CONSTRUINDO CONJECTURAS: UM OLHAR SOBRE O ENSINO COM A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Vanessa Priscila Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa
gomesvanessa@outlook.com

Cristina Girotto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa
cristina.girotto@hotmail.com

Marisa do Carmo Pacoff da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa
mpacoff@bol.com.br

Lucilaine Goin Abitante
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa
lucilaine@sr.iffarroupilha.edu.br

Resumo:
O presente artigo visa relatar uma experiência educativa realizada, que teve como objetivo observar e analisar o processo de ensino-aprendizagem da matemática utilizando a metodologia da investigação matemática. Esta pesquisa prática foi desenvolvida com seis alunos da 7ª série do Ensino Fundamental, de escola pública, divididos em trios. O conteúdo matemático escolhido foi “ângulos internos de polígonos convexos” com o objetivo de verificar a regularidade da soma das medidas dos ângulos internos, construindo uma relação matemática e formulando uma conjectura que poderá ser utilizada para qualquer polígono convexo. Para tanto, esta pesquisa procurou analisar sobre a seguinte problematização: “O número de lados influencia no número de ângulos internos de cada um dos polígonos convexos?”; “Como podemos determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo?”; “Existe alguma regularidade entre a soma dos ângulos internos destes?”. Por fim, os alunos conseguiram relacionar estas regularidades matematicamente, utilizando-se da linguagem matemática.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Metodologia; Ensino-aprendizagem; Ângulos.

1. Introdução

Por meio das leituras realizadas na disciplina de metodologia do Ensino da matemática I do curso de Matemática - Licenciatura se percebeu uma nova perspectiva na educação no que tange a metodologias alternativas para o ensino da matemática, com o intuito de sair da metodologia tradicional de ensino, que quando utilizada exclusivamente, não consegue obter interesse por parte do aluno.

Para tanto, o referencial teórico utilizado na primeira parte da pesquisa oportunizou conhecer o que realmente é investigação matemática, quais os processos da investigação matemática, como acontece uma aula de investigação matemática tanto para professor como para aluno, como se dão as investigações geométricas e sua avaliação. Para isto, recorremos a alguns autores como: Hélia Oliveira; Helle Alrø; Joana Brocardo; João Pedro da Ponte; José Nicolau Pompeo; Luiz Roberto Dante; Ole Skovsmose; Osvaldo Dolce.

Após o estudo teórico e o planejamento da atividade prática supervisionada, consistiu-se a sua aplicação com seis alunos do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal, da rede pública, localizada em Santa Rosa - Região Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Esta prática consistiu em desenvolver uma experiência educativa num espaço não formal, com alguns alunos voluntários. Para o melhor desenvolvimento da atividade de pesquisa e análise das informações, separamos os alunos em dois grupos, que serão chamados de Grupo 1 e Grupo 2, em cada grupo composto por três alunos, nomeados por: Grupo 1 - Aluno A_1, Aluno B_1, Aluno C_1; e Grupo 2 - Aluno A_2, Aluno B_2, Aluno C_2.

Foram realizados dois encontros de modo que os alunos fossem instigados a construir, no primeiro momento, uma conjectura que relacionasse a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, e num segundo momento, com a conjectura que relacionasse polígonos convexos e a soma de seus ângulos internos.

Assim, esta pesquisa a campo nos trouxe riqueza de informações, permitindo com que façamos uma relação produtiva entre teoria e prática, nos permitindo refletir a cerca do uso desta metodologia de ensino da matemática. Além de buscar o contato entre os licenciandos com a realidade escolar, com o intuito de conhecer como ocorre a teoria no âmbito escolar, realizando uma prática sobre a soma dos ângulos internos de polígonos convexos.

2. Proposta da pesquisa

Quando trabalhamos com a Investigação Matemática buscamos conhecer o desconhecido, ou seja, “investigar é procurar conhecer o que não se sabe” (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2005, p. 13),

Assim, nosso planejamento foi elaborado sobre o conteúdo de soma dos ângulos internos de polígonos convexos, e a intenção era de que os alunos construíssem uma relação que pudesse servir para encontrar a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo, considerando o número de lados e o número de triângulos.

Elaboramos um planejamento que torna o aluno um pouco mais independente, podendo construir as conjecturas, conforme o trabalho da metodologia de investigação matemática.

O professor neste momento torna-se um instigador, fazendo o aluno pensar e refletir sobre as situações. Como relatam Ponte, Brocardo & Oliveira (2005, p. 26) é preciso "garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade", assim podendo realizar a atividade proposta e formular conjecturas de forma mais autônoma.

