PROFESSORES DE MATEMÁTICA E PROBLEMAS DE CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

Paulo Jorge Magalhães Teixeira
IME-UFF, Colégio Pedro II
pjuff@yahoo.com.br

Ruy César Pietropaolo
UNIBAN - Universidade Bandeirante de São Paulo
rpietropaolo@gmail.com

Resumo:
Este trabalho é o recorte de uma pesquisa que envolveu a formação continuada de 20 professores que ensinam Matemática na Educação Básica de uma rede estadual de ensino e apresenta resultados de experiências vivenciadas pelo grupo em reflexões e discussões acerca da prática docente relacionada à introdução de conceitos de combinatória no Ensino Fundamental, priorizando não usar fórmulas. O propósito foi estimular o ensino e aprendizagem desses conceitos valendo-se do desenvolvimento do raciocínio combinatório para a construção e exploração de diferentes representações, de maneira a obter todas as possibilidades que atendem à solução de um problema de contagem e/ou quantitativo destas. Sobre a fundamentação teórica, relativamente aos conhecimentos de domínio do professor, consideramos as categorias estabelecidas por Shulman (1986) quanto aos conhecimentos de conteúdo específico, pedagógico e curricular, os referidos à formação de professores reflexivos utilizamo-nos de ideias defendidas por Zeichner (1993), em um ambiente de estudo de inovações curriculares.

Palavras-chave: Educação Matemática; Problemas de Contagem; Formação de Professores de Matemática; Conhecimento Matemático para o Ensino; Currículos de Matemática.

1. Introdução

Segundo os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, p. 109-112), para a compreensão efetiva da multiplicação é preciso explorar quatro diferentes grupos de atividades: *multiplicação comparativa*; *ideia de proporcionalidade*; *configuração retangular* e a *ideia de combinatória* (que será exemplificada neste trabalho).

De modo geral quando as crianças resolvem situações que envolvem a soma de parcelas iguais formadas por números naturais é o momento para que elas se apropriam de um dos quatro significados para o conceito de multiplicação, conforme acima. Assim, ao escrever 3 + 3 + 3 + 3 a ideia da adição de parcelas iguais (quatro vezes o três em soma) tem sido abordada sob a ótica de um registro multiplicativo como 4 x 3, com ênfase ao 4 como o número de repetições do 3 na soma e a indicação do 3 como a parcela que se repete.

Embora esse modo de conceituar a multiplicação: soma de parcelas iguais, seja relevante como ponto de partida para a compreensão e a apropriação do conceito de multiplicação ao enfatizar os papéis daquele que se repete e daquele que representa o número de repetições, esta não deve ser a única maneira utilizada para explorar o conceito da multiplicação de números naturais e com a qual o professor deva basear-se para dar sentido à multiplicação uma vez que "[...] essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas" (BRASIL, 1997, p.109).

Assim, utilizar-se somente de situações aditivas para conceituar a multiplicação não são suficientes para que os alunos compreendam e resolvam situações-problema relacionadas a esse conceito, principalmente em relação a situações nas quais a comutatividade apresenta-se como uma ambiguidade.

Neste trabalho vamos apresentar uma situação-problema simples que foi proposta e explorada por meio de diferentes representações, em continuidade às considerações feitas de início, como recorte de várias situações-problema que foram objeto de uma ampla formação continuada que desenvolvemos com um grupo de professores - que pode também ser desenvolvida com alunos do Ensino Fundamental. O trabalho completo dessa pesquisa pode ser encontrado em Teixeira (2012).

2. Os sujeitos da pesquisa

Este trabalho é o recorte de uma pesquisa mais ampla que envolveu a formação continuada de 20 professores que ensinam Matemática na Educação Básica, pertencentes a uma rede estadual de ensino de uma grande capital e apresenta os resultados das experiências vivenciadas pelo grupo em reflexões e discussões acerca da prática docente relacionada à exploração de conceitos de Combinatória no Ensino Fundamental, com o propósito de verificar se é possível ressignificar práticas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem desses conceitos, priorizando o não uso de fórmulas para o ensino desses conceitos, neste segmento de ensino.

