

ACÇÃO PIBID: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

*Maria Aparecida da Silva de Carvalho
Colegio Estadual Vicente Rijo
marryyaa@gmail.com*

*Talita Paiva Corrêa
Universidade Estadual de Londrina
lita.paiva@hotmail.com*

*Fernanda Emmy Fukabori Nakai
Universidade Estadual de Londrina
fe_nakai@hotmail.com*

*Luciane Mayumi Shiroma
Universidade Estadual de Londrina
luciane_lms@hotmail.com*

*Fabiana Tamires Foglie
Universidade Estadual de Londrina
faby_didi@hotmail.com*

*Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
peresbi@yahoo.com.br*

Resumo:

Como apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná, o ensino das Geometrias não Euclidianas deve ser realizado já no ensino fundamental. Uma das ações do PIBID Matemática/2009 da UEL é o desenvolvimento de oficinas nesta temática. Este minicurso apresenta uma proposta para introduzir os estudantes neste assunto, partindo de fatos históricos, para apresentar alguns dos princípios destas geometrias e suas diferenças com a Geometria euclidiana. Neste sentido, serão também apresentadas diversas atividades realizadas em diferentes níveis da educação básica e discutidas suas potencialidades e limitações.

Palavras-chave: Educação Matemática; Geometria Esférica; Geometria Euclidiana.

1. Introdução

Vários autores apontam a grande dificuldade que muitos docentes têm em ministrar conteúdos de geometria para os alunos do Ensino Fundamental e Médio (PAVANELO, 93; LORENZATO, 95; ALMOULOU, 2004).

No tocante às Geometrias não Euclidianas, ao analisarmos os conteúdos desenvolvidos nas aulas de Geometria no estado do Paraná, verificamos que ao elaborar seus planejamentos, grande parte dos professores desconsidera as indicações curriculares oficiais que apontam para estes níveis de ensino a importância de se trabalhar também noções básicas deste tema (PARANÁ, 2009), priorizando apenas tópicos de Geometria Plana e Espacial que se baseiam nos postulados de Euclides. Todavia, no âmbito da Educação Matemática, há autores (MARTOS, 2001; FRANCO, 2008; CARVALHO e CARVALHO, 2010) que têm mostrado interesse pelo tema e desenvolvido atividades e pesquisas a ele relacionadas.

Acreditamos que os professores não seguem às indicações curriculares de se trabalhar noções de Geometrias não Euclidianas, não por estarem em desacordo com as mesmas, mas porque não tiveram oportunidade de conhecê-las enquanto realizavam sua própria formação e continuam sem conhecê-las (ALMOULOU, 2004). Contribui para isso que, ao planejar suas aulas, a maior parte dos professores toma por base um único livro didático e, em muitos deles, conteúdos de Geometrias não-Euclidianas não são sequer mencionados.

A situação torna-se mais grave quando constatamos, diante de nossa experiência em sala de aula e do convívio com colegas professores, que um dos fatores geradores de ansiedade na sala de aula de matemática é justamente o ensino dos conteúdos relacionados com as Geometrias. Por relato dos próprios professores, um dos motivos deste estado emotivo é o não *domínio absoluto* do conteúdo a ser ensinado, o que traz insegurança e retira o professor da sua zona de conforto. Deste modo, prefere continuar privilegiando os conteúdos de Álgebra, Aritmética, Raciocínio Lógico, entre outros, a adotar a postura de lecionar temas correlatos à Geometria, e em particular, Geometria não-Euclidiana.

Sob a ótica do aluno, o conteúdo abordado nas aulas de Geometria, proporciona o desenvolvimento de um saber que permite uma maneira de compreender, descrever, representar e localizar-se no mundo em que vive, desenvolvendo percepções espaciais e sensoriais. O conhecimento de Geometria também pode contribuir para a aprendizagem de números, medidas e álgebra, uma vez que diversos aspectos de habilidade matemática desenvolvidos com conteúdos geométricos estimulam a observar e perceber semelhanças e diferenças, a identificar regularidades na análise de uma forma e no reconhecimento de formas em diferentes representações e dimensões. Porém, sendo o ensino de Geometria abordado de forma expositiva e pouco compreensível, sem manipulações de materiais e

objetos e descontextualizado do mundo real, há grande possibilidade do aluno manifestar-se de forma desinteressada, podendo até aumentar a indisciplina na sala de aula.

Embora a Geometria de Euclides seja consagrada historicamente no ensino formal de matemática, muitos problemas do cotidiano só são resolvidos pelas Geometrias não Euclidianas.

Assim, como uma das ações do *Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID*, vinculado ao Governo Federal, com financiamento da CAPES, elaboramos esse minicurso, para oferecer atividades elementares de Geometria não Euclidiana, particularmente relacionadas à Geometria Esférica, as quais podem ser facilmente replicadas nas salas de aula, paralelamente à uma rápida exposição teórica sobre o tema, procurando colaborar com a possibilidade de aquisição de novos saberes pelos professores e alunos nesta temática.