Assim sendo, o objetivo principal deste trabalho, consiste em: conhecer a metodologia de Investigação Matemática, desenvolvendo atividades relacionadas a soma dos ângulos internos de polígonos convexos e instigando os alunos a construção de conjecturas.

3. Investigação Matemática

O termo investigação nos remete a atividades que envolvem a procura de informações, e equivale a pesquisar, inquerir. Assim a investigação matemática parte de uma determinada situação ou problema, ou como diz Ponte, Brocardo & Oliveira (2005, p. 16), "uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas".

Sob a ótica da investigação, a matemática mostra sua face nem sempre notada e valorizada, pois neste momento ela pode ser construída, pode ser experimentada proporcionando ao investigador descobertas imprevistas. Para Ponte, Brocardo & Oliveira (2005, p. 15), "[...] essa perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva [...]".

São estas características da investigação matemática que a transformam em poderoso instrumento para a construção do conhecimento, e que tem incentivado os professores a investirem nas aulas de investigação em vista dos ótimos resultados apresentados pelos alunos, mudando sua forma de encarar a matemática e a vida. Daí a utilidade da investigação na compreensão do mundo e sua intervenção sobre ele, pois estimula nos alunos a atitude investigativa e privilegia uma postura interrogativa.

4. Soma dos ângulos internos de polígonos convexos

Para desenvolver a aula de Investigação Matemática, trabalhamos com o estudo dos ângulos internos de polígonos convexos.

Dolce e Pompeo (1993, p. 132) definem polígonos como:

> uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, … A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde 3 pontos consecutivos não são colineares, considerando consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2 chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, … , $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Assim, há duas classes de polígonos, os convexos e os côncavos. “O polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n – 2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina” (Dolce & Pompeo, 1993, p. 134).

Dante (2010, p. 166) define que “em todo o triângulo a soma da medida dos três ângulos internos é 180°”, partindo deste princípio estudaremos todos os outros polígonos convexos.

Dolce e Pompeo (1993, p. 137 e 138) nos explicam que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, onde $n \geq 3$, é dada por $Si = (n - 2).180°$. Para tanto, encontramos $(n - 2)$ como sendo o número de triângulos criados por todas as diagonais possíveis, partindo de um único vértice. Para melhor esclarecimento Dolce e Pompeo (1993, p. 137 e 138) ainda complementam afirmando que “o polígono fica dividido em $(n - 2)$ triângulos”.

5. A Prática

A prática foi elaborada, levando em conta quatro momentos, que abrangem:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (Ponte, Brocardo & Oliveira 2005, p. 20)

Por isso, o objetivo do primeiro encontro era construir uma conjectura que relacionasse a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Para isto, seria entregue a cada grupo uma ficha de registros e solicitado que desenhassem três triângulos quaisquer, que identificassem seus vértices e medissem seus ângulos internos com um transferidor. A atividade seguiria com a anotação das medições em uma tabela para melhor visualização dos resultados por parte dos alunos. Após seria solicitado que cada grupo analisasse as respostas encontradas e tentasse encontrar uma relação entre a soma dos ângulos internos dos três triângulos, tentando criar uma conjectura para a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

No segundo encontro o objetivo seria elaborar uma conjectura relacionando polígonos convexos e a soma de seus ângulos internos. Desta forma, seria entregue a cada grupo uma nova folha de registros para dar continuidade ao trabalho anterior, sendo solicitado que cada grupo desenhasse um triângulo, um quadrado, um pentágono e um hexágono, que identificassem os vértices de cada polígono e medissem seus ângulos internos com um transferidor. Após, em cada figura, que escolhessem um vértice e traçassem todas as diagonais possíveis, preenchendo duas tabelas com os dados obtidos, as quais relacionavam o número de lados do polígono com o número de triângulos formados pelas diagonais e com a soma dos ângulos internos, objetivando conjecturar, uma fórmula geral, para resumir as conclusões de cada grupo.

6. O primeiro encontro

Inicialmente cada grupo desenhou três triângulos, nomeando seus vértices e medindo seus ângulos internos, tarefa esta que necessitou de orientação para a manipulação dos instrumentos de medição, que segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) são fundamentais na realização das investigações, tendo-se em vista que o aluno passa a ser sujeito do seu próprio aprendizado.

Após esta tarefa, foi solicitado a transcrição das medições para uma tabela partindo então para a análise dos resultados e possíveis relações entre eles. Neste momento, percebemos que alguns alunos já apropriavam-se da ideia de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, pois fizeram o seguinte comentário: “A+B+C dá o resultado 180°”, mas questionando-os, não sabiam justificar. No entanto, com o desenvolvimento do trabalho eles puseram este conceito à prova e verificaram na prática se ele realmente procede e por que. A seguir ilustração do resultado da análise de um grupo.

