EXPLORANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS: POLÍGONOS E MOSAICOS

Ana Maria Redolfi Gandulfo
Universidade de Brasília
gandulfo@uol.com.br

Agda Jéssica de Freitas Galletti
Universidade de Brasília
aj.mat@hotmail.com

Celso Gustavo C. Ribeiro
Universidade de Brasília
celsocgribeiro@gmail.com

Elisson dos Santos Morales
Universidade de Brasília
elisson.morales@gmail.com

Francisca Priscila F. da Silva
Universidade de Brasília
priscilafs.df@hotmail.com

Gabriela Aparecida Parreira
Universidade de Brasília
gabriela_apar@yahoo.com.br

Resumo:
Explorando a geometria Euclidiana com materiais manipuláveis: polígonos e mosaicos, é uma proposta de minicurso para o XI ENEM, destinada a professores da Educação Básica. O principal objetivo é a abordagem dos polígonos e das isometrias no plano como ferramentas para a exploração dos mosaicos ou pavimentações do plano. Procura-se pela construção dos mosaicos a consolidação e as aplicações de conceitos geométricos tais como propriedades das figuras planas, dos movimentos rígidos no plano, dos distintos tipos de mosaicos periódicos e não periódicos, destacando a importância desses temas na interdisciplinaridade. As atividades serão desenvolvidas por meio da abordagem de conceitos geométricos, acompanhadas de experiências lúdicas com materiais manipulativos e apresentações multimídia. Os trabalhos serão debatidos depois, no coletivo, com vistas à consolidação dos conceitos geométricos. Com este minicurso procura-se incrementar o interesse pela geometria, divulgar metodologias de ensino que incluem tecnologias e avivar as práticas de interdisciplinaridade escolar.

Palavras-chave: geometria, mosaicos, materiais didáticos.

1. Introdução

O meio ambiente constitui hoje, como na antiguidade, motivo de estudo e de desenvolvimento da capacidade criadora da humanidade e é a Geometria que oferece maiores possibilidades na hora de experimentar mediante materiais adequados. “A geometria dos mosaicos desempenha um papel central na arte, na ciência e na cultura islâmica.” (Kappraff, 1990, p.167).

O ensino de Geometria na Educação Básica serve ao aluno na análise e conhecimento do mundo físico e de seu entorno habitual assim como na interpretação e assimilação de conceitos e propriedades matemáticas e das ciências que facilitem o desempenho nesse ambiente. “O estudo dos acontecimentos naturais desde uma perspectiva geométrica, ademais de ter um interesse cultural intrínseco, tem um enorme interesse pedagógico para motivar o ensino-aprendizagem da Geometria.” (Alsina, 1997).

A vivência geométrica na escola pode ser uma experiência de grande valor se a aprendizagem está fundamentada em atividades construtivas motivadoras e lúdicas. A metodologia ativa fundamenta o processo de ensino na atividade criativa do aluno, na sua atividade investigativa, nas suas descobertas, tendo os alunos como os próprios construtores de seus conhecimentos e ao professor como o orientador desse processo.

Os modelos têm importante papel no ensino-aprendizagem da geometria e são utilizados no estudo de fenômenos naturais, de conceitos e na resolução de problemas.
Neste minicurso aplicamos diferentes estratégias na abordagem dos temas, utilizando grande variedade de modelos pedagógicos manipuláveis e a realização de experiências que imprimem um caráter lúdico as atividades. Todos eles, com as correspondentes descrições para a construção dos modelos e as soluções das atividades propostas serão colocados a disposição dos professores participantes. Neste trabalho apresentamos um número maior de atividades das que serão abordadas durante o minicurso, este material servirá de guia para as aplicações posteriores na prática escolar e também incluímos algumas representações de soluções nas atividades que achamos pertinentes.

2. Polígonos

Iniciamos definindo os conceitos básicos e propriedades, visando unificar a linguagem.

