

TRABALHANDO GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO, POR MEIO DE PRÁTICAS INVESTIGATIVAS.

Taís Gonçalves Gadoni
PUC Minas
taisgadoni@gmail.com

Resumo:

Este minicurso busca evidenciar como a Geometria Fractal pode ser introduzida nas aulas de Matemática do Ensino Médio. Para isso, foi realizada uma *pesquisa bibliográfica*, no intuito de identificar como a Geometria Fractal pode se entrelaçar à investigação matemática, a fim de subsidiarem o trabalho do professor de Matemática, na introdução dos conceitos básicos dos fractais. Busca-se, ao longo desta prática, apresentar uma sequência de atividades de ensino, que possam orientar o professor na abordagem desse tópico matemático, na sua sala de aula. Por meio da revisão de literatura, contemplada neste estudo, constata-se que as figuras fractais podem ser geradas a partir da iteração de figuras conhecidas (euclidianas ou não-euclidianas), possibilitando, ao aluno, apreender conceitos básicos sobre Geometria Fractal, a partir de conhecimentos matemáticos trabalhados na escola básica, uma vez que questões envolvendo estes conceitos passaram a ser trabalhados em alguns livros didáticos e questões de vestibulares.

Palavras-chave: Práticas Investigativas; Geometria Fractal; Cartão-Fractal.

1. Introdução

A proposta deste minicurso busca direcionar educadores a evidenciar como a Geometria Fractal pode ser introduzida nas aulas de Matemática do Ensino Médio por meio de Práticas Investigativas.

Por meio de uma revisão de literatura, identificou-se como a Geometria Fractal pode se integrar à investigação matemática, a fim de subsidiarem o trabalho do professor de Matemática, na introdução dos conceitos básicos dos fractais organizando uma sequência de atividades de ensino.

Nesta revisão constatou-se que podem ser associados os conceitos de Geometria Fractal, suas aplicações e características, a elementos matemáticos – simetrias, semelhanças, razões e proporções e, ainda, a discussão de estratégias de cálculo de perímetro, área e volume – trabalhados na escola básica. Para isso, foram propostas atividades de ensino, que permitem aos alunos reconhecer figuras fractais, geradas a partir

da iteração de figuras conhecidas (euclidianas ou não-euclidianas), além de possibilitá-los a identificar padrões de regularidades nessas figuras.

Constatou-se, ainda na revisão bibliográfica, que investigar é descobrir relações matemáticas, em objetos conhecidos ou desconhecidos; que a prática investigativa, nas aulas de Matemática, favorece especulações científicas em diferentes maneiras de resolução de um mesmo problema; que a “experimentação”, em um contexto investigativo, direciona os esforços dos alunos aos conceitos e definições matemáticas que, neste momento, são fundamentais para a compreensão da Matemática, como ciência presente no cotidiano desses sujeitos.

Assim, a Geometria Fractal combinada à investigação matemática, focos desta prática, possibilita uma metodologia de ensino diferente da convencional, que pode propiciar aos alunos, autonomia nas aulas de Matemática, estimulando-os a construir o próprio conhecimento.

Espera-se, com este minicurso, oportunizar aos educadores, docentes, licenciados e interessados por esta temática, explorar este tópico matemático, observando as práticas investigativas, entendendo essa proposta de ensino como diferenciada e desafiadora. A realização deste trabalho contribuiu, e pode contribuir mais ainda, para o desenvolvimento da nossa capacidade, como educadores, ao interessar-nos por práticas pedagógicas que primam por um ensino-aprendizagem mais significativo, construtivo e prazeroso.

2. Caminhos metodológicos de direcionamento à fundamentação teórica

Os pressupostos teóricos que fundamentaram esta pesquisa para o anteprojeto do minicurso foi uma *revisão bibliográfica*. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), este tipo de pesquisa é conhecida também como *estudo documental*, pois é realizado através de uma documentação escrita e sua coleta de informações baseia-se em fichamento de leituras, a fim de organizar os registros relativos às informações.