Analisando as respostas encontradas, qual a relação que você encontra sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo? Qual a conclusão que você pode tirar?

Que a soma dos triângulos da 180°,

Discuta com o seu colega e crie uma fórmula para a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer...

Ângulo Â + ângulo B e + ângulo C é igual a 180°. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$

Figura1: Registro do Grupo 1

Percebe-se na reposta, a clareza quanto ao conceito matemático resultante do desenvolvimento da atividade, mas, no entanto, há certa dificuldade na utilização da linguagem matemática, sendo escrito por extenso as conjecturas formadas. Esta observação nos remete aos autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) que defendem que a Investigação Matemática contribui para a melhoria gradativa desta apropriação da linguagem matemática à medida que se torna frequente, com reflexos até mesmo na vida em sociedade.

Refletindo então sobre este primeiro momento, sentimos os alunos meio que dependentes, esperando aprovação para suas conjecturas e mostrando-se inseguros nas suas afirmações, atitude esta fruto do sistema educacional baseado na metodologia tradicional expositiva, onde o professor é detentor do saber e “transmite” o conhecimento ao aluno.

Sob este olhar, percebemos que a tarefa do professor como um orientador do processo não é fácil, pois ele tem que saber conduzir a pesquisa sem intervir demasiadamente nela sob o risco de dar “respostas prontas”, daí a importância de sua postura questionadora, instigadora. Skovsmose (2008, p. 17) exemplifica algumas falas que poderão auxiliar o professor no desenvolvimento do trabalho em sala, tais como: “o que acontece se...?”; “qual será...?”; “Por que não...?”; “Será que...?”; “Por que isto...”; “Vocês acham?”. Por isso, é fundamental não confundir esta atitude questionadora do professor como um jogo de perguntas ou respostas, que segundo Alrø e Skovsmose (2006, p. 139) podem suscitar respostas mecânicas e repetitivas que não necessariamente vieram de uma reflexão sobre o conteúdo da questão. Aqui nos deparamos com o grande desafio da educação, ensinar sem transmitir.

7. O segundo encontro

No segundo encontro foi solicitado que cada grupo desenhasse um triângulo, um quadrado, um pentágono e um hexágono, que nomeasse seus vértices, medisse seus ângulos internos, e traçasse todas as diagonais possíveis a partir de um único vértice. Apesar de todas as figuras serem irregulares, eles já demonstravam mais segurança nos desenhos e medições, assim como estavam mais ambientados a esta nova metodologia, o que os deixou mais a vontade para a realização da tarefa e até mesmo para as discussões.

O sucesso no desenvolvimento de uma aula investigativa é influenciado pelo ambiente de aprendizagem, onde segundo Ponte, Brocardo & Oliveira (2005, p.28), "é fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas". Este caráter de interação das descobertas feitas alavanca os resultados da investigação, pois quando o grupo discute diferentes pontos de vista, muitas vezes chega a um consenso comum muito positivo e com grandes avanços.

Após a discussão de como traçar todas as diagonais possíveis, partindo da analise de um quadrado, a aluna A_2, do grupo 2, chega a conclusão:

– O triângulo não dá pra... (*referindo-se em traçar as diagonais*)

Então é questionada pela professora:

– Por quê no triângulo não dá?

Neste momento a aluna B_2, mostrando que também entendeu esta conclusão explica:

– Porque ligando do A pro B (*referindo-se aos vértices*) vai ser a mesma coisa que o lado e os outros também.

Neste momento é possível notar que as alunas construíram a noção de como traçar as diagonais em um polígono convexo, e quando será possível traçá-la. A atividade segue com o preenchimento de uma tabela onde os alunos transcrevem os dados obtidos nos polígonos que desenharam.

Analisando as figuras que você recebeu, preencha a tabela:

	Número de ângulos internos	Número de lados	Número de triângulos
Triângulos	3	3	1
Quadrado	4	4	2
Pentágono	5	5	3
Hexágono	6	6	4

Qual a relação que você encontra entre o número de lados e o número de triângulos?
Que sempre tem 2 de diferença.
O número de lados menos 2 e igual ao número de triângulos.

