# O USO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM ANÁLISE COMBINATÓRIA

*Tereza Raquel Couto de Lima*[1]
*Instituto Federal Minas Gerais – Campus Ouro Preto*
*tereza.lima@ifmg.edu.br*

*Dimas Felipe de Miranda*[2]
*Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais*
*dimasfm48@yahoo.com.br*

**Resumo:**
Este artigo tem o propósito de discutir como a utilização de diversos registros de representação pode auxiliar os estudantes na resolução de problemas envolvendo análise combinatória. O referencial que embasou este trabalho é a teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval. O trabalho foi desenvolvido junto a uma turma da 2ª série do ensino médio de uma escola estadual, no interior do estado de Minas Gerais. Foram planejadas algumas atividades acerca de problemas envolvendo análise combinatória. Este estudo aponta que é compensador desenvolver atividades que estimulem os alunos a utilizar diferentes registros de representação para resolver situações que envolvem problemas de contagem.

Palavras-chave: Análise combinatória; resolução de problemas; registros de representação semiótica.

## 1. Introdução

Em nossa experiência do dia a dia, lecionando matemática, pudemos perceber que existem dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem da análise combinatória. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) destacam a importância de que o estudo da análise combinatória se dê, inicialmente, através do uso da árvore de possibilidades. Com esse tipo de representação os alunos têm a oportunidade de discutir acerca das soluções encontradas. “A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento” (BRASIL, 2006, p. 79).

[1] Professora de matemática no Instituto Federal Minas Gerais – IFMG Campus Ouro Preto. Mestre em Ensino de Matemática pela PUC Minas.
[2] Doutor em Tratamento da Informação Espacial pela PUC Minas. Professor no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

No entanto, segundo Elon Lages Lima et al (2006), o que encontramos na maioria dos livros didáticos são fórmulas "miraculosas" que os alunos devem utilizar para resolver certos problemas que envolvem esse tema.

A hipótese da nossa pesquisa (Lima, 2011) é que quando a análise combinatória é estudada de forma intuitiva, através do uso da árvore de possibilidades, dos desenhos e de outros processos intuitivos, os alunos compreendem com mais facilidade o resultado encontrado. Por outro lado, se as fórmulas são apresentadas de forma pronta e acabadas, os alunos ficam sem saber em qual momento deverão utilizar cada uma delas e o ensino da análise combinatória torna-se tecnicista e operacional. Segundo Esteves (2001), quando introduzimos o estudo de análise combinatória dando ênfase à árvore de possibilidades, aos desenhos e a outros processos intuitivos, estamos contribuindo para o desenvolvendo do raciocínio combinatório do estudante.

## 2. Raciocínio Combinatório

Diversos autores, dentre eles Morgado et al (2006), dizem que o estudo da análise combinatória de forma intuitiva desenvolve o raciocínio combinatório do estudante e o auxilia na transição do pensamento simplificado para o pensamento científico. Utilizando inicialmente a contagem direta, o aluno desenvolve de forma gradativa esse tipo de raciocínio ao analisar, interpretar e encontrar soluções para os problemas propostos. Geralmente, quando não há preocupação excessiva com fórmulas, privilegia-se a construção do raciocínio combinatório e o desenvolvimento do pensamento científico.

O raciocínio combinatório tem importância tanto no aspecto social, na formação de cidadãos, quanto na formação matemática de um estudante, tornando-o flexível na utilização de formas para representar ideias matemáticas; utilizando desenhos e símbolos e posteriormente, utilizando a escrita matemática. Essa flexibilidade traz para o aluno maior facilidade de expressar com mais clareza seus pontos de vista.

Entendemos que o raciocínio combinatório torna o aluno capaz de analisar situações, estabelecer padrões, criar estratégias, identificar possibilidades, além de desenvolver seu espírito crítico e argumentativo. Segundo Piaget e Inhelder (1995) o pensamento combinatório tem essencial importância no desenvolvimento e aprendizagem dos estudantes, já que esse pensamento desenvolve o poder de representar objetos ou acontecimentos tornando possível a aquisição da linguagem ou de símbolos.