As escolhas das fontes bibliográficas, utilizadas na pesquisa, foram direcionadas, inicialmente pelo levantamento bibliográfico que exploravam os conceitos básicos de fractal pela confecção do Cartão-Fractal. A pesquisa supracitada contou com direcionamentos baseados no artigo “*Fractais: Matemática e Magia*” da Doutora Elenice Lodron Zuim, dentre outros autores.

Outras referências foram indicadas por professores de graduação, a fim de definir e explorar metodologias de pesquisa e assuntos relacionados à investigação matemática, tais

como: PONTE, BROCARD e OLIVEIRA (2005); e, PORFÍRIO e OLIVEIRA (1999). Estes autores caracterizam a investigação matemática, a fim de proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o trabalho que vão desenvolvendo. Isto os leva a adquirir experiência na resolução de problemas, que sejam desafiadores e apresentam estratégias simples de resolução dos mesmos.

A partir deste trabalho e, também, por meio de pesquisas na *internet*, chegou-se em outros estudos, como, em especial, da professora Mestra Arlete Aparecida Oliveira Almeida (2006). Esta autora fez um estudo sobre os fractais na formação de docentes, e sua prática em sala de aula visou “*proporcionar uma nova aventura, para tornar mais próxima a geometria da realidade do aluno, promovendo uma identificação real com a natureza e a geometria*”. (ALMEIDA, 2006, p.9).

Por meio destes autores e seus respectivos artigos e pesquisas, foi possível chegar a outras referências, que também vieram subsidiar o desdobramento deste texto, tornando possível a realização desta proposta de atividades para o minicurso que direciona a exploração de Geometria Fractal, na aula de Matemática, por meio de práticas investigativas.

3. A Geometria Fractal

O estudo das formas, parte integrante da Geometria, aplica conceitos de regularidades de Euclides, estruturando uma pluralidade de relações com a natureza, já que as construções do homem tornam-se facilmente perceptíveis aos contornos regulares da Geometria de Euclides. Entretanto, as formas encontradas na natureza muitas vezes não se associam às figuras euclidianas. Na busca por analisar tais formas, é apresentada a Geometria Fractal, uma vez que Mandelbrot (1998, p. 96) indaga: “*Há alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou da sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, troncos de árvores não são hexágonos e rios não desenham espirais.*”.

Segundo Barbosa (2002), o Fractal (do latim fractus = quebrado, partido, irregular) possibilita o estudo de formas fragmentadas, rugosas, porosas, ou seja, não regulares. Embasados nesse conceito que envolve formas complexas presentes na natureza, não arranjadas pelo homem em suas múltiplas formas euclidianas, os fractais nos levam ao estudo, das irregularidades, importante para a compreensão das várias formas do conhecimento.

A partir da interação sujeito/objeto, as formas que definem a natureza podem ser apresentadas aos alunos de maneira a investigar a semelhança presente no fractal como nos mostra Zuin, R. (2000, p.63): “[...] *Na natureza podemos observar uma característica auto-similar, onde a cada nível de ampliação considerado, observamos uma imagem semelhante a posterior a ampliação.*”. Dessa forma, então, caracteriza-se o fractal com:

a auto-similaridade resultante de usar-se a mesma regra repetidas vezes. Quando uma pequena parte de um fractal é similar ao todo, dizemos que ele é auto-semelhante. Um objeto auto-semelhante geralmente é um fractal, mas nem todos os fractais são auto-semelhantes. [...] As principais características de um fractal são a auto-semelhança e a complexidade infinita que permitem ampliá-lo infinitamente obtendo sempre uma cópia dele mesmo no seu interior. (ALMEIDA, 2006, p.47-48).