Polígono é a figura formada por um conjunto de segmentos tais que:

- a intersecção de dois segmentos do conjunto é um ponto extremo ou é vazia;
- cada extremo de um segmento também é extremo de mais um e somente mais um segmento do conjunto;

- dois segmentos com uma extremidade comum não são colineares.

Num polígono: os *lados* são os segmentos que o determinam; *vértices* são os extremos dos lados; *lados adjacentes* são lados com um vértice comum; *vértices consecutivos* são os extremos de um mesmo lado; *diagonais* são segmentos que unem vértices não consecutivos do polígono; â*ngulo interno* é o ângulo determinado por lados adjacentes do polígono; *ângulo externo* é o ângulo formado por um lado do polígono e pela semirreta oposta àquela que contém o lado adjacente do polígono.

Os polígonos são classificados pelo número de lados: triângulo (3), quadrilátero (4), pentágono (5), ... , n-ágono (n lados). Também, os polígonos são classificados em *polígonos convexos* (polígono contido em um semiplano em relação a cada reta que contém algum de seus lados) e *polígonos não convexos* (caso contrário).

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a (n – 2) 180º.

O *interior de um ângulo* $A\hat{O}B$ é o conjunto intersecção do semiplano determinado por OA, que contém B, com o semiplano determinado por OB, que contém A. *O conjunto interior de um polígono convexo* é a intersecção dos conjuntos interiores de seus ângulos internos. *Região poligonal* é a união de um polígono e do conjunto interior desse polígono.

Um po*lígono é equilátero* se todos os seus lados são congruentes e o polígono é *equiangular se* todos os seus ângulos são congruentes.

Polígono regular é o polígono convexo eqüilátero e equiangular. Um polígono que não é regular é chamado *polígono irregular*. São polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, etc. Num polígono regular: *centro* é um ponto interior que equidista de todos os vértices do polígono; *raio* é o segmento com uma extremidade no centro e a outra em um vértice do polígono; ângulo central é o ângulo com vértice no centro e lados em dois raios por vértices consecutivos.

Atividade 1. Dar exemplo de polígono irregular equilátero e de polígono irregular equiangular.

3. Elementos dos mosaicos

Um m*osaico* ou *pavimentação* P do plano é a união de um conjunto enumerável de figuras planas que recobrem o plano sem superposições e sem espaços vazios entre elas, isto é, P é a união das figuras planas $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$, chamadas de *ladrilhos* ou *peças* do mosaico.

Consideraremos mosaicos formados por *regiões poligonais* e para simplificar chamaremos essas figuras simplesmente de polígonos. Duas peças de um mosaico podem ter como intersecção um segmento ou um ponto ou elas podem ser disjuntas. No primeiro caso chamamos ao segmento de *lado* do mosaico e dizemos que as peças concorrem nesse lado, no segundo caso o ponto é um *vértice* do mosaico e os lados concorrem nesse vértice. Os vértices, lados e ladrilhos de uma pavimentação do plano são os seus *elementos*.

Mosaico lado-lado é um mosaico onde os vértices e os lados da pavimentação coincidem com os vértices e os lados dos polígonos que a formam; caso contrário, é um *mosaico não lado-lado*.

4. Mosaicos regulares

Mosaico unicelular ou monoédrico é uma pavimentação do plano formada com cópias congruentes de uma mesma figura, chamada *célula*.

Mosaico regular é um mosaico monoédrico lado-lado cuja célula é um polígono regular.

Atividade 2. Determinar todos os mosaicos regulares. (Figura 1)

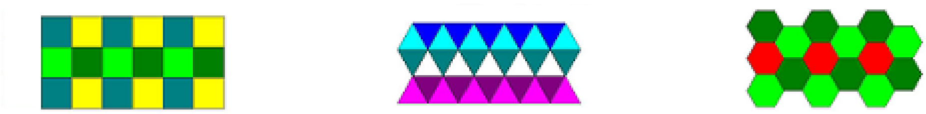

Figura 1

5. Mosaicos semirregulares

Mosaico semirregular ou *mosaico arquimediano* é uma pavimentação do plano com polígonos regulares de dois ou mais tipos diferentes, de lados congruentes e tais que em cada vértice concorrem as mesmas figuras e na mesma ordem. No mosaico semirregular todos os vértices têm a mesma configuração. A soma dos ângulos internos dos polígonos regulares que concorrem em cada vértice é igual a quatro retos.

