PARADOXO DE ZENÃO: PERSPECTIVAS PARA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA INTERPRETAÇÃO DA VARIAÇÃO DO PROBLEMA

Lucia Cristina Silveira Monteiro[1]
Universidade Federal de Alagoas
Lucia.csmonteiro@uol.com.br

Resumo
Nesse trabalho apresentaremos uma investigação teórico/filosófica sobre um problema encontrado na história da matemática conhecido como Paradoxo de Zenão. Buscaremos interpretações desde versões mais antigas até outros diferentes pontos de vista como na lógica e na matemática atual. Para análise da investigação e construção das propostas serão utilizadas noções de complementaridade nas ciências, criatividade, um processo cognitivo, e uma visão da noção de interpretação, considerando a semiótica e a teoria dos signos. Nesse contexto teórico serão apresentadas interpretações inéditas do problema. Concluímos que problemas desse tipo, aparentemente, um paradoxo matemático, são excelentes para compreensão construtiva dos aspectos implícitos e explícitos nas diferentes interpretações, e assim, para a educação matemática.

Palavras Chave: Paradoxo de Zenão; Pensamento Recursivo; Complementaridade; Criatividade, Semiótica.

1. Introdução

O conhecimento matemático vem sendo apresentado como um conjunto de trabalhos completos e teorias terminadas. As perguntas sem respostas, os problemas que incitam diferentes interpretações são considerados conflituosos e por isso são excluídos da maioria das abordagens no ensino de matemática. Nessa investigação analisaremos as mudanças das interpretações sobre um mesmo objeto, e como isso pode ajudar a compreender e perceber diferentes aspectos do mesmo problema.

Esse trabalho, de natureza teórica, é um recorte do projeto de tese de Doutorado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de

[1]Licenciada em Matemática pela UFAL, mestra em psicologia cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco, atualmente, professora assistente da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e doutoranda pela Universidade Bandeirante de São Paulo sob Orientação do Prof. Dr. Michael F. Otte.

São Paulo, sob orientação do professor pesquisador Dr. Michael Friedrich Otte[2], com foco nas interpretações do paradoxo de Zenão. Nessa investigação identificamos diferentes compreensões desse paradoxo, encontradas na história antiga e recente. O objetivo aqui nesse trabalho é apresentar uma compreensão construtiva das diferentes interpretações dada ao problema e prováveis implicações para o ensino da matemática.

Na busca desse objetivo apresentaremos reflexões sobre esse paradoxo à luz das noções de complementaridade na visão de Otte (2003), e de criatividade, noções com referenciais em Otte (1993) e Vygotsky (1988). Também será considerado o conceito de *interpretante* como sendo a interpretação de um signo. Esse conceito é encontrado na estrutura teórica da semiótica em Peirce (2010). Esse arcabouço teórico nos permitirá explorar possibilidades e perspectivas para a educação matemática através de variações desse problema.

2. O paradoxo de Zenão: diferentes interpretações

As primeiras argumentações que conhecemos a respeito da obra de Zenão são, segundo Otte (2003), devido a Aristóteles que as expôs a fim de refutá-las. Com referência ao livro de Aristóteles, o núcleo do paradoxo de Zenão é a ideia de que, para Aquiles recuperar o atraso com a tartaruga, deve primeiro realizar um número infinito de atos. O problema, à descrição da época, aparece apresentado da seguinte forma: suponhamos que Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá cem metros[3] à frente antes de iniciar uma corrida. A fim de ganhar, Aquiles deve primeiro compensar o seu espaço inicial, ou seja, a vantagem de cem metros dada à tartaruga, mas quando ele faz isso e chega ao ponto onde a tartaruga começou, essa, teve tempo para avançar dez metros. Novamente, enquanto Aquiles corre mais dez metros, a tartaruga avança um metro adiante, depois, Aquiles corre um metro e a tartaruga avança um decímetro, e assim por diante, sem fim.