Assim, esse pensamento vai além da enumeração de todos os elementos de um conjunto, podendo envolver o princípio multiplicativo, ações sistemáticas, o uso de estratégias diversas ou mesmo o uso de fórmulas. Portanto, o desenvolvimento do raciocínio combinatório requer contínuos experimentos com estratégias e modelos de contagem.

Muitas dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem de probabilidades podem estar relacionadas a um raciocínio combinatório pouco desenvolvido. Encontramos orientações nos PCNEM que conduzem ao ensino da análise combinatória não somente como a aplicação de fórmulas, mas como um conteúdo que deve ser desenvolvido e estudado a partir da resolução de problemas, objetivando o desenvolvimento do raciocínio combinatório:

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório (BRASIL, 2002, p. 126).

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística (BRASIL, 2002, p. 127).

Assim, na tentativa de solucionar problemas de contagem, os alunos aperfeiçoam a maneira de contar os agrupamentos e desenvolvem o raciocínio combinatório. Consequentemente poderão desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar os problemas do dia a dia.

## 3. A teoria dos registros da representação semiótica em matemática

Duval (2009) afirma ter destacado as representações semióticas, quanto ao caráter central que elas têm no funcionamento cognitivo do pensamento matemático.

> Para começar, em matemáticas, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. Com efeito, a possibilidade de efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. É suficiente considerar o caso de cálculo numérico para se convencer disto. Os procedimentos e seus custos dependem do

> sistema de escrita escolhida: escritura binária, escritura decimal, escritura fracionária. (DUVAL, 2009, p. 15 e 16).

O autor recomenda centrar a aprendizagem específica sobre variados sistemas de representação, adequadamente avaliados. Dessa forma, a aprendizagem matemática pode ser favorecida com a utilização de representações como registros algébricos, diagramas, esquemas, entre outras.

Segundo o autor, a distinção entre o objeto matemático e sua representação é de extrema relevância para o funcionamento cognitivo. Ora, um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. Duval (2009) diz que toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão.

A originalidade da atividade matemática está para Duval (2009) na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de fazer a troca a todo o momento de registros de representação. No entanto, tal coordenação não é adquirida naturalmente pelo estudante durante o processo de ensino e aprendizagem, cabendo, então, ações que possam articular os diferentes registros de um mesmo objeto.

Segundo Duval (2003), existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são completamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p. 16).

Para o pesquisador, do ponto de vista matemático, a conversão intervém apenas na escolha do registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou na obtenção de um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Do ponto de vista cognitivo, segundo Duval (2003), a conversão tem um caráter fundamental, pois é ela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

A transformação por conversão de registros de representação envolve o fato de os alunos não conseguirem perceber o mesmo objeto, quando esse é explorado em mais de uma representação. De acordo com Duval (2009), para trabalhar a conversão, é necessário que o estudante saiba transitar entre os diversos tipos de registros.

Como pretendíamos que os estudantes utilizassem registros variados para solucionar os problemas propostos, esta teoria foi bastante importante para nossa pesquisa. O trabalho com diversas formas de representação semiótica pode proporcionar aos estudantes habilidades na utilização desses registros e facilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

## 4. Desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi conduzida durante o segundo semestre de 2010, junto a uma escola pública de ensino regular. O estudo ocorreu em contexto natural de sala de aula.

Os alunos dessa 2ª série do Ensino Médio assistiam seis aulas semanais de matemática, de 50 minutos cada uma, além de dezenove aulas de outras nove disciplinas. A turma, composta de vinte e dois alunos, era heterogênea quanto aos níveis de aprendizagem e homogênea quanto à faixa etária. Apesar de os alunos terem a mesma idade, o ritmo de cada um era bem distinto. Enquanto alguns alunos apresentavam grande dificuldade em Matemática, outros já a tratavam com mais facilidade.