Atividade 3. Mostrar que em um mosaico semirregular existe um mínimo de três e máximo de seis polígonos regulares concorrentes em cada vértice.

Atividade 4. Mostrar que existem 21 configurações lado-lado possíveis, em volta de um vértice, para a formação de mosaicos com polígonos regulares.

*Atividade 5***.** i) Construir todos os mosaicos semirregulares. (Figura 2)

ii) Podem ser usados na construção (i) um ou mais tipos de polígonos regulares com número ímpar de lados?

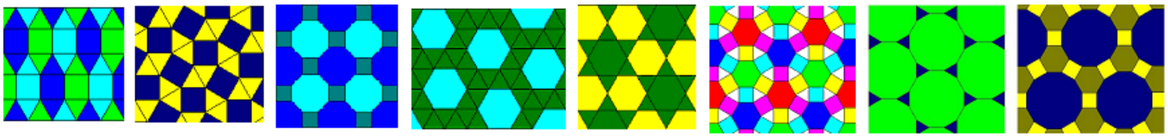

Figura 2

6. Mosaicos lado-lado com polígonos irregulares

*Atividade 6***.** i) Construir mosaico unicelular lado-lado com triângulo irregular arbitrário. (Figura 3). ii) Analisar se a construção de (i) é válida para todo triângulo.

*Atividade 7***.** Formar mosaicos com paralelogramos. (Figura 4).

Atividade 8. i) Formar mosaicos lado-lado unicelular com quadrilátero convexo. (Figura 5) ii) Formar mosaicos lado-lado monoédrico com quadrilátero não-convexo.

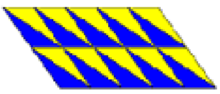

Figura 3

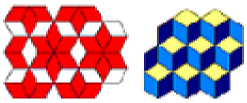

Figura 4

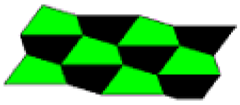

Figura 5

Figura 6

Atividade 9. Construir mosaicos lado-lado unicelular com cada um dos pentágonos da Figura 7.

Figura 7

K. Reinhardt provou, em 1927, que *polígonos convexos com 7 ou mais lados não formam mosaico unicelular lado-lado.*

Atividade 10. Formar mosaicos lado-lado com polígonos não-convexos. (Figura 8)

Atividade 11. Formar mosaico lado-lado com diferentes polígonos. (Figura 9).

Atividade 12. Formar mosaico unicelular lado-lado com cada um dos pentaminós, representados na Figura 10.

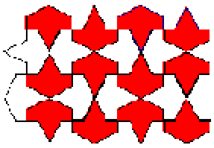

Figura 8

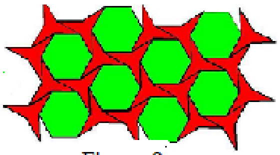

Figura 9

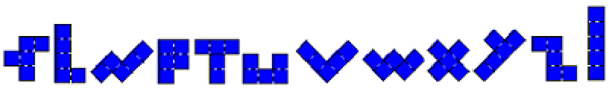

Figura 10

7. Mosaicos não lado-lado

Atividade 13. Construir mosaicos unicelulares não lado-lado com polígonos regulares. (Figura 11)

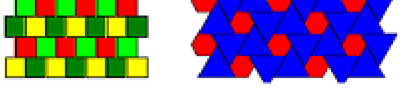

Figura 11

8. Simetrias e mosaicos

Uma isometria é uma transformação T do plano euclidiano no plano euclidiano que preserva as distâncias; assim, para qualquer par de pontos *A* e *B* do plano, a distância entre suas imagens T(A) e T(B) é igual a distância entre os pontos A e B.