[2] Michael Friedrich Otte matemático e filósofo nascido na Alemanha, atuou em cinco países diferentes. Fundou em 1973, o novo Instituto de Pesquisas em Didática Matemática (IDM), na Universidade de Bielefeid, na Alemanha. No Brasil, atualmente, atua como professor pesquisador da Universidade Bandeirante de São Paulo.
[3] A medida usada à época era *estádios*. Não havia o padrão *metro*.

Outra interpretação encontrada na antiguidade para o mesmo paradoxo diz - antes que se cubra o espaço entre dois pontos tem-se que cobrir a metade desse espaço, e antes a metade da metade desse espaço, e assim sucessivamente, criando-se a ideia de que não seria possível sair do ponto. Nesse sentido, o problema de Zenão é colocado como um paradoxo do movimento.

Aristóteles negou a possibilidade do problema de Zenão ser um paradoxo em razão da sua concepção sobre *continuidade ininterrupta do movimento como um todo*. Para Aristóteles, assim como para Platão, matéria e espaço é a mesma coisa, portanto, nem espaço nem o contínuo são considerados como um objeto, e, espaço ou tempo é uma relação. Aristóteles não admitia ser possível analisar o movimento em *pedaços*, de forma discreta, como propõe essas primeiras interpretações do problema.

Mais tarde Galileu interpreta esse movimento em termos de duas séries de intervalos correspondentes nas escalas de tempo e distância, e atualmente, um passo essencial dado pela Matemática é uma sintetização dessas correspondências que são tratadas como um objeto matemático, no caso, uma fórmula algébrica.

A interpretação matemática atual é através da convergência de uma série geométrica infinita. Esse modelo representa uma *fórmula* para *solucionar* o paradoxo, mas muitos discordam dessa compreensão unilateral, visando unicamente um resultado.

O psicólogo da corrente Gestalt Max Wertheimer (1945) critica o modelo de prova atual da convergência da série que descreve matematicamente esse movimento. Esse modelo que *soluciona* o paradoxo de Zenão, surge quando se realiza a operação de multiplicação da série geométrica infinita por *a* e efetua-se uma subtração em seguida. Se o conjunto $S = 1 + a + a^2 + \cdots$ é a representação da série, então, $S - aS = 1 \; or \; S = \frac{1}{1-a}$. Esse pesquisador esclarece que a multiplicação da série $(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)$ por *a* sendo subtraída da série inicial fornece resultados, mas afirma que uma compreensão *real* seria possivel se fosse considerado o que ocorre com o crescimento da série. Assim como também, o que se pode derivar da lei desse crescimento, tendendo assim ao seu limite. Dessa forma, o problema seria conduzido a esta outra importante noção, o limite. Porém, ele concorda que muitos se sentem satisfeitos apenas por chegarem a um resultado utilizando essa *fórmula*.

Observamos que Wertheimers, de certa forma, propõe reduzir o conceito de "série" ao conceito de "fração", que é considerado por ele o significado básico e essencial. Otte (2003) propõe que uma abordagem complementarista seria salientar a simetria entre esses dois conceitos. Em vez de reduzir série à fração pode-se, por exemplo, interpretar uma fracção decimal periódica como uma série geométrica que resultam diretamente destas frações decimais e que representam números racionais.

Outros autores, em diferentes áreas, apresentam interpretações da ideia fundamental do argumento de Zenão com foco principal no pensamento recursivo, ou seja, a repetição initerrupta de um padrão conhecido, inerente a compreensão do problema. Por exemplo, Borges (2008) e Borges (2009), respectivamente nas suas obras *o aleph* e *o livro de areia* apresenta apelo ao pensamento recursivo para expressar suas ideias. Ryle (1993), na sua obra *Dilemas,* aponta diferenças existentes nesse raciocínio, quando é apresentado em diferentes atividades, como por exemplo, em um computador, subordinado a um programa levando a repetição da subdivisão por dois indefinidamente, na corrida de Aquiles e a Tartaruga, ou na subdivisão de um bolo com seu volume conhecido.

