995), são quatro as principais etapas para resolução de um problema: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação. Resolver um problema consiste em compreender o que foi proposto, raciocinar, planejar, criar procedimentos para alcançar uma resposta correta e com sentido. O caminho traçado para delineamento da resposta de um problema deve ser valorizado, devido a sua relevância, pois é nele que o conhecimento é formado.

> É claro que essas etapas não são rígidas, fixas e infalíveis. O processo de resolução de um problema é mais complexo e rico, que não se limita a seguir instruções passo a passo que levarão a soluções, como se fosse um algoritmo. Entretanto, de modo geral elas ajudam o solucionador a se orientar durante o processo. (DANTE, 2009, p. 25)

É importante ensinar aos alunos a serem críticos com suas próprias respostas, a auto-avaliação do resultado consiste em fazer um retrospecto de todo o processo de resolução do problema, este que promove um reestudo que facilita a assimilação dos procedimentos aplicados.

> [...] devemos considerar em primeiro lugar que, resolver um problema é algo mais que obter uma resposta. Na verdade um problema só pode ser considerado como resolvido depois de uma conscientização do processo de resolução e da discussão detalhada de possíveis generalizações e aplicações desse resultado. Outro dado importante é a discussão dos erros e porque desse ou daquele erro. (DINIZ, 1988, p. 15)

Gerar hábitos de investigação, proporcionar confiança para enfrentar situações novas, estimular a criatividade, ampliar a visão científica e metodológica, desenvolver agilidade na percepção do certo e do errado, essas características, dentre outras, são primordiais para a permanência no atual mercado de trabalho, e podem ser plenamente atingíveis com a utilização pelas escolas, da metodologia Resolução de Problemas.

Uma das formas de estimular o desenvolvimento do raciocínio é dando aos alunos a oportunidade de se envolverem com as aplicações da matemática. O professor deve apresentar situações-problemas que envolvam, desafiem e motivem os alunos. Segundo Nasser (1988, p. 10) "o sucesso em Resolução de Problemas depende fortemente das atitudes do professor", pois o mesmo é responsável pela escolha ou criação dos problemas.

Conforme Zuffi e Onuchic (2007, p. 83), "compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas", são importantes aspectos que devem ser instigados nos alunos durantes um processo de aprendizagem com a utilização da RP.

> No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando liberdade aos alunos evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 83)

As ideias abordadas até aqui, foram postas para mostrar como o autor deste, que relata a experiência, reconhece a potencialidade da RP e vê a utilização da mesma em sala de aula. É necessário propor problemas que sejam desafiadores e relacionados ao cotidiano dos alunos**,** envolvendo situações novas, que os coloquem a par dos acontecimentos da sociedade, esta que está em constante desenvolvimento, principalmente no que se diz respeito à tecnologia. Os problemas gerados por este desenvolvimento devem ser expostos aos alunos, são mais desafios que**,** assim como os problemas matemáticos, podem ser resolvidos com esforço, conhecimento e criatividade.

3. Relato da aula simulada

Antes de introduzir o problema que fomentaria ações em sala de aula, foram expostas na lousa e PowerPoint algumas abordagens teóricas sobre RP. O intuito era promover discussão acerca dos pensamentos dos autores ali expostos. Foi uma introdução interessante, pois houve muitas concordâncias e até discordâncias com relação ao que era falado ou proposto pelos autores.

Foi mencionado Polya (1997, p. 2), que aponta o ato de resolver problemas com sendo da natureza humana. Caracteriza o homem como o "animal que resolve problemas". Foi citado também Thomas Butss (apud Dante, 2000, p. 43), que considera a ação, resolver problemas, uma arte que deve ser ensinada em Matemática, pois "estudar matemática é resolver problemas". Perante as citações, os alunos e o professor, posicionaram-se de forma positiva, concordando com os autores, porém, o diálogo foi conciso.