3. Metodologia da pesquisa

A utilização da metodologia Design Experiments segundo Cobb et al (2003) para atender aos propósitos da pesquisa se consubstanciaram nas características presentes nos dois primeiros momentos explicitados pelos autores e que, na investigação, se desdobraram em três momentos, a saber: Primeiro momento: definição dos documentos diagnósticos acerca da Experiência docente, dos conhecimentos de conteúdo e dos conhecimentos pedagógicos conteúdos e a elaboração das respectivas questões para compor as atividades desses três documentos introdutórios, o segundo momento: elaboração e aplicação de proposta de sequência didática de ensino que foi apresentada aos professores durante os encontros de ensino e o terceiro momento, no qual elaboramos um questionário para identificar concepções e crenças dos professores em relação à ressignificação de conhecimentos de conteúdo, pedagógicos de conteúdo e curriculares.

4. Fundamentação Teórica

Como o foco do nosso estudo foi o Conhecimento Profissional Docente, nos apoiamos nos estudos de Shulman[1] (1986). Desde 1983, Shulman chama a atenção para o que ele identificou como “paradigma perdido” – o conhecimento do conteúdo –, salientando que o domínio deste é imprescindível para o ensino de toda e qualquer disciplina. O autor busca em suas pesquisas discutir os conhecimentos que servem de base para formação e atuação docente.

Shulman (1986) propôs um domínio especial de conhecimento do professor que chamou de *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que faria uma “ponte” entre o conhecimento do conteúdo e a prática do ensino. Segundo ele, "o *conhecimento pedagógico do conteúdo* é a categoria mais provável de distinguir o entendimento do especialista no conteúdo do pedagogo”. Ele sugeriu que existe um conhecimento de conteúdo exclusivo para o ensino – o conhecimento específico do profissional.

Shulman (1986) argumentou que “o mero conhecimento do conteúdo é provável de ser tão inútil pedagogicamente quanto à experiência sem conteúdo” e prossegue afirmando que “saber um assunto para ensiná-lo requer mais do que saber os seus fatos e conceitos”. Assim, os professores devem também entender os princípios organizadores, as estruturas e as regras para estabelecer o que é legítimo a fazer e dizer em uma área de ensino. Segundo

[1] Lee L. Shulman, Professor de Educação da Universidade de Stanford, pesquisa sobre questões relacionadas à formação de professores.

Shulman (1986), "o professor não deve entender que alguma coisa é assim, o professor deve entender mais profundamente porque uma coisa é assim, em que bases a sua garantia pode ser afirmada, e sob quais circunstâncias a nossa crença na sua justificativa pode ser enfraquecida ou negada" (SHULMAN, 1986 apud Teixeira (2012)).

Para a elaboração e a análise das questões que compuseram dois dos três questionários propostos na primeira fase da pesquisa apoiamo-nos em Tall & Vinner (1981). Esses autores definem *imagem conceitual* como estrutura cognitiva total que é construída na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito matemático abrangendo todas as ideias, imagens mentais, impressões, representações visuais e descrições verbais relativas a propriedades e processos que envolvem aquele determinado conceito.

Segundo Tall e Vinner (1981), como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos (TALL e VINNER, 1981, p.2 apud Teixeira (2012)).

Para a particular experiência formativa objeto da pesquisa, de início e por meio dos questionários iniciais, foi possível conhecer o que os professores do grupo sabiam a respeito dos conceitos básicos de combinatória e as estratégias e procedimentos que utilizaram para resolver os problemas de contagem propostos em um desses questionários.

Em prosseguimento, na fase de intervenção, fizemos um acompanhamento mais amiúde para identificar acerca da consolidação e a apropriação dos conceitos e procedimentos que ampliam a imagem conceitual do grupo de professores, um dos propósitos da formação, no sentido de que o grupo pode refletir sobre a importância de conhecê-los e aplicá-los, de maneira a consolidar os conhecimentos de conteúdo e pedagógicos de conteúdo, para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de seus alunos.

Nesse sentido, a imagem conceitual - segundo os propósitos de Tall e Vinner (1981) - esteve presente em nossas análises a respeito dos dados obtidos, principalmente na fase de intervenção. No particular caso dos conceitos básicos de combinatória que estavam presentes quando da resolução de problemas de contagem, a *imagem conceitual* relativa aos conceitos lá presentes - a qual o grupo de professores poderia vir a explicitar quando das respostas fornecidas aos questionários - nos auxiliou para compreender os conhecimentos dos professores no que diz respeito aos conhecimentos de conteúdo, segundo as perspectivas de Shulman (1986).

