

EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU, COMPLETAMENTO DE QUADRADO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Dulcyene Maria Ribeiro

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
dulcyenemr@yahoo.com.br*

Andréia Buttner Ciani

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
andbciani@gmail.com*

Ana Cláudia Strapasson Scherer

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
anascherer91@hotmail.com*

Resumo:

No minicurso proposto temos a intenção de discutir sobre o ‘Método de completar quadrados’ para resolver equações do 2º grau, método que tem se tornado comum nos livros didáticos atuais. O método que fora utilizado pelos hindus Brahmagupta, Sridhara e consta na obra de Bhaskara, é um método semelhante ao que usamos hoje, mas sem considerar a raiz negativa e, é claro sem a simbologia atual. Mas, além dos hindus, há árabes que também trabalharam com essas equações, como Al-khowarizmi, que apresenta soluções aritméticas para seis tipos de equações particulares, apresentando regras básicas de completar quadrados em cada um deles. Após a resolução algébrica, apresenta também, demonstrações geométricas. Então não é razoável falar em um único método de completar quadrados. Analisando mais de perto as formas de resolução das equações do segundo grau, pretende-se também discutir sobre a inserção da História da Matemática em atividades didáticas e sua relação com a formação de professores.

Palavras-chave: Completamento de Quadrados; Equações do segundo grau; História da Matemática.

1. Introdução

Há algumas décadas foram lançados olhares sobre a utilização de referenciais históricos em aulas de Matemática. Porém, usar a História da Matemática não tem sido tarefa fácil. É difícil para os alunos, “[...] cuja noção histórica e sentido do passado pode ser bastante errada, se é que a tem” (FAUVEL, 1997, p. 17). Tem sido difícil para os professores, já que nos seus estudos aprenderam pouco ou nada de História da Matemática e mesmo para os historiadores da Matemática, que “[...] têm sentido alguma dificuldade em conciliar as complexidades e sutilezas históricas com uma simplicidade de estilo dos

textos para apresentação em sala de aula, ou mesmo dos de divulgação popular, que não podem perder a precisão e veracidade” (FAUVEL, 1997, p. 17).

No Brasil é crescente o número de trabalhos desenvolvidos que se relacionam à História da Matemática, o que se verifica pelo aumento de trabalhos em congressos e em eventos científicos. E, apesar das constantes referências ao valor do uso da História da Matemática no ensino dessa ciência, os trabalhos que tratam do envolvimento da História da Matemática em atividades a serem realizadas em sala de aula ainda são a minoria.

O objetivo do minicurso é proporcionar alguma reflexão, aos professores e futuros professores, por meio de uma atividade relacionada ao uso da História da Matemática em sala de aula. Discutiremos sobre o ‘Método de completar quadrados’ para resolver equações do 2º grau, método que tem se tornado comum nos livros didáticos.

Árabes e hindus utilizaram métodos de completar quadrados. O método que fora utilizado pelos hindus Brahmagupta, Sridhara e consta na obra de Bhaskara, é um método semelhante ao que usamos hoje, mas sem considerar a raiz negativa e, é claro sem a simbologia atual. Mas, além dos hindus, há árabes que também trabalharam com essas equações, um bom tempo antes de Bhaskara, como Al-khowarizmi, que apresenta soluções aritméticas para seis tipos de equações particulares, apresentando regras básicas de completar quadrados em cada um deles.

Após a resolução algébrica, Al-khowarizmi apresenta também, demonstrações geométricas, que teriam a função de justificar a aritmética. Então não é razoável falar em um único método de completar quadrados. Qualquer equação completa do 2º grau, após algumas operações algébricas, pode ser transformada em uma das formas particulares consideradas pelos matemáticos hindus ou árabes, o que permitiria a utilização de qualquer um dos métodos de completar quadrados. Mas esses matemáticos resolviam equações utilizando a associação de valores numéricos às representações geométricas, representações que se tem chamado de *método de completar quadrados*. Assim, os termos das equações estão sempre associados a áreas de quadrados ou de retângulos. Com a generalização realizada atualmente, identifica-se processos geométricos que são diferenciados.