Um dos temas expostos que gerou maiores indagações, foi a classificação dos Problemas conforme Ponte (2003), que os trata como sendo fechados, porém, difíceis de ser resolvidos. Os alunos não discordaram quanto ao grau de dificuldade, mas, criticas foram feitas quanto ao tratamento dos problemas como sendo de estrutura fechada. Indagaram que; em um problema, mesmo que um caminho para sua resolução fique indicado no enunciado, considerando a capacidade de cada aluno, outros caminhos podem ser seguidos. O professor apanhou um artigo e citou Nasser (1988, p. 7 - 8): "é impossível descrever com palavras um método para resolver qualquer problema, incluindo todas as componentes envolvidas com suas propriedades específicas", para com isso, concordar com os demais alunos em dizer que um problema é aberto. Mas, ficou concretizado que; diferente das tarefas investigativas, a resposta de um problema, na maioria dos casos é esperada, isto, que é um dos fatores pelos quais Ponte o define como fechado.

Após essa introdução teórica, foi dado prosseguimento à parte prática da aula, que consistia na resolução do *problema da caça ao tesouro*, conforme apresentado abaixo:

Recentemente foi descoberto um manuscrito d pirata barba negra descrevendo a localização de um tesouro enterrado por ele em certa ilha do caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

"...qualquer um que desembarque nessa ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei A e B e também uma palmeira, que chamarei de C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado da seguinte forma:

Caminhe de C para A, contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M.

Volte ao ponto C.

Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.

O ponto X no qual se localiza o tesouro está na reta que liga M a N, e a mesma distância dos dois pontos."

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha, mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos A e B, lá estavam, mas a palmeira C tinha desaparecido completamente.

O tesouro estava perdido.

Entretanto, fazia parte da comitiva o matemático Augusto Wagner Carvalho que, após breves cálculos, sendo que o primeiro deles foi o da distância entre os carvalhos A e B, que resultou em 40m, conseguiu descobrir o tesouro e, naturalmente reivindicou para si a posse.

Como ele fez isso?

Figura1 – Problema da caça ao tesouro
Fonte: Livro – A matemática do ensino médio, vol. 3. (LIMA et al., 2006)

Para resolução desse problema, foram sugeridos alguns instrumentos auxiliadores, como: computadores contendo o *software* GeoGebra, duas tábuas de isopor, que poderiam representar a ilha, palitos para representar a palmeira e os carvalhos, barbante para medida dos passos. Além desses instrumentos, os alunos poderiam trabalhar com os meios tradicionais, como lápis, papel, compasso e quadro de giz. Lembrando que na RP, os alunos são agentes independentes, livres para tomar suas próprias decisões. Assim, nenhum instrumento ou metodologia para resolução deve ser imposto, e sim sugerido.

Os alunos debruçaram-se sobre o problema. Foram observadas as abordagens e tentativas de cada um. Dois dos alunos, a priori optaram pelas "ilhas de isopor", partiram do princípio de que; se conseguissem traçar o caminho inverso do que as instruções indicavam, iniciando da possível localização do tesouro, chegariam à solução. Fincaram os palitos no isopor, simulando os carvalhos e uma possível localização do tesouro, para com isso localizar a posição inicial da palmeira. Traçaram um seguimento do carvalho A ao carvalho B, medindo 40 cm. Com o barbante amarrado a uma caneta, fizeram um semicírculo de diâmetro AB, e trabalharam com a ideia de que, a palmeira C poderia estar em algum ponto desse semicírculo. Fizeram algumas colocações quanto aos procedimentos e conceitos matemáticos que os mesmos estavam utilizando, porém, não fizeram conjecturas ou inferências sobre um possível caminho, mesmo que errôneo pelo qual o matemático tenha chegado ao tesouro.