Um dos objetivos desse trabalho foi o de identificar e verificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo análise combinatória, além de estimular os estudantes a utilizar diferentes registros de representação para resolver as situações propostas.

Um conjunto de atividades sobre o estudo de análise combinatória foi organizado, visando a formação de habilidades e o desenvolvimento do raciocínio combinatório, que podem ser adquiridos ao longo da vida escolar do estudante.

## 5. Resultados

Inicialmente, os estudantes receberam a primeira folha do conjunto de atividades. Nela pedia-se que os alunos expressassem, por meio de desenhos, cálculos ou qualquer outra representação, a solução para o problema de contagem:

"Pedro tem 9 bolinhas de gude, todas azuis e de mesmo tamanho, e deseja acondicioná-las em 4 gavetas numeradas de 1 a 4. Sabendo-se que as gavetas também são idênticas, estão vazias, e que podem conter até nove bolinhas de gude cada uma, Pedro deseja saber de quantas formas diferentes pode guardar as 9 bolinhas de gude nas quatro gavetas.

Verifique se você consegue ajudar Pedro!"

Figura 1: Atividade extraída do produto da pesquisa

Essa situação problema pode ser resolvida facilmente se a transformamos em uma equação Diofantina. No entanto, os alunos ainda não conheciam esse processo. Mas o objetivo de trabalhar essa atividade era que os estudantes percebessem que nem todo problema de contagem deve ser resolvido pela enumeração das possibilidades, já que esse processo pode se tornar exaustivo. Essa situação, que chamamos de Atividade Introdutória, foi utilizada como elemento motivador para o estudo do conteúdo.

Na figura a seguir, podemos observar os protocolos em que dois alunos utilizam dois tipos de registros de representação para mostrar as possibilidades:

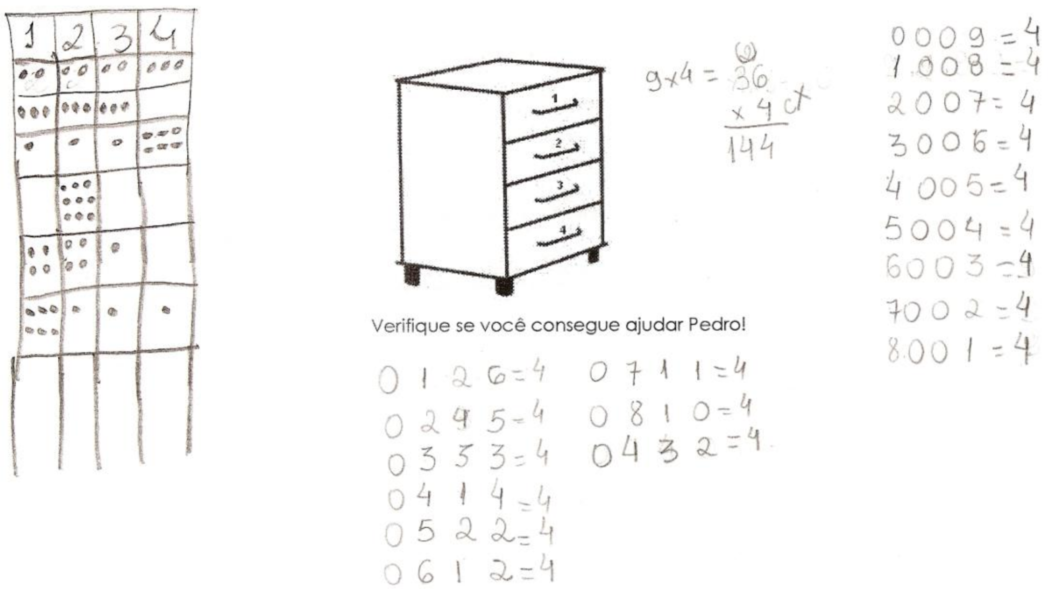


Figura 2: Protocolos extraídos de dois cadernos de atividades da pesquisa

Decorridos alguns minutos do início da atividade, a professora disse aos estudantes que existem diversas situações de nosso dia-a-dia que queremos saber de quantas formas algo pode ser feito e, que para entender essas situações seria importante estudar análise combinatória. Completou dizendo que ao final desse estudo, todos seriam capazes de resolver essa atividade de forma bem simples e rápida.