Ou seja, a *imagem conceitual* do grupo de professores relativamente aos conceitos básicos de combinatória para a Educação Básica - à época do primeiro dos encontros de ensino, quando responderam aos questionários diagnósticos - favoreceu a definição do marco inicial deste estudo, embora Tall e Vinner (1981) não se referissem particularmente em relação a professores, mas com respeito a uma pessoa, de modo geral.

Apoiamo-nos também na perspectiva de Fischbein (1994) - aspectos intuitivo, algorítmico e formal da atividade matemática - para identificar a presença desses aspectos quando os professores buscaram estratégias para resolver situações-problema de contagem que foram propostas durante a sequência de ensino da investigação.

O *componente intuitivo* está associado a uma compreensão que uma pessoa considera como autoevidente, que intuitivamente ela seja capaz de compreender e quer que os outros também a aceitem, sem que disponha de argumentos convincentes para provar a sua validade (FISCHBEIN, 1994 apud Teixeira (2012)).

Segundo Fischbein (1994), o *componente intuitivo*, ou simplesmente *compreensão intuitiva*, *cognição intuitiva* ou *solução intuitiva*, diz respeito a uma compreensão que uma pessoa considera autoevidente. Essa compreensão é de tal maneira aceita pela pessoa que ela é capaz de aceitar uma ideia ou um conhecimento sem sequer questionar de que é preciso que haja necessidade de encontrar um tipo de justificativa qualquer que venha a legitimar essa ideia ou conhecimento.

Quanto ao *componente formal*, este diz respeito aos conhecimentos que estão relacionados com as definições, axiomas, teoremas e provas de resultados que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelos alunos.

Segundo Fischbein (1994) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação desse componente formal considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor (FISCHBEIN, 1994, p. 232 apud Teixeira (2012)).

Essa identificação está associada à definição, formal ou não, dos tipos de agrupamentos que permeiam os problemas de contagem na Educação Básica: permutações simples, permutações com objetos nem todos distintos, combinações simples ou permutações circulares e, em seguida, o estabelecimento de uma ou mais estratégias para encaminhar a busca da solução para o problema proposto.

Em relação ao *componente algorítmico*, ele está associado às habilidades relacionadas com a aplicação de técnicas e procedimentos padronizados de resolução. Mas, nem por isso, a apropriação dessas habilidades dispensa uma formação meticulosa requerida para o seu desenvolvimento. O grupo de professores fez uso, em diversas ocasiões, de uma ou mais fórmulas para dar conta da contagem das possibilidades em resposta a uma dada situação-problema.

Fischbein (1994), quando se refere aos dois últimos componentes pontua que conhecer e explorar a íntima relação que há entre o aspecto formal (o qual tem por propósitos justificar e provar que essas técnicas funcionam) e o aspecto algorítmico (no que se refere ao funcionamento das técnicas) constitui-se de condições básicas para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente, não prescindindo do aspecto intuitivo (TEIXEIRA (2012)).

Mais ainda, Fischbein (1994) argumenta que o conhecimento de componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas. Por outro lado, continua o autor, o domínio de técnicas e procedimentos, isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas, pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão (FISCHBEIN, 1994, p. 232 apud Teixeira (2012). Em sua obra, Fischbein (1994) chama a atenção para a importância da interação que deve existir entre os componentes intuitivo, formal e algorítmico como aspectos que se complementam quando da realização de alguma atividade matemática.

No particular caso dos problemas de contagem, saber que a ordem entre os objetos de uma situação-problema é relevante ou não ou ainda, que a ordem entre os objetos está presente nos agrupamentos que constituem a solução ou então que a ordem entre objetos não deve ser considerada o mais importante para a situação posta, não garante ao aluno obter a solução correta à situação. Nem tampouco qual a fórmula adequada para esse tipo de agrupamento de objetos garante que, ao utilizá-la, o aluno vai dar conta da contagem correta. Por outro lado, cabe aqui esclarecer que as situações-problema que foram objeto dos questionários e da sequência de ensino e as considerações que foram objeto de nossas análises ao longo de todo o texto da pesquisa são tomadas como exemplos nas quais se pode destacar a presença dos componentes intuitivo, algorítmico e formal (TEIXEIRA, 2012.

5. A Prática Pedagógica e o Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental

O professor de Matemática, enquanto prepara suas aulas acerca das noções básicas de Combinatória (Problemas de Contagem) para o Ensino Fundamental, poderia se recordar de momentos que vivenciou, enquanto aluno da Escola Básica ou do Curso de Licenciatura em Matemática, quando possivelmente se deparou com dúvidas tipo: em um agrupamento combinatório é ou não importante considerar a ordem entre os objetos.