As isometrias do plano são reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento.

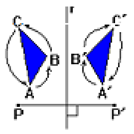

Figura 12

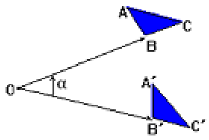

Figura 13

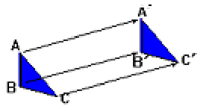

Figura 14

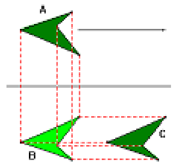

Figura 15

- *Reflexão* numa dada reta r, chamada *eixo de reflexão*, Figura 12.
- *Rotação* em volta de um ponto fixo O segundo um ângulo dado α, Figura 13. O é o *centro de rotação*. No caso particular quando $\alpha = \pi$ a isometria é chamado *médio giro* ou *reflexão no ponto O.*
- *Translação* numa dada direção e segundo uma dada distância, Figura 14.
- *Reflexão com deslizamento* ou *reflexão deslizante* é a composição de uma reflexão numa reta dada com uma translação segundo uma distância dada e na direção paralela a reta, Figura 15.

Uma *simetria* T de um conjunto K é qualquer isometria T que aplica K nele mesmo. Uma simetria T de K deixa o conjunto K invariante, mesmo que os pontos de K podem ter sido transformados.

Uma figura F tem *simetria de reflexão* ou *simetria axial* com respeito a uma reta r se a figura é transformada nela mesma por reflexão com respeito à reta r. Um e*ixo de reflexão* de uma figura F é uma reta com a propriedade que para cada ponto P da figura F o ponto simétrico P' com respeito a r também pertence a F.

Atividade 14. Achar as translações aplicadas aos hexágonos dos mosaicos da Figura 2.

Uma figura F tem *simetria rotacional* de ângulo α com respeito a um ponto *O* se a figura é transformada em ela mesma pela rotação de ângulo de ângulo α em torno de O. Uma figura F tem *simetria central* com respeito a um ponto A de F se para cada ponto P de F a imagem P´ de P também pertence a F e A é ponto médio do segmento PP´. O ponto A é o *centro de simetria* da figura F**.**

Atividade 15. Determinar os eixos de simetria e os centros de simetria dos mosaicos arquimedianos, se existirem.

*Atividade 16***.** Determinar todas as simetrias rotacional das células dos mosaicos da Figura 8, se elas existirem.

O artista holandês *Maurice Cornelius Escher* dedicou grande parte de sua obra aos mosaicos com representações intrigantes e surpreendentes.

Atividade 17. i) Determinar as simetrias dos mosaicos de Escher da Figura 16.

ii) Achar a célula de cada um desses mosaicos.

Figura 16

Atividade 18. Observar na Figura 17 o processo de construção da célula de um mosaico e descrever as isometrias do plano utilizadas.

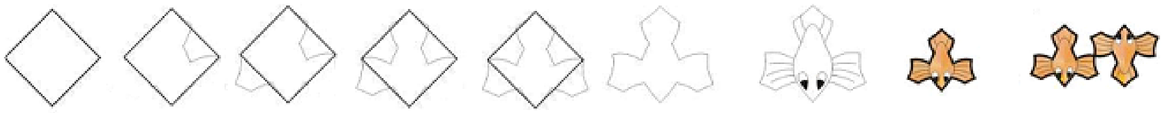

Figura 17

Atividade 20. Utilizando transformações do plano e partindo de uma figura poligonal qualquer construa seu próprio mosaico. Descreva todas as etapas dessa construção.

9. Mosaicos periódicos

Mosaicos periódicos são as pavimentações do plano tais que se são transladadas em duas direções não paralelas e certa distância então eles coincidem novamente. Todos os mosaicos considerados acima são mosaicos periódicos.