2. Ensino das Geometrias

Embora a Geometria seja um dos mais importantes ramos da Matemática, por propiciar estudante uma possibilidade particular de racionar, interpretar e representar o mundo em vive, além de desempenhar um papel importante como articuladora entre diversas partes da Matemática, como por exemplo, a Aritmética e a Álgebra, seu ensino ainda não ocupa lugar de destaque quando da elaboração do plano de trabalho da maioria dos professores.

Por muito tempo, os livros didáticos utilizados como apoio pelos professores, eram organizados, priorizando conteúdos de aritmética e álgebra nos primeiros capítulos, relegando os relacionados à Geometria para os últimos, favorecendo essa organização para que os conteúdos de geometria fossem ensinados “se sobrasse tempo”. Atualmente, embora a maioria dos livros didáticos tenha essa ordem de conteúdos modificada, intercalando os diversos conjuntos de saberes ao longo de suas páginas, estando assim os conteúdos de geometria distribuídos ao longo dos capítulos, na prática, continua-se priorizando conteúdos de aritmética e álgebra e relegando-se o ensino de geometria.

Tal situação vai de encontro com a literatura da área, para Fainguelernt (1999), por exemplo, o ensino de geometria deveria começar desde os anos iniciais do ensino fundamental e continuar de forma gradativa, ao longo de toda a Educação Básica.

Embora a geometria seja um dos ramos da matemática que mais permite a aproximação com o mundo real, na Educação Básica, seu ensino foi consideravelmente reduzido. Para Pavanelo (1993) e Lorenzato (1995), especificamente no Ensino Fundamental, essa redução se deve ao despreparo da grande maioria dos professores, evidenciando a formação deficiente em conteúdos e metodologias para o ensino de Geometria.

A Geometria pode desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepção, entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente, o mundo no qual vivemos, bem como estabelecer aplicações práticas nas atividades cotidianas. Aprender Geometria parece-nos, desta forma, fundamental.

Para Lorenzato,

Sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade elas, dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão de questões de outras áreas de conhecimento humano (LORENZATO, 1995, p. 03-13)

Atualmente, quando lidamos com Geometria Euclidiana, há inúmeros avanços, como mencionamos, por exemplo, grande parte dos livros didáticos adotados já traz atividades de cunho geométrico não mais localizadas na parte final. Todavia, embora as Diretrizes Curriculares do Paraná (2008) apontem explicitamente que o tópico Geometria não Euclidiana também faz parte da grade curricular, isso não se verifica. Ainda é raro o livro didático tratar o tema e mais raro ainda um professor atrever-se a abordá-lo.

3. Ensino das Geometrias não Euclidianas

Os primeiros trabalhos realizados por gregos como Platão e Eudoxo, muito contribuíram para que a Geometria ocupasse lugar de destaque como ramo da matemática, mas foi com Euclides, por volta de 300 A.C, que esse conhecimento foi sistematizado. Com o texto de matemática mais conhecido de todos os tempos, *Os Elementos*, Euclides deu à Geometria forma, coesão e lógica, formalizando o conhecimento geométrico da época, garantindo-lhe cientificidade. “*A geometria de Euclides foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada, sendo por cerca de dois mil anos considerada como a única geometria possível*” (COUTINHO, 2001, p.35).

Em *Os Elementos*, Euclides enuncia *Definições, Noções Comuns e Postulados*, nos quais se baseia para sistematizar as proposições que demonstra. Para Euclides, são Postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, com todo centro e distancia, descrever um círculo 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 99)

E, como Noções Comuns (Axiomas) elenca,

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si. 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais. 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais. [4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais. 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si. 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.] 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si. 8. E o todo [é] maior do que a parte. 9. E duas retas não contêm uma área. (EUCLIDES, 2009)

Segundo STRUIK (1989), no final do século XVIII e início do século XIX, os matemáticos, estimulados pelas afirmações de alguns filósofos, como Kant, argumentaram que: “*se há a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras*” (STRUIK, 1989, p.92). O quinto Postulado de Euclides tornou-se uma obsessão. Nas tentativas de prová-lo criaram-se as novas geometrias, tão consistentes quanto a Euclidiana.

O quinto postulado do livro I [...] é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adoptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas (Struik, 1989, p.92).

Em 1851, durante uma conferência sobre Fundamentos de Geometria, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mudou radicalmente o conceito de espaço, um objeto de estudo da geometria. Nesta ocasião, Riemann apontou as possibilidades de novas geometrias, e conseqüentemente, novos espaços. Na Geometria de Riemann, a reta não é mais infinita, como na Geometria Euclidiana, e sim ilimitada. Para ele, as retas seriam geodésicas (curvas que determinam em uma superfície, a menor distância entre dois pontos

dados sobre a superfície). A Geometria Elíptica (ou Riemanniana) tem como um de seus axiomas o que estabelece que não existem paralelas a uma reta dada, contrapondo-se ao 5º postulado de Euclides.