Enfim, lembrar-se de situações-problema que similares as que vivenciou e que, agora, em sua prática pedagógica teria de dar conta de encontrar maneiras diferentes para ensinar a seus alunos do Ensino Fundamental esses conteúdos, quando ele mesmo, muitas vezes, tem dificuldades para compreender e se apropriar de conhecimentos de conteúdos suficientes para esta empreitada ou, ainda, talvez não tenha vivenciado situações acerca dos conhecimentos pedagógicos de conteúdo apropriados para apresentar, mediar e desenvolver esses conceitos com seus alunos, e tivesse de recorrer às situações de quando era estudante. Ele iria reproduzir práticas da mesma maneira que quando aprendeu esses conteúdos? Como conceber um ensino de problemas de contagem sem o uso de fórmulas, diferentemente de quando ele aprendeu, com crianças de 9 a 14 anos de idade no Ensino Fundamental? Quais as razões para ensinar esses conteúdos no Ensino Fundamental?

Assim, nos dias de hoje, novos currículos têm sido prescritos e implementados em consonância com a LDBEN - Lei 9394/96, os PCN (1997, 1998, 1999), segundo diretrizes curriculares de Estados e Municípios por meio de especialistas, professores e gestores escolares, e que precisam ser transformados, pelos professores, em currículos em ação.

Desse modo, e analisando o desenvolvimento dos conteúdos associados ao raciocínio combinatório, entendemos que deve haver uma busca pela aproximação entre o conteúdo escolar e o universo da cultura matemática ao longo do Ensino Fundamental desde o 3º Ano/4ª Série, que proporcione ampliação conceitual qualitativa à aprendizagem dos alunos indispensáveis para a apropriação e sistematização dos conteúdos de Combinatória e para compreender outros, de Probabilidade e Estatística, no Ensino Médio.

Mesmo considerando que tal ampliação conceitual já exista em algumas regiões do nosso país é preciso refletir sempre acerca da prática da sala de aula em relação ao que está prescrito nos Currículos e na formação dos docentes ao longo de sua trajetória profissional.

Quanto a essa questão, nos reportamos a Pietropaolo (2002) em:

> [...] Embora esses dois temas mantenham estreitas relações entre si, nem sempre eles têm sido discutidos de forma articulada, o que, em certo sentido, ajuda a explicar a dificuldade de implementação de propostas curriculares quando não se leva em conta que tipo de formação, que tipo de experiência têm os professores que vão colocá-las em prática. Por outro lado, a falta de clareza do tipo de profissional que se deseja formar para atender às novas demandas pode explicar as dificuldades encontradas para desenvolver projetos mais consistentes de formação de professores (PIETROPAOLO, 2002, p. 34).

Portanto, nos dias de hoje, consideramos que é preciso procurar alternativas mais atraentes que contemplem e favoreçam a participação efetiva e lúdica dos alunos no processo de construção de seus conhecimentos e também na aquisição de competências matemáticas desde os anos iniciais da Escola Básica em relação aos conteúdos acerca dos Problemas de Contagem, em particular as que tratam de situações relacionadas ao raciocínio combinatório, presentes nos PCN. Será preciso reunir um conjunto de ações que propiciem a aprendizagem, num trabalho colaborativo para a formação de uma comunidade aprendente[2].

Por conta disso, em relação ao Ensino Fundamental preferiu-se chamar de *Problemas de Contagem* ao invés de Problemas de Combinatória (ou Análise Combinatória) uma vez que neste nível de ensino o desenvolvimento desse conteúdo envolve a utilização de metodologia apropriada que deve explorar diferentes representações: esquemas, produto cartesiano, tabela de dupla entrada, árvore de possibilidades, para a apresentação das soluções e a contagem direta destas e, em prosseguimento, aplicar o Princípio Multiplicativo para obter a solução de problemas de contagem e, também, mostrar como ele é aplicado durante a construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo.