O conjunto de atividades foi elaborado com diversas situações problemas, algumas inéditas e outras situações clássicas que envolvem o tema. Durante essas aulas procuramos não privilegiar o uso de fórmulas e o cálculo mecânico. Procuramos dar ênfase ao uso da árvore de possibilidades, desenhos, esquemas, construção de tabelas e outros processos intuitivos como ferramentas para produzir soluções.

Em atividades em que, por exemplo, propunham aos estudantes calcular o número de anagramas de uma palavra, deixamo-los livres para que resolvessem essas atividades da forma que achassem mais adequada. Segundo Morgado et al (2006), o estudo da análise combinatória de forma intuitiva desenvolve o raciocínio combinatório do estudante. A maioria dos alunos optou por utilizar a linguagem natural, por ser mais comum a eles. Assim, esses estudantes escreveram todas as opções de anagramas a fim de determinar a quantidade possível. Depois de deixá-los fazer da forma mais intuitiva, mostramos a árvore de possibilidade. Dissemos a eles quais as vantagens de utilizar esse registro e, posteriormente, alguns alunos já foram percebendo o princípio fundamental da contagem, um registro simbólico-numérico. Dessa forma, os estudantes já conseguiam resolver um simples problema de análise combinatória utilizando diferentes registros de representação. Segundo Duval (2003) o ensino de matemática deve possibilitar ao estudante a capacidade de compreender, efetuar e controlar, por si próprio, a diversidade dos processos matemáticos. Esse pesquisador diz que é essencial que o aluno saiba transitar entre diferentes registros de representação, para que haja uma aprendizagem com significado.

Como o conjunto de atividades é um pouco extenso, resolvemos somente descrever como os alunos coseguiram resolver o problema proposto como atividade introdutória. A situação problema já foi mostrada anteriormente. No entanto, nesse momento o enunciado trouxe uma dica. Os estudantes deveriam considerar as bolinhas de gude como ●●●●●●●●● que devem ser separadas por /// que devem representar as gavetas. Por exemplo, uma maneira seria ●●/●●/●●/●●●, 2 bolinhas na 1ª gaveta, 2 bolinhas na 2ª, 2 bolinhas na 3ª e 3 bolinhas na 4ª gaveta.

O objetivo desta atividade, nesse segundo momento, era que os estudantes utilizassem recursos aprendidos nas aulas anteriores para resolver o problema proposto. Para tanto, utilizaram diversos tipos de registros de representação, como pode-se observar a seguir:

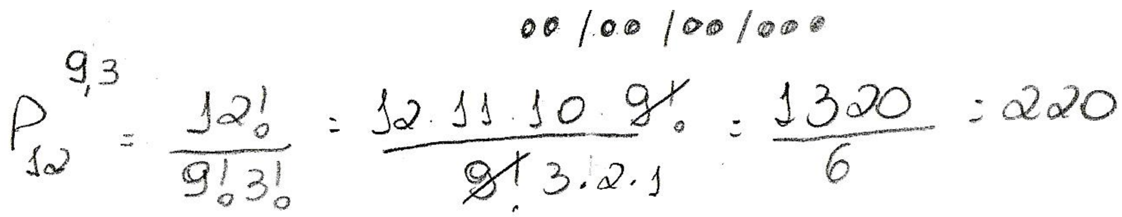


Figura 3: Protocolo extraído do caderno de atividades

Pudemos notar a satisfação dos estudantes em conseguir resolver um problema, aparentemente tão complicado. Acreditamos que os estudantes desenvolveram habilidades na percepção e uso de registros variados de solução.