4. A prática investigativa na sala de aula

Ao organizar atividades de ensino trabalhando com material concreto, argumentações e conjecturas fractais, busca-se permitir que o aluno, ao realizá-las como uma prática investigativa, possa “*descobrir relações entre objetos matemáticos, conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar propriedades e padrões de regularidades.*” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p.13).

Uma atividade investigativa, em sala de aula, envolvendo Geometria Fractal, pode proporcionar a aprendizagem de novos conhecimentos, baseada em aspectos característicos de uma investigação: “[...] *descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões, espírito crítico [...]. O conceito de investigação relaciona-se com a atividade que os matemáticos profissionais desenvolvem ao produzirem conhecimento.*” (PORFÍRIO; OLIVEIRA, 1999, p.1).

“*Uma investigação matemática começa com uma situação que precisa ser compreendida ou um conjunto de dados que precisa ser organizado e explicado em termos matemáticos.*” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p.2). Num segundo momento de investigação, em conformidade com os autores, as conjecturas podem surgir de diferentes formas, ao se observar diretamente os dados da situação, na manipulação desses dados ou por analogia com outras conjecturas elaboradas.

O Cartão-fractal pode ser uma metodologia de construção dos conceitos básicos da Geometria Fractal, através da exploração do material concreto. Explorando e instigando-o os alunos poderão elaborar suas próprias conjecturas e realizar testes, que é o terceiro momento da investigação, a fim de validá-las ou não. Se a conjectura falhar, ou for dada como falsa, pode ser invalidada, ou ser reformulada para que se prove sua veracidade.

O último momento, citado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), é a justificação e a avaliação do trabalho realizado. A justificação é um processo extremamente importante em uma investigação matemática. Esses autores afirmam que é importante entender o “*caráter provisório*” das conjecturas, percebendo que mesmo após diversos testes, é a justificação ou a demonstração de uma conjectura que a torna uma verdade matemática.

Para finalizar uma atividade investigativa, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), ressaltam o quão importante é fazer uma reflexão sobre os resultados obtidos, pois isto possibilita perceber melhor o que se foi alcançado, observar se os procedimentos utilizados foram ou não adequados e formular novas questões.

Um ponto que também deve ser destacado é o papel do professor durante as investigações dos alunos, orientando-os e direcionando-os para que a atividade não perca seu foco.

Nas descobertas e explorações da Geometria Fractal, o papel do professor será, desse modo, direcionar as investigações matemáticas, a gerar conjecturas relacionadas a elementos matemáticos, presentes em Figuras Fractais. Além de compreender e dar continuidade às estratégias dos alunos, com uma postura interrogativa, uma vez que não há como prever todos os possíveis caminhos e resultados que irão aparecer durante a investigação. Desta forma, os alunos *entenderão “que o papel principal do professor é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo.”* (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2005, p. 52).

5. Estratégias e destinação do trabalho com fractais em sala de aula

Este minicurso articula-se por uma abordagem de revisão de literatura, que possibilitou relacionar a Geometria Fractal com a investigação matemática, objetivando a elaboração de uma proposta de atividades para que o educador matemático realize práticas investigativas em suas aulas no Ensino Médio, favorecendo a exploração e por consequência a finalidade de cumprir os objetivos de reconhecimento de um fractal.

Elas foram pensadas para serem desenvolvidas no Ensino Médio, por ser o segmento em que o currículo matemático desenvolve conhecimentos importantes e básicos para o entendimento do conceito de fractal, e, também, da Geometria Euclidiana; além da noção de infinidade propiciada pelas progressões geométricas.

É no Ensino Médio, ainda, que os alunos possuem competências e habilidades, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, para “*desenvolver a capacidade de*

questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.” (MAIA, 2010, p.12).

6. Descrição das atividades apresentadas no minicurso

As orientações ministradas no minicurso sobre as atividades de ensino a serem propostas aos alunos serão detalhadas a seguir.