Uma vez que o Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo dão conta de resolver inúmeras situações-problema de contagem e favorecem a apreensão de conceitos básicos de Combinatória no Ensino Fundamental por meio da exploração do raciocínio combinatório, os PCN (1997, 1998) sugerem deixar para o Ensino Médio o tratamento formal para a contagem de agrupamentos de objetos rotulados como arranjos simples, arranjos com repetição, permutações simples, permutações de objetos nem todos distintos e combinações simples, não necessariamente com o uso de fórmulas, para obtenção de todas

[2] Nova terminologia, nos dias de hoje, para o que se conhece como o conjunto de ações precípuas que sempre identificaram a escola, os seus professores, alunos e pais.

as possibilidades, diferentemente de como hoje é feito pela grande maioria dos livros didáticos para o Ensino Médio.

Por outro lado, já no Ensino Fundamental, com as noções básicas de Combinatória como ferramentas para outros tipos de contagem exige que seja superada a ideia inicial de enumeração de elementos de um conjunto para se passar à contagem direta de grupos de objetos que satisfazem a uma ou mais propriedades particulares e inerentes a conjuntos (numéricos ou não), ou seja, acerca da contagem dos elementos de subconjuntos, tendo como base o raciocínio combinatório implicado em procedimentos básicos explicitados no Princípio Aditivo e no Princípio Multiplicativo.

Assim, após o trabalho inicial com a apresentação de algumas representações para a obtenção das soluções a uma dada situação-problema, outras situações-problema poderão apresentar dados com números um pouco maiores de modo que os alunos percebam a necessidade de utilizarem uma notação multiplicativa, adiante denominada pelo Princípio Multiplicativo, como um recurso que auxilia a resolução de problemas com essas características. Esses procedimentos e estratégias que se valem do raciocínio combinatório associado ao uso do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo, em conjunto ou não, acompanharão os alunos até o Ensino Médio.

Entendemos que as noções de Estatística, de Probabilidade e de Combinatória devam integrar grande parte dos conceitos trabalhados na sala de aula desde os primeiros anos da Educação Básica já que estas se constituem de ferramentas para a tomada de decisões e, além disso, a demanda social está a exigir tal postura em função de sua ampla aplicação em diferentes contextos de nossa sociedade.

Essas noções, combinadas, permitem a utilização dos conceitos para a análise de dados, tratamento de informações, desenvolvimento de raciocínios dedutivos e, em geral, na tomada de decisões, tanto para alunos quanto para o cidadão, de modo geral.

Segundo Morgado et al (2004), a Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente devido a necessidades de modelar problemas interessantes como problemas da Teoria dos Grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores e também problemas de Matemática pura - como o “Problema das 4 Cores”), em Análise de Algoritmos, etc.

Portanto, a Análise Combinatória tem uma abrangência muito maior que aquela que trata unicamente de problemas de contagem presentes nos três agrupamentos de objetos habitualmente desenvolvidos na Educação Básica, a saber: Arranjos, Permutações e Combinações simples. Ou seja, há inúmeros e interessantes problemas associados à Análise Combinatória, mas muitos deles não estão apropriados para essa faixa etária de alunos. Além disso, é preciso ressaltar que muito dos problemas que são propostos na Educação Básica representam uma considerável parcela de interessantes problemas e são bastante atraentes para motivar crianças e jovens acerca de aplicações da Matemática.

Infelizmente, quando se trata da ideia combinatória como um dos significados da multiplicação e sugeridas pelos PCN (1997, p.109-112) na maioria das vezes elas são pouco exploradas pelos professores, por vezes estando restritas a exemplos do tipo que relaciona peças de vestuário, tais como saias, blusas e sapatos e não mais que isso. Assim, nessas ocasiões perde-se a oportunidade de explorar diferentes representações para obter a solução de cada situação-problema proposta permitindo o desenvolvimento do raciocínio combinatório enquanto uma árvore de possibilidades é construída, por exemplo,.

Desenvolver o raciocínio combinatório é compreender os diferentes modos em que é possível combinar objetos, independente da quantidade deles, sistematizando maneiras de agrupar esses objetos segundo características comuns – que chamamos de agrupamentos de objetos - associadas à situação-problema proposta, como consequência das diferentes e independentes “tomadas de decisão”, caracterizando assim os diferentes agrupamentos construídos através da operação de classificação desses objetos e que, quando finalizados, encontram-se nos galhos terminais da árvore.

O desenvolvimento dos procedimentos que visam melhorar a compreensão desse raciocínio são etapas importantes para entender outros que exigem a formação de agrupamentos, aperfeiçoando maneiras de proceder à contagem que auxiliarão e garantirão segurança para o enfrentamento de situações mais complexas.