As duas translações não paralelas associadas a um mosaico periódico podem ser representadas pelos vetores u, v e todas as translações delas por ju+kv, onde j e k são números inteiros. A partir de um ponto O, o conjunto destas translações forma uma grade. Portanto a cada mosaico periódico está associada uma grade G de paralelogramos congruentes tal que todos os paralelogramos contém partes idênticas do mosaico.

Atividade 21. Determine uma grade para cada um dos mosaicos das Figuras 8, 9 e 11.

10. Mosaicos não-periódicos

Robert Beger, em 1964, construiu com mais de 20000 peças diferentes, um mosaico não-periódico que não é periódico. Roger Penrose, em 1973, construiu um mosaico não-periódico usando somente duas figuras geométricas diferentes, chamadas dardo e pipa, obtidos a partir de um losango com ângulos medindo 72° e 108°, vide Figura 18.

Uma construção para o dardo e a pipa consiste em dividir a diagonal maior do losango em dois segmentos, sendo que o segmento maior sobre a diagonal tem por comprimento a razão

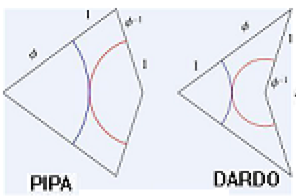

Figura 18

áurea ϕ, isto é, aproximadamente 1,618 vezes o segmento menor, e logo unir o ponto áureo aos vértices dos ângulos de 108°.

Cada um dos ladrilhos de Penrose separadamente forma mosaico unicelular periódico porque ambos são quadriláteros; portanto, certas regras devem ser estabelecidas para determinar como eles têm que ser dispostos para garantir que formam um mosaico não-periódico. John Conway facilitou esta tarefa pintando dois arcos coloridos em cada peça. Cada arco corta os lados como também o eixo de simetria na razão áurea. A regra consiste em unir a curva azul (vermelha) de uma peça a outra curva azul (vermelha) de um dardo ou de uma pipa para formar uma curva azul (vermelha) contínua no mosaico.

Atividade 22. Determinar os sete modos em que os dardos e pipas podem ser organizados ao redor do vértice seguindo as regras enunciadas anteriormente.

Figura 19

Na construção de qualquer mosaico de Penrose serão necessários exatamente 1,618...tantas pipas como dardos, vide exemplos desses mosaicos na Figura 21.

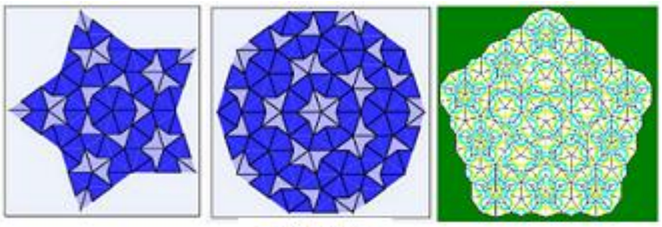

Figura 21

11. Considerações Finais

O estudo e construções das pavimentações do plano, seus elementos, classificações e propriedades é tema importante na programação escolar pelo seu apelo dinâmico, lúdico e estético para o desenvolvimento capacidades e habilidades no ensino-aprendizagem da geometria. Com este minicurso procura-se avivar o interesse pela geometria, promover a interdisciplinaridade e contribuir para a melhoria da qualidade do ensino.

12. Agradecimentos

Todos os autores foram apoiados pelo DEX, Universidade de Brasília.

13. Referências

ALSINA, C. et al. *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó, 1998. 227 p.

ALSINA, C. Desarrollo de competencias matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos. 3ª ed. Madrid: Lavel, 2008. 156p.

ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J. M. *Materiales para construir la Geometria.* Madrid:Síntesis, 1991. 168 P.

GOLOMB, S.W. *Polyominoes.* Princeton: Princeton University Press, 1996.

GRÜMBAUM, B., SHEPHARD, G. C. *Tilings and patterns*. New York: W. H. Freeman, 1987. 700 p.

MARTIN, G.E. *Transformation geometry*. *An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1982. 237 p.