2. A História da Matemática nos documentos oficiais

A História da Ciência e, em especial, a História da Matemática, no nosso caso, vem sendo valorizada na formação básica e superior. Há menções nos Parâmetros Curriculares Nacionais, no Guia para a escolha dos livros didáticos, nos documentos que tratam dos processos avaliativos como o antigo provão e nas Diretrizes Curriculares para o Ensino Superior e DCE paranaenses, por exemplo.

No Ensino Médio, os alunos devem estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas isso não deve dar-se isolado de outros conceitos, nem de problemas e da perspectiva sócio-histórica, que está na organização desses conhecimentos (BRASIL, 1998).

A perspectiva sócio-histórica é destacada também no texto dos PCN do Ensino Fundamental, enfatizando a contribuição da História da Matemática para o ensino e aprendizado da Matemática. O professor, ao mostrar a Matemática como uma criação humana, as necessidades e preocupações de diferentes culturas e ao estabelecer comparações entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente, tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais coerentes com a natureza da Matemática.

Além disso, os conceitos abordados através da sua história constituem fontes de informação cultural, sociológica e antropológica, servindo de instrumento de resgate da própria identidade cultural dos grupos, para a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, para a sugestão de abordagens diferenciadas e para a compreensão dos obstáculos enfrentados pelos alunos. Ainda para o texto,

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 46).

Nas Diretrizes Curriculares Paranaenses, por exemplo, aparece a seguinte menção:

É importante entender a história da Matemática no contexto da prática escolar como componente necessário de um dos objetivos primordiais da disciplina, qual seja, que os estudantes compreendam a natureza da Matemática e sua relevância na vida da humanidade. (PARANÁ, 2008, p. 66).

A História da Matemática tem sido constantemente referida em documentos oficiais sobre suas relações com o ensino e aprendizagem, Além desta faceta, ela é o aporte teórico que trata da história de uma ciência, a Matemática, constituindo-se também, em uma área de investigação.

Depois que as relações e as investigações entre História da Matemática e a Educação Matemática se estabeleceram e se fortaleceram foi que a primeira começou a ser

referenciada como um instrumento pedagógico, uma metodologia de ensino e aprendizagem, ao lado de outras, preconizadas pela Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e as Mídias educativas, apenas para citar algumas.

Apesar dos constantes apelos dos documentos norteadores, ainda são poucos os trabalhos direcionados à sala de aula que se apoiam na História da Matemática. A falta de iniciativa nessa linha não se justifica na simples falta de vontade dos professores, mas pela ausência de fontes que abordem a questão. As propostas de utilização da História da Matemática em sala de aula, ainda que poucas, quando existentes, são pouco divulgadas¹. E essa não é uma característica exclusiva da História da Matemática, pois também se manifesta para outras tendências.

Neste minicurso pretendemos não somente discutir e defender a História da Matemática em potencialidades pedagógicas, mas também apresentar aos participantes um exemplo de como ela pode influenciar na aprendizagem do tópico Equação do Segundo Grau.

3. A resolução das equações quadráticas e os métodos históricos de completamento de quadrados.

Um dos maiores problemas com relação às equações do segundo grau é a falta de compreensão por parte dos alunos com relação ao significado das raízes e à forma de encontrá-las.

Do ponto de vista da história desse conteúdo, podem ser discutidos com os alunos vários dos métodos utilizados pelos matemáticos ao longo dos tempos. Na sequência, estão dois dos métodos históricos que consideramos importantes que os alunos e professores conheçam, para que a aprendizagem desse conteúdo possa ser significativa.

O primeiro deles trata-se de um dos métodos geométricos de completar quadrados de Al-khwarizmi². Para resolver uma equação do tipo $x^2 + 20x = 44$, primeiro deve-se desenhar um quadrado de lado medindo x unidades para representar o termo x^2 . Depois,

¹ Exemplos de abordagens estão em Ribeiro (2011), Pacheco (2010), Mendes (2009) e Miguel et al. (2009).

² Matemático árabe que viveu por volta do ano de 780. Escreveu livros sobre Matemática, Astronomia, entre outros assuntos. Em seu livro *Hisab al-jabr w'al-muqabala* ou na versão latina, *Al-jabr*, registrou diferentes métodos para completar quadrados.

representar o termo $20x$ por quatro retângulos de lados com medidas 5 unidades e x unidades, como mostra a figura abaixo:

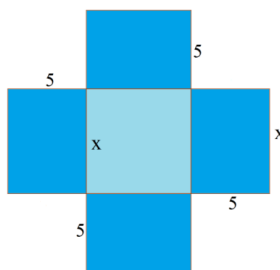


Figura 1: Método de Al-khwarizmi.