Assim, quando se apresenta a seguinte situação-problema para os alunos: De quantas maneiras diferentes Bia poderá se vestir se ela possui quatro blusas e três saias? o professor deve propiciar condições que permitam ao aluno compreender que a relação de combinação que ele faz entre os objetos envolvidos está relacionada à correspondência um-para-muitos[3]: a cada blusa escolhida ele faz corresponder três diferentes saias, formando, então, três diferentes conjuntos blusa-saia, em que a blusa escolhida é a mesma. Essa

[3] “um-para-muitos” refere-se a um termo, segundo (Nunes e Bryant, 1997), para distinguir uma situação multiplicativa, base para o entendimento do conceito de proporção.

operação fica clara com a utilização de uma árvore de possibilidades, por exemplo. Assim, para cada blusa há três ramificações na árvore, determinando “três galhos terminais”.

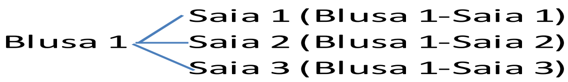

Figura 1: Combinações da blusa 1 com as saias 1, 2 e 3.

Parece ser simples, e é muito importante estabelecer essa relação através de uma representação (um esquema ou uma tabela de dupla entrada ou a construção restante da árvore de possibilidades). Assim, se “cada blusa permite a formação de três conjuntos” e como Bia dispõe de quatro blusas, e o mesmo pode ocorrer para as demais, há quatro maneiras de se escolher uma blusa e, para cada uma delas há três possibilidades de escolha de saias, determinando um total de 4 x 3 = 12 possíveis conjuntos saia-blusa. Cada conjunto saia-blusa é formado pelas duas peças: blusa e saia, não se impondo ordem às peças integrantes desse conjunto. Assim, cada conjunto saia-blusa é distinto (disjunto) dos demais conjuntos saia-blusa que poderão ser formados.

Procedendo conforme o exemplo apresentado acima se estará possibilitando que o aluno, intuitivamente, identifique a utilização do Princípio Multiplicativo, não necessariamente tendo que rotulá-lo, de início. Assim, sugerimos que o professor não o formalize de imediato uma vez que este Princípio, na maioria das vezes, está associado a situações do tipo: “Se cada elemento de um dado conjunto A está associado (combinado) com todos os elementos de um conjunto B então, quantas combinações (agrupamentos) desses elementos se podem realizar?” e diretamente relacionado com o conceito de Produto Cartesiano, por razões naturais.

Manipular material concreto (saia e blusa, objetos distintos) é importante para que o aluno compreenda o raciocínio de “combinação” presente entre os objetos que estão à sua mão, de modo que, nas situações em que a quantidade de objetos seja grande, ele não encontre dificuldades em realizar a contagem em situações em que é exigida a ordenação de um grande número de objetos.

É preciso aproveitar situações com quantitativos pequenos de objetos para explorar diferentes representações que a situação oferece como, por exemplo, a relação com o conceito de produto cartesiano, que será útil em situações outras de Matemática. Como visto, a utilização de diferentes representações para obter a solução de uma dada situação-problema no início de atividades envolvendo o raciocínio combinatório favorece a compreensão, apropriação e a utilização do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo, fundamentais ao desenvolvimento de pensamentos abstratos e na aplicação em situações que exigem a generalização desses conceitos.

Um dos grandes "nós" que afligem os educadores matemáticos é compreender que a aquisição e a compreensão de um dado conceito pelos alunos não se dá, unicamente, com a apresentação de um tipo de situação (não emerge daí, somente) e, por outro lado, que uma dada situação pode vir a envolver mais do que um só conceito, por mais simples que possa ser aos nossos olhos.

Portanto, conceitos matemáticos têm significado para o aluno quando são percebidos por ele a partir de uma variedade (tão extensa quanto necessário for) de situações nas quais sua importância pode ser percebida. Por outro lado, uma dada situação-problema pode apresentar diferentes conceitos envolvidos, ou seja, ela necessita de mais de um conceito para ser analisada e compreendida.

Assim, um único conceito, fechado em si, e uma única situação-problema não são suficientes para dar conta da aquisição de um dado conhecimento de forma plena e consistente e capaz de proporcionar segurança de seu uso em diferentes contextos.