Trabalhando juntos, outros dois alunos optaram por desenhos no papel, fizeram algumas simulações, baseadas em seus conhecimentos de Geometria. Relacionaram o número de passos citados no manuscrito com raios de circunferências. Após algumas tentativas, chegaram a uma possível solução. Para isso, consideraram que os pontos M, N e X se coincidiam, e que estariam sobre o mesmo seguimento que a palmeira C, sendo que este seguimento é perpendicular ao segmento que contém os carvalhos A e B. Na solução, encontraram simultaneamente a localização da palmeira e do tesouro através da intercessão entre as circunferências utilizadas. Para melhor visualização da ideia, o desenho dos alunos foi transferido para o computador.

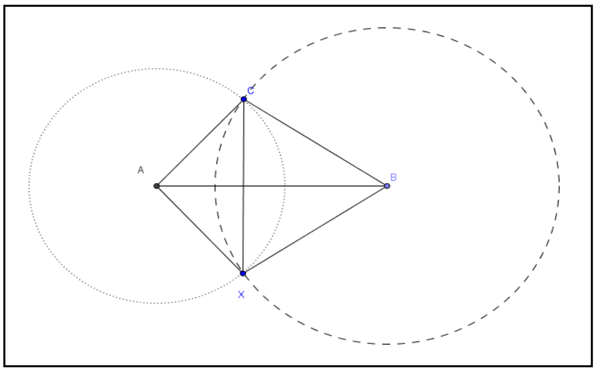

Figura 2 – Esboço da resposta dos alunos que optaram por responder no papel
Fonte: o autor

Estes alunos responderam que: “o matemático, encontrou o tesouro, movimentando o segmento CX, sobre AB, mantendo AX = AC a BC = BX, cavou em todas as posições de X, que formam um seguimento paralelo a AB, até encontrar o tesouro”. Na mediação, foi apontado que, “o segmento CX além de percorrer AB, pode também ultrapassar o ponto A ou B e mesmo assim manter as igualdades”. Algo mais, é que “X também pode se aproximar ou afastar de C”. Assim, os alunos perceberam que, as posições de X não formam um segmento, mas sim uma região. Os demais alunos indagaram que a solução não poderia ser feita de tal forma, pois partiu de premissas não informadas no manuscrito, e a região a ser escavada poderia ser muito grande, podendo atingir toda a ilha, se aumentado CX ao máximo. As discussões geradas por esta solução foram produtivas e instigantes, porém, a mesma foi dada como não satisfatória.

Um dos alunos responsáveis pela referida solução, esboçou o comentário de que, “o problema exposto é muito grande, deveria ser mais sucinto e objetivo”. Para reflexão do que foi dito, foi colocada em pauta a primeira etapa para resolução de um problema, dada por Polya, “compreender o problema”; para isso muitas vezes é necessária organização. No problema proposto, isso ficava claro, as informações dadas no manuscrito poderiam ser anotadas separadamente, e de maneira organizada, em prol de um melhor entendimento.

Apenas uma aluna optou por utilizar o Geogebra. Transferindo as informações do manuscrito para o *software*, trabalhando com circunferências na construção dos passos, e perpendicularismo de retas para satisfazer as condições “virar a esquerda e a direita”, chegou à resposta exata. A resposta foi logo contestada pelo professor da disciplina, que apontou a solução dada como reduzida a um caso particular, pois ela considerava que os passos dados a partir de uma possível localização da palmeira C até o carvalho A, eram os mesmos dados dessa palmeira até o carvalho B, o que poderia inviabilizar a resposta.