1º Momento - Deve-se explorar o conceito de fractal, através da confecção do Cartão-fractal, por meio de atividades com o cartão “Cubos Contrários”, propostos por Diego Uribe (1998) e escolhidos por possuírem características diferenciadas para se trabalhar a teoria sobre fractais. Para a construção são necessários: folha de ofício, régua, tesoura e manuseios em dobraduras.

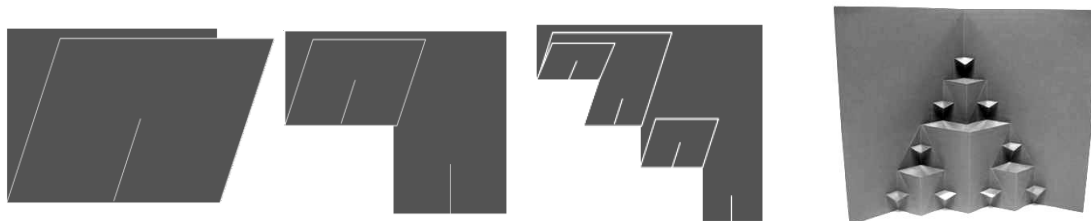


FIGURA 1: Iterações da confecção do Cartão-Fractal “Cubos contrários”

Através da identificação de padrões de regularidades, no material concreto produzido, pode-se direcionar aos educandos a criar conjecturas sobre os elementos matemáticos presentes neste cartão, a fim de testá-las e demonstrá-las.

2º Momento - Propõe-se apresentar formas não definidas pela Geometria Euclidiana, presentes na natureza e na realidade cotidiana dos alunos e, também, Figuras Fractais que são geradas a partir da iteração de figuras euclidianas, tais como: o “Triângulo e o Tapete de Sierpinski” e o “Floco de Neve de Koch”.

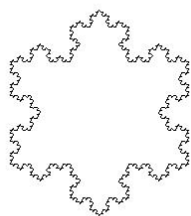


FIGURA 2: Floco de Neve de Koch

FONTE: http://www.ime.usp.br/~jose/mac122/ep2/ed031_koch4.jpeg

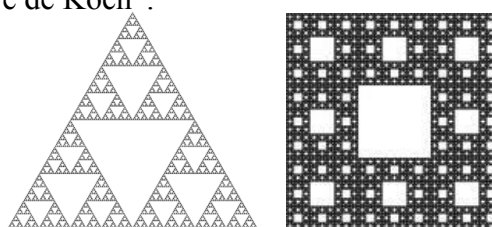


FIGURA 3: Triângulo e Tapete de Sierpinski

FONTE: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/Sierpinski_Carpet_6.png

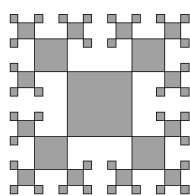
3º Momento - Retoma-se as ideias do processo investigativo desenvolvendo conjecturas a serem testadas tanto no trabalho com o Cartão-fractal, quanto nas Figuras-Fractais, interligando os elementos matemáticos a serem explorados, tais como: simetrias,

semelhanças, razões e proporções, além de possibilitar o cálculo de perímetros, áreas e volumes.

QUESTÕES PROPOSTAS PARA A PRÁTICA INVESTIGATIVA NO MINICURSO

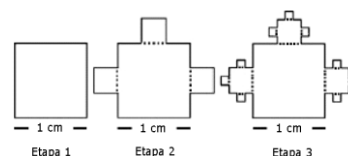
- ✓ Tomando por base a figura fractal, conhecida por “Floco de Neve de Koch”, demonstre sua **auto-semelhança** (pequenas cópias de si mesmo).
- ✓ É possível afirmar que a Figura Fractal “Floco de Neve de Koch” possui **simetria**?
- ✓ É possível calcular o **perímetro** de uma figura infinita? Tome por base o fractal “Floco de Neve de Koch” e tente encontrar uma solução.
- ✓ É possível calcular a **área** de uma figura infinita? Tome por base o fractal “Floco de Neve de Koch” e tente encontrar uma solução.
- ✓ É possível calcular o **volume** de uma figura fractal tridimensional? Tome por base o Cartão-fractal confeccionado.