Retomando a situação-problema, e tomando as blusas como B1, B2, B3 e B4 e as saias como S1, S2 e S3 podemos representar as soluções como:

1) Um esquema:

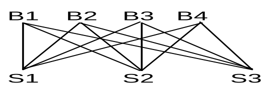

Figura 2: Um esquema para a situação-problema proposta

2) Árvore de possibilidades:

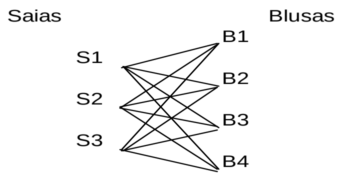

Figura 3: Uma árvore de possibilidades para a situação-problema proposta

3) Tabela de dupla entrada:

Saia / Blusa	S1	S2	S3
B1	{B1,S1}	{B1,S2}	{B1,S3}
B2	{B2,S1}	{B2,S2}	{B2,S3}
B3	{B3,S1}	{B3,S2}	{B3,S3}
B4	{B4,S1}	{B4,S2}	{B4,S3}

Figura 4: Uma tabela de dupla entrada para a situação-problema proposta

As descrições das possibilidades de combinações blusa x saia representadas na tabela de dupla entrada acima permite tornar clara a relação entre o raciocínio combinatório e o produto cartesiano entre o conjunto de blusas e o conjunto de saias.

4) Enumeração de conjuntos disjuntos: $\{B_1, S_1\}$, $\{B_1, S_2\}$, $\{B_1, S_3\}$ $\{B_2, S_1\}$, $\{B_2, S_2\}$, $\{B_2, S_3\}$ $\{B_3, S_1\}$, $\{B_3, S_2\}$, $\{B_3, S_3\}$, $\{B_4, S_1\}$, $\{B_4, S_2\}$, $\{B_4, S_3\}$. Essas 12 possibilidades são a totalidade de conjuntos disjuntos que representam as soluções. Assim, ao aplicar o Princípio Aditivo tem-se a totalidade de possibilidades.

5) Produto Cartesiano (PC):

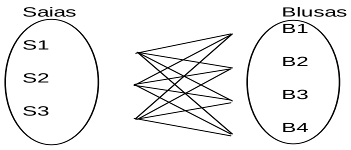

Figura 5: Produto Cartesiano para a situação-problema proposta

Assim, o número de modos diferentes de Bia se vestir é dado por 4 x 3 = 3 x 4 =12. Este resultado, que traduz o número de combinações possíveis entre o quantitativo de objetos, os fatores 3 e 4 ou, então, entre 4 e 3, é tal que nele não se diferenciam os termos iniciais, sendo possível a interpretação da operação com sua representação escrita, ou seja: combinar 4 blusas e 3 saias é o mesmo que combinar 3 saias e 4 blusas e isso pode ser expresso pela igualdade acima.

Combinar objetos, como o que foi feito acima, é de tal sorte tão importante na fase inicial da apresentação do conceito de multiplicação quanto no início do estudo, com atividades que visam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e mostra a importância que se deva dar à proposição de situações-problema que envolva os quatro grupos de atividades - não necessariamente em conjunto - contribuindo para os significados da multiplicação e da divisão.

Por conta disso, sugerimos que no Ensino Fundamental o professor explore o raciocínio combinatório e se utilize de diferentes representações para apresentar a solução de uma mesma situação-problema, fazendo uso de procedimentos e estratégias associados aos Princípios Multiplicativo e Aditivo. A não vivência dos alunos com situações-problema desse tipo, quando da sistematização dos conceitos de multiplicação e divisão - como foram explicitados anteriormente - pode acarretar dificuldades futuras, oriundas de o conceito da multiplicação, associado à ideia combinatória não ter sido corretamente apropriado e o não conhecimento em relação às possibilidades com as representações.

5. Resultados Finais da Pesquisa

Neste trabalho apresentamos um recorte acerca de uma ampla formação continuada de professores por meio de reflexões e discussões enquanto resolviam situações-problema de contagem com as quais cada professor pode contar para trabalhar em sala de aula, enquanto promove a exploração dos conceitos básicos de Combinatória, sem o uso de fórmulas.

Esta pesquisa identificou que os professores do grupo ainda não haviam vivenciado situações nas quais - dependendo do modo como a solução da situação é encaminhada - será preciso repartir o problema em várias etapas – quando e em quantas partes seja necessário - para efetuar a contagem total de possibilidades, utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, em conjunto.