Figura 2: Tabela e Relação do Grupo 1

Qual a relação que você encontra entre o número de lados e o número de triângulos?
Que tem dois números de diferença.
J = Números de lados K = Números de triângulos
J – 2 = K

Figura 3: Relação do Grupo 2

Os alunos tiveram certa dificuldade para analisar os dados da tabela, para que ocorresse a visualização foi necessária à intervenção, solicitando a análise das colunas e fazendo perguntas dos resultados obtidos em cada linha. Notamos que os alunos conseguiam visualizar facilmente a diferença constante, entre o número de lados e de triângulos, porém, a maior dificuldade foi esquematizar matematicamente esta relação. Os alunos do grupo 1 não conseguiram chegar a construção de uma fórmula, como vemos no grupo 2, fato que causou certa desmotivação dos seus integrantes, pelo fato de não estarem conseguindo realizar a tarefa. Então, começamos a incentivá-los a continuar o trabalho de investigação, explicando que é através de trabalhos como este que os matemáticos realizam pesquisas e análise de dados e chegam às "fórmulas ditas prontas" que utilizamos atualmente de forma mecânica, instigando-os a não desistir a ter persistência em seu objetivo.

Durante a construção da relação entre o número de triângulos de um polígono e a soma dos ângulos internos, surge a necessidade de fazer com que todos os componentes do grupo cheguem ao entendimento. Para isto, notamos que no grupo 2, uma aluna tentava fazer-se entender, explicando a sua conclusão as demais colegas, mostrava o quadro onde preencheram com os valores da soma dos ângulos internos e a quantidade de triângulos em cada polígono e explicava:

Medindo com o transferidor, faça a soma dos ângulos internos destas figuras planas e preencha a tabela:

	Soma dos ângulos internos	Número de lados	Número de triângulos
Triângulo	180°	3	1
Quadrado	360°	4	2
Pentágono	540°	5	3
Hexágono	720°	6	4

Figura 4:Tabela do Grupo 2

“Aquele ali vai ser 180º *(mostra a linha onde preencheram com os dados do triângulo)*. O outro vai ser duas vezes 180º *(indica na folha o número de triângulos do quadro e a soma dos ângulos internos deste quadrado)*. Este três vezes 180º *(indica os dados do pentágono)*. E este quatro vezes 180º *(indica os dados do hexágono)*.” Tornando, desta forma, a situação clara para todas as colegas. A conjectura final que os alunos construíram pode ser vista em seus registros.

Lembrando a dedução encontrada anteriormente, sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, analise a relação que podemos ter com as figuras planas com mais de dois lados se analisarmos o número de triângulos e a soma dos ângulos internos.

Quando aumenta um número de triângulos,
aumenta o 180°. ex: 2 - 360° é duas vezes o 180°
3 - 540° é três vezes o 180°.

É possível chegar a uma fórmula geral que trabalhe com o número de triângulos e a soma dos ângulos internos? Se sim, qual?

Sim. K x 180° = soma dos ângulos internos.
L = soma dos ângulos internos, logo
K x 180° = L.

Figura 5: Conjectura do Grupo 2

8. Considerações finais

Este trabalho com os ângulos internos dos polígonos convexos permitiu que os alunos conseguissem verificar a regularidade da soma das medidas dos ângulos internos nos polígonos convexos por meio das relações matemáticas observadas, formulando conjecturas que puderam ser generalizadas, e utilizadas para qualquer polígono convexo. Além disso, nos permitiu observar e analisar o processo de ensino-aprendizagem da matemática utilizando a metodologia da investigação matemática.

Mesmo não conseguindo expressar suas conjecturas através das convenções matemáticas convencionalmente utilizadas, conseguiram desenvolver sua capacidade de comunicação matemática, discutindo as relações e argumentando sobre suas conclusões, pois a investigação permitiu que a matemática pudesse ser construída e experimentada. Por isso se houver um contato mais frequente com a metodologia, sua linguagem matemática tenderá a ficar mais rebuscada.

Tão logo, são estas características da investigação matemática que a transformam em poderoso instrumento para a construção do conhecimento, e que tem incentivado os professores a investirem na metodologia em vista dos resultados apresentados pelos alunos, mudando sua forma de encarar a matemática e a vida. Daí a utilidade da investigação na compreensão do mundo e sua intervenção sobre ele, pois estimula nos alunos a atitude investigativa e privilegia uma postura interrogativa.

Por isso, a postura investigativa na aula de matemática contribui para que os alunos se tornem condutores do próprio processo educacional e ainda, colabora na formação de cidadãos críticos, proporcionando desenvolvimento além do conhecimento, pois abre portas para um tipo de raciocínio e de diálogo que caracteriza a democracia através da argumentação convincente.

9. Referências

ALRø, Helle; SKOVSMOSE, Ole. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. Orlando Figueiredo (trad). Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática – 7º ano. 3 ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, Osvaldo; POMEO, José Nicolau. Fundamentos da matemática elementar, 9. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SKOVSMOSE, Ole. Desafios da reflexão na educação matemática crítica. Orlando de Andrade Figueiredo(trad), Jonei Cerqueira Barbosa (trad.). Campinas: Papirus, 2008.