No tratamento dado ao paradoxo no diálogo - *O que a Tartaruga disse para Aquiles*, ao fazer uma análise na perspectiva da lógica pura, Carroll (1905)[4] em sua publicação afirma que mesmo o mais perfeito sistema de axiomas não são suficientes para determinar a verdade de um sistema da lógica, e que se deve ter muitos cuidados sobre a escolha das regras de inferência. Nessa análise Carrol propõe a compreensão do paradoxo de Zenão verificado sobre a regra de inferência *modus ponens*, assim como a impossibilidade de se chegar a alguma conclusão. Para esse argumento ele usa a proposição de Euclides, dizendo: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma mesma coisa; (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. Muitos concordam que (Z) segue logicamente de (A) e (B). Carrol questiona sobre a possibilidade de um leitor que ainda não aceitou (A) e (B) como verdade, dele aceitar uma sequência de proposições como validade. E, em uma tentativa de convencer logicamente esse outro tipo de leitor, Aquiles, nesse diálogo construído por Carroll, diria para a tartaruga: agora eu vou escrever como eu dito: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma

[4] http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/carroll/index.asp

mesma coisa; (C) se A e B são verdade Z deve ser verdade. (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. A tartaruga diz: eu posso aceitar A, B e C como verdade e não aceitar Z, posso não? Você pode, Aquiles adimitiu, ainda que o evento seja possível, mas eu posso acrescentar mais uma proposição, (D) se A e B e C são verdade, Z deve ser verdade.

Otte explica que o ponto de partida deste problema é o pressuposto de que toda proposição implica imediatamente em si própria. Se eu digo *p é verdadeiro*, isto significa *p* é verdadeiro. Nada é adicionado à proposição *p* pelas palavras *é verdade*. Nada é adicionado para provar afirmando que a proposição está correta. Caso contrário, entrará em regressão infinita e ficará presa à argumentação de Zenão.

Aqui nesse trabalho buscaremos respaldo na literatura cientifica para propor que a compreensão dos diferentes pontos de vista devem ser considerados, objetivando construir uma abordagem construtiva através da complementaridade das interpretações do problema.

3. Complementaridade

A noção de complementaridade tem sido usada em Matemática e em outros campos da Ciência, visando reter aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos. Uma atitude complementarista, afirma Otte (2003) é consequência da impossibilidade de definir a realidade matemática se a considerarmos como sendo independente da atividade do conhecimento em si. “[...] A prática matemática, que tem progressivamente se libertado de esquemas metafísicos e ontológicos desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista – talvez mais do que qualquer campo de conhecimento a fim de que seja adequadamente compreendida.” (OTTE, 2003, p.204)

Ao tentar explicar o conceito de complementaridade, Otte (2003) o resume como sendo a perseguição e explicação de um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares e aponta que, dessa forma é possível conceber a polaridade entre aritmética e geometria como uma primeira visualização da ideia de complementaridade na Matemática. Em sua explicação, expõe uma distinção entre dualidade e complementaridade destacando o papel da atividade na relação entre sujeito e objeto do conhecimento, dizendo que,

> Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto se diferencia do outro como o abrange, então, é preciso, colocando a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Esta dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento. Agora se trata efetivamente de uma verdadeira complementaridade e não de uma mera dualidade, porque nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar deles desempenharem, num determinado momento de um certo ato epistemológico individual, um papel completamente assimétrico (OTTE, 2003, p.224).

Nessa dinâmica entre o sujeito, objeto e atividade também se destacam aspectos implícitos, como a criação pois, "o ser humano, em cada ação efetiva, vê algo real e, em cada percepção de formas, vê algo ilusório. Ambos os aspectos, no entanto, são complementares e ocorrem em cada atividade criativa" (OTTE, 1993, p. 234).