Desta forma $x^2 + 20x$ é a soma da área do quadrado com as áreas dos quatro retângulos da figura acima. Para obter um quadrado, deve-se acrescentar na figura anterior quatro quadrados de lado medindo 5 unidades, obtendo a figura 2:

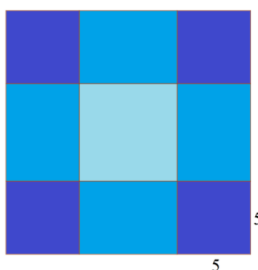


Figura 2: Método de Al-khwarizmi.

A figura 1 tem área igual a 44. Esta área somada à área dos quatro quadrados de lado medindo 5 unidades, conforme figura 2, será: $44 + 4 \cdot (5 \cdot 5)$. Assim, a área do quadrado maior é 144 unidades, e, portanto, o lado tem medida 12 unidades. Logo, a medida do lado é $5 + x + 5 = 12$ e, portanto $x = 2$.

Esse método é geométrico, em que o ato de “completar quadrados” aparece de forma explícita. Mas podemos associar também o método de completar quadrados aos aspectos algébricos, como fizeram os hindus. O método de resolução de equações do segundo grau utilizado por Brahmagupta³, Sridhara⁴, Aryabhata⁵ e Baskhara⁶, consistia em

³ Brahmagupta (c. 598), matemático hindu cuja maior contribuição matemática está relacionada à utilização dos números negativos e às operações com estes.

⁴ Sridhara (c. 900) matemático hindu cujas principais obras foram *Trisatika* e *Patiganita*, esta última tratava de aritmética e medições.

⁵ Aryabhata (c. 476). Estudou equações de primeiro e segundo grau e possivelmente o primeiro matemático a aplicar processos algébricos à astronomia e geometria.

⁶ Baskhara matemático hindu que viveu por volta de 1114 - 1185, e que deu continuidade aos problemas propostos por seus contemporâneos Brahmagupta (c. 598), Sridhara (c. 900) e Aryabhata (c. 476). Suas principais obras foram *Lilavati* e *Vijaganita*.

dada uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, multiplicar ambos os lados desta por $4a$, obtendo assim $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$. Posteriormente somar a ambos os membros b^2 , obtendo como resultado $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$ que pode ser escrito como $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$. Depois eram extraídas as raízes, chegando-se ao lado do quadrado que foi completado: $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$. Continuando com o processo obtinham o isolamento do x .

Solicitaremos aos participantes que façam o processo e o apresentem de maneira sistematizada.

Essa fórmula, bem como a obtida pela generalização do método de Al-Khowarizmi, com poucas diferenças, é a fórmula resolutive de equações do segundo grau que conhecemos. Essa fórmula, chamada no Brasil, equivocadamente de ‘Fórmula de Baskhara’⁷ é um método de resolução que aparece na obra *Vijaganita* do matemático hindu Baskhara, porém este método de resolução de equações quadráticas é atribuído à Sridhara.

As expressões algébricas ou equações podem se apresentar de formas diferenciadas. Mas algumas manipulações podem ser efetuadas de forma a obter novas formas de escrevê-las o que, muitas vezes, facilita o trabalho de resolvê-las. Era isso que os hindus faziam. O método de “completar quadrados”, no qual se baseia a fórmula de resolução de equações do segundo grau, consiste em primeiramente transformar a equação $ax^2 + bx + c = 0$, chamada forma geral, em outra mais conveniente, chamada forma canônica.

A forma canônica é obtida por meio da fatoração da equação inicial. Com o método de completar quadrados obtemos um quadrado perfeito e desta forma, algebricamente, transformamos a equação quadrática dada inicialmente em uma equação do primeiro grau, o que facilita a resolução.

As demonstrações algébricas e geométricas apresentadas pelos hindus e por Al-khowarizmi, por exemplo, podem ser consideradas pontos de vistas diferentes para se tratar de equação do segundo grau. São variedades de concepções que podem dar conta de um mesmo conceito, e “quando um conceito é encontrado numa ampla variedade de concepções, os atributos que o definem são mais rapidamente aprendidos” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud, NUNES, ALMOULOU; GUERRA, 2010, p.555).