- ✓ (UFRJ) A figura seguinte é construída da seguinte maneira:



1. Constrói-se um quadrado central de 2 cm de lado.
 2. Em cada vértice do quadrado central acrescentam-se quadrados de 1 cm de lado.
 3. Em cada vértice livre dos quadrados, constroem-se quadrados de $\frac{1}{2}$ cm de lado.
- E assim, sucessivamente, em cada estágio, constroem-se quadrados de lados iguais a metade do lado do quadrado construído no estágio anterior.
- Supondo que esta sequência continue indefinidamente, qual a área dos infinitos quadrados?

- ✓ (UFRJ) A região fractal F, construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados gerados por iterações sucessivas em diversas etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (L) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lados . As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir. Calcule a área de F.



- ✓ (CESGRANRIO) A figura abaixo mostra uma sequência de triângulos de Sierpinski. O processo começa no nível zero, com um triângulo equilátero de área 1. Em cada passo a seguir, cada triângulo equilátero é dividido através dos segmentos que ligam os pontos médios dos seus lados e é eliminado o triângulo central assim formado. Calcule a área que resta no nível n (indicada nas figuras pela parte hachurada).



Tabela1: Questões propostas para a prática investigativa no minicurso

4º Momento – Compreende-se de uma discussão entre os envolvidos, ressaltando pontos positivos e negativos em relação ao nível de aprendizagem, através da atividade realizada permitindo uma reflexão sobre os resultados obtidos. Este momento possibilitará aos educadores que participarão do minicurso perceber melhor o que se foi alcançado, discutir novas ideias e abordagens, observar se os procedimentos utilizados foram ou não adequados e formular novas questões e propostas que dinamize o grupo a favor da atividade apresentada.

7. Considerações Finais

Dentro de toda a perspectiva apresentada, objetiva-se que a atividade investigativa proposta em sala de aula, neste minicurso, seja eficiente para abordar a Geometria Fractal

como uma metodologia de ensino diferente da convencional. E, também, propiciar aos alunos autonomia nas aulas de Matemática, estimulando-os a construir o próprio conhecimento.

Espera-se, com este minicurso, oportunizar aos educadores, docentes, licenciados e interessados por esta temática, explorar este tópico matemático, observando as práticas investigativas, entendendo essa proposta de ensino como diferenciada e desafiadora. A realização deste trabalho contribuiu, e pode contribuir mais ainda, para o desenvolvimento da nossa capacidade, como educadores, ao interessar-nos por práticas pedagógicas que primam por um ensino-aprendizagem mais significativo, construtivo e prazeroso.

8. Referências

ALMEIDA, Arlete Aparecida Oliveira. **Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula.** São Paulo. PUC/SP, 2006. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/arlete_almeida.pdf>. Acesso em: 20 de maio 2010.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a geometria fractal:** para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MAIA, Eny Maris. (Coord.) **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. 2010. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em: 25 maio 2010.

MANDELBROT, Benoît. **Objetos fractais.** Lisboa: Gradiva, 1998.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PORFÍRIO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Uma reflexão em torno das tarefas de investigação.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/p_111-118.PDF> Acesso em: 10 out. 2009

URIBE, Diego. **Fractal cuts: exploring the magic of fractals with pop-up designs.** Diss, England: Tarquin, 1998.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Fractais: matemática e magia.** Extensão: Cadernos da Pró-reitoria de Extensão da Puc Minas, Belo Horizonte, v.10, n. 31-32, p. 27-36, abr./ago. 2000.

ZUIN, Romanelli Lodron. **O que é dimensão fractal.** Extensão: Cadernos da Pró-reitoria de Extensão da Puc Minas, Belo Horizonte, v. 10, n. 31 e 32, p. 63-70, abr./ago.2000.