4. Criatividade, problemas e representações

Analisando o processo de formação da imaginação criativa, Vygotsky (1988) ressalta sua complexidade e pressupõe que toda atividade criativa surge de experiências prévias já existentes no cérebro, que é fruto de percepções internas e externas e assinala cinco passos para sua efetivação, que são: reorganização do material já existente no cérebro, com consequente dissociação das impressões sensoriais; divisão das impressões em diferentes partes, das quais umas serão retidas na mente e outras deixadas de lado; alteração ou distorção das partes retidas; união ou associação dos elementos que foram dissociados e alterados. Esse processo pode se dá de diferentes formas como, por exemplo, a união de imagens subjetivas com objetivas, proveniente do conhecimento científico; e combinação de diferentes formas em um sistema, constituindo um quadro complexo.

Vygotsky esclarece que atividade de imaginação criativa se completa pela cristalização da imagem em uma forma externa e afirma que a atividade criativa da imaginação depende primariamente de quão rica e variada é a experiência prévia que a pessoa armazenou no seu cérebro. Ele considera que essa atividade é uma função vitalmente necessária.

Dessa forma, está colocada a importância da elaboração das propostas curriculares que estimulem um padrão de pensamento que possa favorecer a prática da imaginação criativa, compreendendo a relação desse processo cognitivo com a riqueza de experiências e conhecimentos previamente adquiridos.

De uma maneira geral pode-se dizer que as abordagens aos conceitos matemáticos através de atividades criativas são abrangentes, pois diz respeito aos processos cognitivos desenvolvidos ao se pensar, no tratamento aos conceitos envolvidos no pensamento, e a reflexão e análise desse processo.

Otte (1993) afirma que o processo criativo opera na interação entre variação e repetição. Uma teoria sendo uma interpretação de um fenômeno é também um processo de criar uma interpretação da interpretação dada, e assim por diante. À representação da interpretação de um objeto ou fenômeno chamamos de *signo*. Um signo tanto é uma coisa como também um processo de estabelecer uma relação entre o objeto e a interpretação dada ao objeto. E temos um *fluxo* de significação, ou seja, uma interpretação que sugere uma nova interpretação, num fluxo sem fim.

Peirce (2010) descreve signo como qualquer coisa que conduz a alguma coisa - no caso, como a interpretação dessa alguma coisa - a referir-se a um objeto ao qual ela mesma se refere, no caso, o objeto da interpretação, de modo idêntico, transformando a interpretação, em signo, “e assim, sucessivamente *ad infinitum”* (303, p.74).

5. Interpretantes ou interpretações: Um conceito fundamental na Semiótica

A noção de interpretação que consideramos aqui é o conceito de interpretante encontrado na T*eoria geral dos signos*, estruturada nos trabalhos deixados por Charles Sanders Peirce (2010). Nessa teoria encontramos categorias relacionadas a três tipos de interpretação que são como *níveis* de interpretação a serem atribuídos a um signo. Assim, temos: a interpretação imediata; a dinâmica; e a final.

Segundo Santaella (1995), no nível da interpretação chamada de *imediata*, cada signo deve ter sua interpretabilidade peculiar, antes que ele alcance qualquer intérprete. É um nível abstrato, que consiste numa possibilidade. O caráter da interpretação imediata está no fato de estar isento de mediação e análise.

A *interpretação dinâmica* deriva seu caráter da categoria da ação. O significado de qualquer signo sobre alguém consiste no modo como esse alguém reage ao signo. Pode-se dizer também que a *interpretação dinâmica* é uma "determinação de um campo de representação exterior ao signo" (SANTAELLA, 1995, p.98). Assim, pode ser chamado de significado do signo *in concreto*, isto é, o fato empírico de apreensão do signo é uma realização particular do significado. Também é considerada a única interpretação que funciona diretamente num processo comunicativo.

A *interpretação final* está em um nível abstrato mais elaborado. A interpretação final é o efeito que o signo produziria em uma mente em circunstâncias que deveriam permitir que ele exteriorizasse seu efeito pleno, é o resultado interpretativo ao qual todo intérprete está destinado a chegar *se* o signo for suficientemente considerado.