⁷ Para mais informações sobre isso ver artigo de CARVALHO, F. et al. Por que Baskhara? **Revista História & Educação Matemática/Sociedade Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, SP. v. 2, n. 2, p.123 - 171, 2001-2002.

As demonstrações neste caso auxiliam os alunos, na percepção de como é possível obter a fórmula resolutiva geral para encontrar as raízes de equações quadráticas. Muitas vezes, o professor apenas apresenta ao aluno esta fórmula sem dar mais explicações, e a retomada da breve demonstração que os hindus costumavam fazer, pode contribuir para a compreensão dos alunos sobre o assunto e ampliar a ideia que eles têm da Matemática.

4. Considerações Finais

Propor que alunos e professores organizem aulas usando a História da Matemática tem também o objetivo de levá-los a compreender que não é fácil entender a maneira como os matemáticos formularam seus resultados, que não foi simples para eles alcançarem seus resultados e, que, portanto, nem sempre é simples para os alunos entenderem alguns conceitos matemáticos.

Muitas vezes, o professor espera que seus alunos considerem natural o desenvolvimento de determinado conteúdo e o aprendam rapidamente. Nesse processo, os professores esquecem ou desconhecem que muitos conteúdos tratados na educação básica, e mesmo no ensino superior, demoraram anos ou séculos para apresentar o *corpus* teórico que hoje apresentam. Isso se dá por desconhecimento da constituição histórica do conteúdo. Muitos conteúdos representaram verdadeiros obstáculos epistemológicos⁸ ao longo da história da humanidade, como foi o caso dos números negativos.

O desenvolvimento da Matemática enquanto ciência nem sempre se deu de forma lógica, maneira como, em geral, é exposta aos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem. Muitos autores concordam que seu desenvolvimento histórico revela contradições, idas e vindas para o estabelecimento de sua organização lógica atual. Destarte, o uso da História da Matemática em sala de aula pode auxiliar a modificar esse ponto de vista.

Neste minicuro buscaremos exemplificar situações em que a História da Matemática é tratada em atividades pedagógicas. Há muitas outras possibilidades. Esperamos que a partir destes exemplos surjam outros olhares e possibilidades para a utilização da História no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

⁸ Para Bachelard, o obstáculo epistemológico é algo tratado como uma "evidência" e que impede o indivíduo de fazer o conhecimento progredir, na medida em que sua naturalização impede que os conceitos sejam revistos e modificados.

5. Bibliografia

BRASIL. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2011: Matemática. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2010. 96p.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio, Parte III. Secretaria do Ensino Médio. MEC/SEM, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARVALHO, Fernanda et al. Por que Baskhara? **Revista História & Educação Matemática/Sociedade Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, SP. v. 2, n. 2, p.123 - 171, 2001-2002.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Higyno H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004. 844p.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro. Ciência Moderna, 2009. 256 p.

MIGUEL, Antonio et al. **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

NUNES, José M. Viana; ALMOULOU, Saddo Ag; GUERRA, Renato Borges. O Contexto da História como Organizador Prévio. In: **Bolema**, Rio Claro, SP, v.23, n.35B, p. 537-561, 2010.

PACHECO, Edilson Roberto. História da Matemática em abordagens pedagógicas. In: BURAK. D.; PACHECO, E. R.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). **Educação Matemática: reflexões e ações**. Curitiba, PR: CRV, 2010. p. 27-43.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação – Superintendência de Educação – **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná – Matemática**. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2013.

RIBEIRO, Dulcyene Maria. História da Matemática e a formação de professores de matemática. In: Strieder Dulce M.; Malacarne, Vilmar (org.) **Ensino de ciências e Matemática: aspectos da formação docente**. Curitiba: CRV, 2011, p. 147-167.

SWETZ, Frank J. Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática. In: **Relevância da História no Ensino da Matemática**. GTHEM/APM, 1997. p. 21-29. Cadernos do GTHEM.

VIANNA, Carlos Roberto. História da Matemática na Educação Matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2000, Londrina. **Anais...** Londrina, PR: Editora da UEL, 2000. p. 15-19.