Os resultados observados ao longo dessa fase, a partir das reflexões e discussões nos grupos menores de professores, não só indicaram avanços no que diz respeito às definições, representações e estratégias de resolução, mas também ampliaram a compreensão da aplicação do princípio multiplicativo e do princípio aditivo e a percepção da possibilidade de resolver os problemas de contagem via uso de alguma representação e sem o uso de uma fórmula, como estratégia que pode favorecer a caracterização dos agrupamentos de objetos que atendem à solução do problema, permitindo a contagem total destes agrupamentos de modo direto ou indireto.

Dentre os avanços registrados é importante mencionar também aqueles relacionados à argumentação. Teria ficado vazia a discussão sobre os a resolução dos problemas de contagem na Educação Básica se a atenção do grupo não fosse despertada para a importância dos aspectos intuitivo e formal, na abordagem desse conteúdo.

O esforço e o interesse do grupo a esse respeito resultaram em avanço na leitura atenta aos enunciados dos problemas, na compreensão acerca das estratégias adequadas para obter a solução e, posteriormente, na elaboração de justificativas sobre as tomadas de decisão em cada uma das fases componentes da aplicação do princípio multiplicativo ou da construção da árvore de possibilidades, certificando-se da consecução de todas as etapas que são necessárias para a obtenção da solução de cada problema.

Tomando por base os resultados dessa pesquisa, acreditamos que o desenvolvimento de atividades que envolvam o raciocínio combinatório com quantitativos de objetos em número reduzido, permite que o aluno encontre maneiras próprias de sistematização para a obtenção das possibilidades que atendem à solução do problema proposto enquanto constrói os agrupamentos de objetos que representam todas as possibilidades que atendem à situação-problema proposta e, em seguida, efetua a contagem direta construindo, por vezes, e de início, soluções de maneira intuitiva, depois com a construção de alguma representação – preferencialmente um árvore de possibilidades - e, em seguida, uma vez que tenha compreendido os fundamentos associados à aplicação dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, sem que o professor os apresente formalmente e de imediato.

Essa sugestão pedagógica possibilitará aos alunos que encarem os problemas de contagem de maneira atraente e desafiadora, uma vez que eles poderão manipular objetos e utilizar-se de representações para a obtenção das diferentes possibilidades.

É interessante que o professor, de posse dos mesmos dados de uma situação-problema que acaba de ser resolvida pelos alunos, possa fazer variações, enunciando novas situações-problema e propondo-as, obtendo outros diferentes agrupamentos formados de subconjuntos do conjunto de soluções anterior. E também, que nessas novas situações-problema, a ordem entre os objetos presentes nos agrupamentos deva ou não ser considerada como significativa para diferenciar agrupamentos, sem formalizar essas ideias de imediato, sugerindo que os alunos reflitam a esse respeito.

Desse modo, a estimulação gradual do uso do raciocínio combinatório por meio de soluções para diferentes situações-problema sem a utilização de fórmulas - que não recomendamos no Ensino Fundamental, e no Ensino Médio, durante a apropriação de conceitos, - promove o raciocinar de maneira crítica, desenvolvendo habilidades cognitivas, procedimentos, estratégias e competências que passam a fazer parte da ampliação conceitual da visão de uma criança as quais, mais tarde, podem ser generalizadas.

Acreditamos que a resolução de problemas de contagem que tomam o raciocínio combinatório como ferramenta combinatória, durante a fase de apropriação dos conceitos e da construção de uma árvore de possibilidades, têm esses instrumentos como aliados importantes que favorecem o aluno quanto à compreensão e à utilização de procedimentos e de diversas estratégias apropriadas para resolvê-los.

A experiência com o tratamento de tais informações é, portanto, imprescindível, contribuindo para a formação de cidadãos críticos, autônomos e intervenientes, tarefa que professores têm que abraçar em qualquer nível de escolaridade, com seus alunos.

6. Referências

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. **Secretaria de Ensino Fundamental**, Brasília, 1997.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity**, in: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

NUNES, T. e BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. **Editora Artes Médicas Sul**, Porto Alegre, 1997.

MORGADO, A. C. de O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. **Coleção do Professor de Matemática: SBM**, Rio de Janeiro, 2004.

PIETROPAOLO, R. C. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista: SBEM**, São Paulo, edição especial, ano 9, n. 11A, p. 34-8, abr. 2002.

TALL, D. & VINNER, S.. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, 1981.

TEIXEIRA, P. J. M. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental**. São Paulo: UNIBAN, 2012. 424 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational**, v.15, n.2, p.4-14, 1986.