A interpretação final é o efeito último do signo, na medida em que ele é intencionado ou destinado pelo caráter do signo, sendo mais ou menos de uma natureza habitual e formal. É preciso esclarecer que embora a palavra final pareça um limite ideal, mas é um limite inatingível, para o qual as interpretações dinâmicas tendem. A interpretação final é uma interpretação *in abstracto*.

Não devemos compreender os níveis de interpretação de maneira estática, há uma linha tênue entre esses níveis e só é possível compreender um relacionando-o ao outro. As interpretações dos signos, quer dizer, são elas mesmas membros de uma série infinita na qual cada interpretação é um signo de algum objeto para uma interpretação ulterior, "toda interpretação é um signo e todo signo é uma interpretação de um objeto" (SANTAELLA, 1995, p.88). E, objeto-signo-interpretação são todos de natureza sígnica.

6. Construção de variações e repetições da ideia de Zenão

Buscando refletir sobre uma ação efetiva e formas que representem o paradoxo de Zenão para construirmos abordagens complementares e buscarmos despertar realidade e imaginação, enveredaremos por uma aventura na construção de problemas usando noções intrínsecas ao paradoxo de Zenão, que envolvam ação e percepção, tomando como base o pensamento recursivo à divisão de um objeto matemático sempre reduzido a metade. *Problema 1*: tomemos uma superfície retangular B e dividamos por dois. Teremos a superfície A, (*figura 1*)[5], e novamente dividamos à metade, e repitamos o processo indefinidamente. Qual a soma dessas áreas divididas à metade?

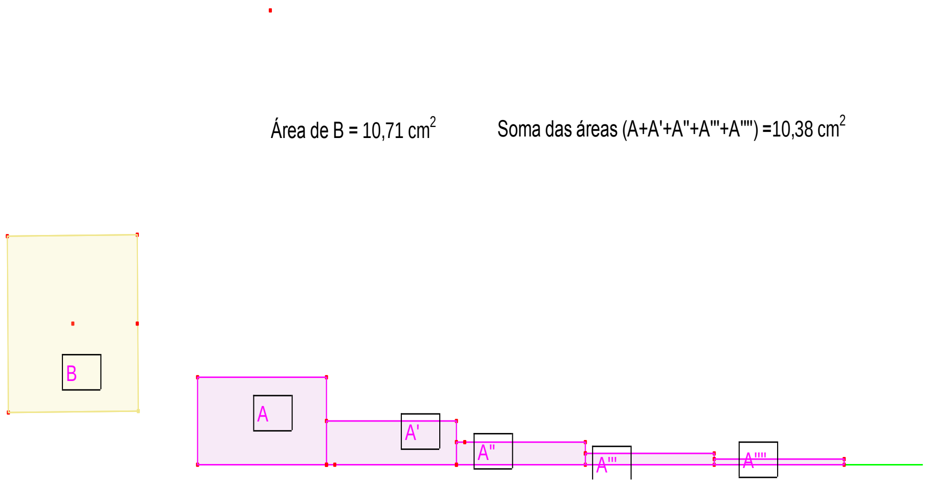

Figura 1

Intuitivamente podemos aceitar ou *mostrar* que a junção dos *pedaços lilás* de área são junções de *pedaços* do objeto que chamamos *B*. Portanto, por mais que subdividamos, perceberemos que, *no máximo*, a área da figura lilás é equivalente à área da figura *amarela*. Teríamos no limite da soma, a *área do objeto lilás* tendendo à *área do retângulo amarelo*. Esse infinito implícito à compreensão dessa soma foi denominado por Aristóteles do *infinito atual*, ou seja, o infinito como uma totalidade completa.

Outra interpretação diante da mesma configuração sugere a abordagem do *Problema 2*: Podemos observar a *figura 1* que ilustra o problema acima e perguntarmos: e se analisarmos o contorno das duas figuras, a que conclusão poderíamos chegar? (*figura 2*)

[5] As figuras apresentadas nesse trabalho foram construídas no software de Cabri II Plus, versão 1.4.3.