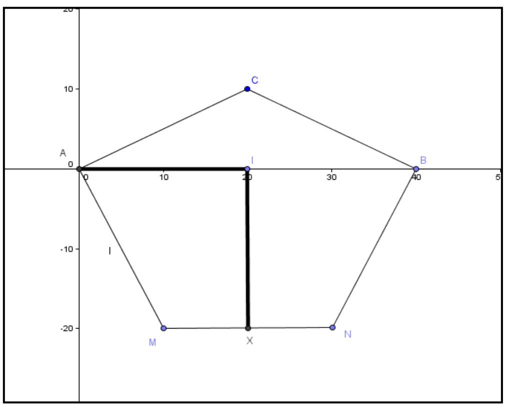

Figura 3–Primeira resposta da aluna no Geogebra.
Fonte: o autor

A resposta encontrada pela aluna, conforme visto na figura acima foi que “o matemático encontrou o tesouro caminhando a partir do carvalho A, vinte metros em direção ao carvalho B, virando a direita e percorrendo mais vinte metros até o tesouro”. Após os apontamentos do professor, e como que já havia apreendido no desenvolvimento de sua primeira resposta, a aluna à reformulou, só que de maneira mais generalizada. Considerou os passos dados de C à A, distintos dos passos dados de C à B, conforme figuras abaixo:

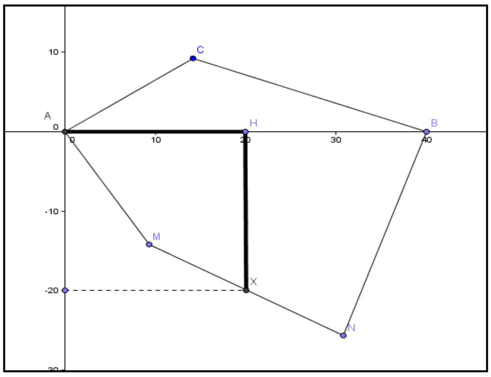

Figura 4 –Segunda resposta da aluna no Geogebra.
Fonte: o autor

Um dos alunos, conhecendo o dinamismo do *software* Geogebra, sugeriu que a aluna movimentasse o ponto C, ou seja, a localização da palmeira desaparecida. O resultado de movimentos a priori leves, e depois mais incisivos, impressionou a todos, e deixou mais evidente a veracidade da resposta.

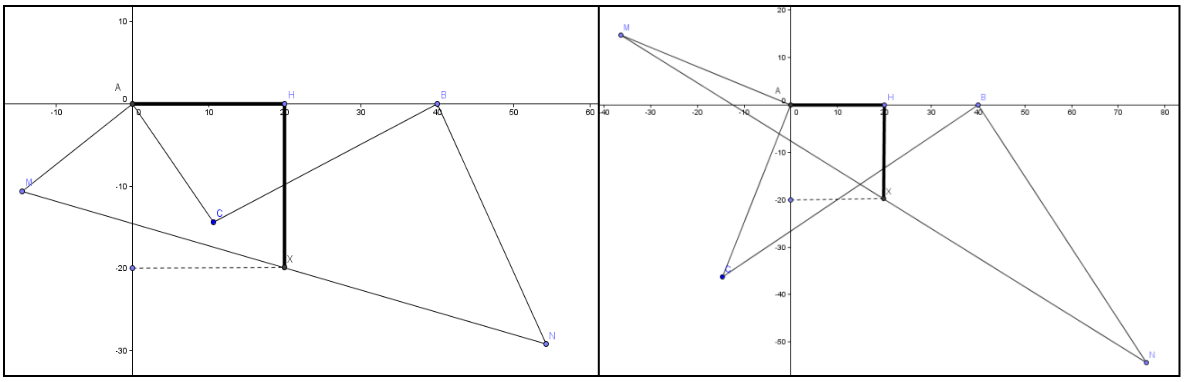

Figura5 –Figura após arrasto do ponto C.
Fonte: o autor

Após o arrasto do ponto C, surgiram falas como: “o caminho percorrido não se altera”, “olha só, o ponto C pode estar em qualquer lugar”, “mesmo depois do arrasto, a propriedade do ponto médio e das retas perpendiculares se mantém”. Ao verem a invariância do local onde foi enterrado o tesouro, mesmo após movimentar a palmeira, todos concordaram que; o tesouro poderia ser encontrado, independentemente do local em que a palmeira estivesse. Foi consenso também que, a solução independe do número de passos dados, claro que obedecendo às instruções do manuscrito.