Inicialmente, verificamos que este aluno utilizou a sugestão dada na questão, de representar as bolinhas de gude e as gavetas desenhando-as como bolinhas e barras, respectivamente, como pode-se ver na figura 2. Através do esquema, esse aluno utilizou permutação com elementos repetidos para escrever a linguagem simbólica: $P_{12}^{9,3}$. Então, o estudante converteu essa linguagem em uma operação e utilizou a notação fatorial para representá-la. Depois disso, ele transformou essa notação fatorial em linguagem simbólico-numérica, dada por operações matemáticas. Todos esses passos seguidos pelo aluno representam o que Duval (2003) chama de conversão de representações e mudança de registros. Duval (2009) diz que converter é transformar a representação de um objeto de dado registro em uma representação desse mesmo objeto, num outro registro. Para Duval (2009), essas conversões são importantes para a verdadeira compreensão do conteúdo estudado. Acreditamos que os diferentes registros de representação e o incentivo à realização das operações de transformações desses registros fazem com que o aluno perceba as diferentes formas de resolver um mesmo exercício e de representar suas ideias.

Ainda nessa atividade pudemos perceber outro tipo de transformação. O estudante efetuou os cálculos para se chegar a uma resposta final. A transformação de representação interna a um registro, feita pelo aluno é o que Duval (2009) denomina tratamento. Segundo esse autor, o tratamento consiste em transformar uma representação dada em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão.

Verificamos que as transformações de representações semióticas dão aos estudantes uma melhor compreensão do conteúdo. Os estudantes adquiriram certa facilidade em coordenar registros variados de representação. À medida que resolviam os problemas propostos pelo conjunto de atividades, os alunos foram se habituando ao uso de diferentes registros e suas transformações, quando um registro mostrava ser mais eficiente do que outro. Acreditamos que ao experimentar registros variados privilegia-se o desenvolvimento do raciocínio combinatório no aluno.

## 6. Considerações finais

A análise da experiência desenvolvida através de problemas mostrou que este é um contexto que pode favorecer a aprendizagem. A maioria dos alunos sentiu-se motivada, conseguindo apresentar soluções criativas e corretas. Alunos aprendem a gostar de matemática e passam a ver esta disciplina com um olhar mais curioso e desafiador.

Nesse trabalho procuramos destacar a importância do uso de diferentes registros de representação semiótica no estudo da análise combinatória, tendo por base a teoria de Duval (2009). Verificamos que as transformações de representações semióticas dão aos estudantes uma melhor compreensão do conteúdo. Acreditamos que o incentivo à realização das operações de transformações desses registros fazem com que os alunos percebam as diferentes formas de resolver um mesmo exercício e de representar suas ideias.

Os estudantes adquiriram certa facilidade em coordenar registros variados de representação. À medida que resolviam os problemas propostos pela sequência de atividades, os alunos foram exercitando o raciocínio combinatório e se habituando ao uso de diferentes registros e suas transformações, inclusive identificando situações em que um registro mostrava ser mais eficiente ou adequado do que outro.

## 7. Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. V. 3: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** V. 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC. Secretária de Educação Básica, 2006.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. D. A. Machado (Org), **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação). Cap. 1, p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais.** (Fascículo I). São Paulo. Editora Livraria da Física, 2009.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental.** 2001, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. 6ª edição. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Tereza Raquel Couto de. **Ensinado e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados.** 2011, 148 p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNADEZ, Pedro. **Análise combinatória e Probabilidade.** 9ª edição, 2006. (Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática).

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A psicologia da criança.** Rio de Janeiro. Editora Bertrand Brasil S. A., 1995.