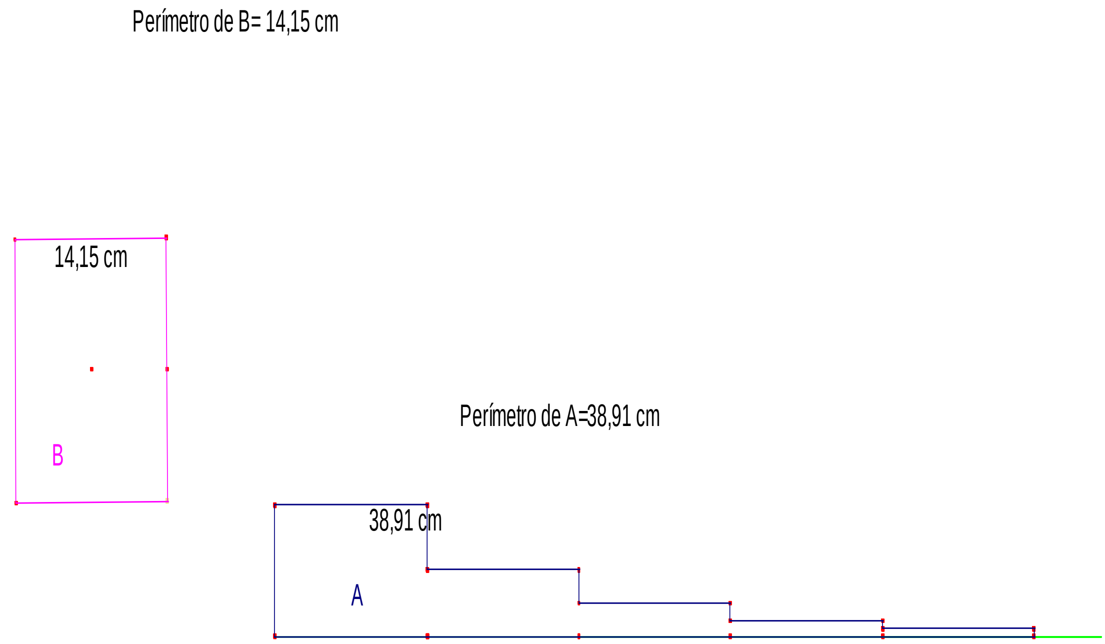

Figura 2

Observamos que diante de uma mesma representação, diferentes conceitos podem ser observados e investigados. Nesse problema temos a noção de infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final, também denominado de *infinito potencial*.

Problema 3: Considerando esse mesmo problema anterior, o *problema 2*, em que o perímetro tende ao infinito, e colocando-o em um contexto significativo, por exemplo: Se a superfície quadrilátera do *problema 2* fosse uma obra pictórica, construída em pedaços, seria possível percorrer toda parede de uma sala retangular com perímetro conhecido, subdividindo essa obra, sempre em sua metade? Quais seriam as dimensões das telas com menor altura?

Problema 4: Como representar o conjunto dos polígonos cuja metade não existe?

Problema 5: Se as subdivisões dos problemas anteriores fossem colocadas em um software de geometria e aritmética, qual seria a *lógica* na construção do problema?

7. Resultados parciais

Ao se pensar em versões repetidas e ao mesmo tempo variadas de um paradoxo percebemos que se admite uma infinidade de interpretações e representações. Também são admitidas explorações dos conceitos envolvidos na elaboração das interpretações que possam alimentar a compreensão construtiva desses signos/objetos. A cada interpretação dada precisamos estimular ações para que os níveis mais elaborados, concretos e abstratos sejam vislumbrados e assim, em alguns momentos atingidos.