Os alunos, mesmo estando em turma de mestrado, já com algumas leituras em RP, vivenciaram uma experiência que, para eles era inédita, ainda não haviam praticado a RP. Com isso, perceberam, e a todo tempo apontaram a importância da união da teoria à prática para desenvolvimento tanto do ensino, quanto da aprendizagem de matemática. Perceberam as inúmeras possibilidades e contribuições educacionais que um problema com um nível mínimo de solicitação, pode propiciar aos alunos e à prática docente. Enfim, ficou nítido pelas ações e reações de todos que, a RP abre um espaço potencial de investigação numa sala de aula.

Um evento observado, e que deve ser levado em consideração, é o fato de que instrumentos tecnológicos, na maioria das vezes, sobressaem-se no que diz respeito ao potencial de *facilitador* de resolução de um problema. Durante a simulação tivemos mais uma amostra disso, a única solução exata, partiu da iniciativa da utilização do *software* Geogebra. De maneira alguma se podem desprestigiar os desenvolvimentos sem o uso do computador, que foram muito interessantes e alavancaram discussões relevantes sobre conceitos matemáticos, caminhos indicados pela RP. O processo de resolução gerou aprendizagem na interação entre os alunos e mediador.

Os resultados obtidos e observados durante a simulação foram relevantes, à medida que pensamentos e conhecimentos específicos foram trocados entre os presentes. A diversidade de abordagens observadas, o modo como elas foram feitas e as discussões presentes neste artigo, mostram e validam a utilização da RP em sala de aula.

4. Considerações finais

Na resolução de um problema, o processo de transição de pensamentos abstratos para um ambiente sólido, visível, palpável, não é uma tarefa simples. Instrumentos como; *softwares* educativos e materiais concretos, que pensados e apontados devidamente pelo professor mediador, são relevantes para essa transição, pois neles podem ser armazenados dados que facilitam a visualização, que permitem e possibilitam fazer conjecturas mais coerentes com os possíveis caminhos que direcionam a uma solução satisfatória.

Ciente da importância da Resolução de Problemas na vida escolar, social e profissional dos alunos, o professor de matemática, deve exercer seu papel de mediador e facilitador do conhecimento, pesquisando ou desenvolvendo verdadeiros problemas, condizentes com as necessidades de cada turma ou até mesmo de cada aluno. Na interação com os alunos, deve zelar pelo desenvolvimento da aprendizagem, na qual os mesmos são ativos na assimilação de conceitos e significados. Não se devem direcionar os pensamentos dos alunos e os modos de ação dos mesmos, apenas mediar a passagem por obstáculos que impeçam o prosseguimento do processo de resolução do problema.

Referencias

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas matemáticos:** Teoria e prática/Luiz Roberto Dante. 1 ed.- São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 2000.

DINIZ. M. I. S. V. **Resolução de problemas de matemática elementar.** In Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, v. 13, n 22, 1988.

GONZÁLES, F. E. **Metacognición y tareas intelectualmente exigentes:** El caso de La resolución de problemas matemáticos. In: Zetetiké, CEPEM-FE/UNICAMP, v. 6, n. 9, p. 59 - 87, 1998.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio – Volume 3**. Coleção do Professor de Matemática. 6 ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NASSER. Lilian. **Resolução de problemas. Uma análise dos fatores envolvidos.** In Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, v. 13, n 22, 1988.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POLYA, G. **Sobre a resolução de problemas de matemática na high school**. In: KRULIK, S. E REYS, R. E. (org). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo, Atual Editora, 1997. p. 1-3.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender**. Encontro Nacional de professores de Matemática. 2003. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03%28Profmat%29.pdf. acesso 05/12/2012.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores**. In: UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 11, p. 79-97, 2007.