Na Geometria Esférica, de acordo com COUTINHO (2001), verificamos que: (i) quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro; (ii) na superfície esférica a reta é limitada; (iii) não existem paralelas nem retas não secantes; (iv) as retas são finitas; (v) a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e menor que 540° ; (vi) a soma das medidas dos ângulos de qualquer quadrilátero é maior do que 360.

Modelo mais simples da Geometria Elíptica, a Geometria Esférica tem várias aplicações. MARTOS (2002), afirma que estas geometrias são cruciais para as medidas de grandes escalas relacionadas, por exemplo, à aeronáutica e à navegação. O estudo da esfera, seus elementos e suas associações com o globo terrestre, abordando conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários, baseados em idéias geométricas, permitem ao aluno uma melhor compreensão e aprendizagem do tema, como também interdisciplinaridade com a Geografia.

4. Ações Metodológicas

São três os objetivos deste minicurso:

- a) Apresentar conceitos teóricos na temática Geometria não Euclidiana e, particularmente Geometria Esférica;
- b) Apresentar aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento da Geometria não Euclidiana;
- c) Apresentar e discutir atividades voltadas para o Ensino Fundamental e Médio sobre o tema, discutindo suas potencialidades e limitações.

Para atingir estes objetivos, contemplaremos principalmente a Geometria Esférica, pois essa tem sido recomendada para a prática educacional por pesquisadores como Lénart (1996), Coutinho (2001), Martos (2002) e Carvalho e Carvalho (2011), entre outros; utilizando atividades variadas. Essas atividades têm sido aplicadas com êxito para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, numa tentativa de desmitificar o ensino e aprendizagem de Geometria não Euclidiana.

Estas atividades selecionadas englobam além do estudo da esfera e seus elementos, as associações com o globo terrestre, numa abordagem interdisciplinar com a Geografia. Abordaremos conceitos matemáticos como triângulos, quadriláteros, semelhanças de

triângulos e paralelismo e suas respectivas propriedades na perspectiva desta geometria. Apresentaremos situações-problemas contidas em fichas com descrições de atividades a serem desenvolvidas com a utilização de materiais manipuláveis, como bolas de isopor, mapas, globos terrestres e transferidor.

5. Considerações Finais

A implementação das Geometrias não Euclidianas em sala de aula, conforme proposto pelas Diretrizes Curriculares de Matemática em 2006, passou a nos inquietar desde 2009. Desde então, temos apresentado propostas para sua inserção nas aulas de matemáticas em minicursos e oficinas para professores e alunos da Educação Básica, a partir do 6º ano. Os alunos atualmente envolvidos neste estudo enquadram-se na faixa etária entre 11 e 16 anos. Recentemente, apresentamos uma aplicação dessas geometrias em uma Feira de Ciências, relacionando o uso do GPS com a Geometria Esférica. Paralelamente, sempre ao trabalhar conceitos de Geometria Plana, como retas, ângulos, triângulos, quadriláteros e retas paralelas comparamos os mesmos conceitos aos equivalentes em superfícies esféricas. Após aplicação de atividades em sala de aula, concluímos que o ensino das Geometrias não Euclidianas é possível desde os anos iniciais do Ensino Fundamental II.

6. Agradecimentos

Agradecemos à CAPES, pelo financiamento.

7. Referências

Almouloud, S. A. A Geometria na escola básica: que espaços e formas têm hoje? Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Saddo.doc. Acesso em: 22/01/2011.

Alves, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, v.6, 2007.

Brasil. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental Matemática**. - Brasília : MEC/ SEF,1998.

Carvalho, M. A.S.; Carvalho; A.M.F.T. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Recife, 26 – 30 de julho, 2010.

Carvalho, M. A.S.; Carvalho; A.M.F.T. A Questão da Ansiedade no Ensino e Aprendizagem das Geometrias não Euclidianas. **Anais...** X Encontro de Educação Matemática - ENEM, SBEM, Salvador (BA), 07 – 09 de julho, 2011.

Coutinho, L. **Convite às geometrias não – euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

Euclides. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

Fainguelernt, Estela Kaufman. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

Franco, V. S.; Thomaz, M.L. **Geometria não euclidiana/ Geometria Esférica**. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>. Acesso em 29/03/2013.

Kaleff, A. M. M. R. Atividades Introdutórias às Geometrias não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Taxi. **Boletim – GEPEM**, Rio de Janeiro, nº 44, p. 11- 42, 2004.

Lénárt, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere – activities comparing planar and spherical geometry**. USA: Key Curriculum Press, 1996 .

Lorenzato, S. Os “porques Matemáticos dos alunos e as Respostas dos Professores”. **Proposição**, Campinas, vol. 10, 1993.

Lorenzato, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação em Revista** – Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, ano 3, n. 4, p.13, 1995.

Martos, Z.G. Geometrias Não Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. **Dissertação**. (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares de matemática para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio**. 2009. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/> . Acesso em 19 mar 2010.

Pavanello, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

Struik, D.J. **História Concisa das Matemáticas**. Gradiva, 1989.