Mesmo tomando como referência as poucas interpretações dos problemas apresentados aqui nesse trabalho, poderíamos sugerir a busca dos padrões numéricos representados, ou propor que os estudantes envolvidos na questão explorem outros padrões possíveis, também explorar aumento ou diminuição das unidades em diferentes situações, limites e aproximações em diferentes contextos, etc. Mas, o mais importante para os propósitos desse trabalho é a proposta da construção de outras variações do problema, construídas por estudantes em diferentes níveis, estimulando a reflexão e conduzindo a *ação criativa*. Para Otte (p.47, 1993), “todo ato criativo portanto, consiste em ver um *A* como um *B*, um martelo como parte de um pêndulo, um movimento como uma função matemática, uma força como um vetor ou justamente a imagem de um cachimbo como um cachimbo”. Poderíamos dizer também que um ato criativo pode estabelecer um trânsito entre uma *interpretação in concreto* e uma interpretação *in abstrato*, não necessariamente nessa ordem.

Enfatizamos a possibilidade de exploração do paradoxo de Zenão construindo variações, em torno da repetição das ideias implícitas ao problema, em uma atitude complementarista, e também as explorando na atividade. E, por atividade, não se entenda apenas atividade individual, mas também a prática social, explorando interpretações construídas a partir de uma realidade histórica e social.

Ao destacar a importância da complementaridade entre diferentes interpretações em torno de uma mesma ideia, apresento um texto esclarecedor em que Otte comenta sobre os aspectos complementares, na construção do conhecimento, citando Gregory Bateson (1972) e destaca.

> Toda vez que nos orgulhamos de ter encontrado uma nova forma rigorosa de pensamento ou de apresentação, ou toda vez que começamos a enfatizar bastante o "operacionalismo", a lógica simbólica ou qualquer desses irrecusáveis sistemas de direcionamento, perdemos um pouco da capacidade de pensar novos pensamentos. E, naturalmente toda vez que nos armamos contra o rigorismo estéril do pensamento e apresentação formais e deixamos nossos pensamentos correrem livres, perdemos igualmente. No meu ponto de vista, os progressos do pensamento científico nascem da ligação de um pensamento rigoroso com um pensamento livre, e esta combinação é a ferramenta mais valiosa da ciência (BATESON apud OTTE, 1993, p.236).

Assim, salientamos ainda, a importância da complementaridade entre interpretações de um problema que admita conexões e diferenciações entre um pensamento rigoroso e um pensamento livre, tendo como finalidade a elaboração de uma compreensão construtiva dos objetos da matemática.

8. Referências

BATESON, G. **Steps to an ecology of mind**. New York: Ballantine Books, 1972.

BORGES, J. L. **O aleph**. Tradução Davi Arrigucci Jr. Companhia das Letras. São Paulo. 2008.

BORGES, J. L. **O livro de areia**. Tradução Davi Arrigucci Jr. Companhia das Letras. São Paulo. 2009.

CARROLL, L. **What the tortoise Said to Achilles**. Mind, N. S. vol. 4, p.278; 1905.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. São Paulo, SP: Martim Claret, 2001.

OTTE, M. **O Formal, o social e o subjetivo**: uma introdução à filosofia e à didática da matemática. Tradução Raul Fernando Neto. São Paulo, SP, Unesp, 1993.

OTTE, M. **Complementarity, sets and numbers**. Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 2003.

OTTE, M. **A Realidade das Ideias**: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá, MT, EdUFMT, 2012.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução José Teixeira Coelho Neto - 4 ed. – São Paulo – Perspectiva, 2010.

RUSSELL, B. A. W. **Nosso conhecimento do mundo exterior**: estabelecimento de um campo para estudos sobre o método científico em filosofia; trad. De R. Haddock Lobo.São Paulo, Editora Nacional, 1966.

RYLE, G. **Dilemas**. Tradução Álvaro Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

SANTAELLA, L. **A teoria Geral dos signos**: semiose e autogeração. São Paulo, SP: Ática, 1995.

VYGOSTKY, L.S. *et al*. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Ícone. São Paulo. 1988.

WERTHEIMER, M. **Productive thinking**. New York: Harper. 1945.