

## SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM ABORDAGEM DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

*Nilza Aparecida de Freitas*

*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP*

*nilza-freitas@uol.com.br*

*Celina Aparecida Almeida Pereira Abar*

*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP*

*abarcaap@pucsp.br*

### **Resumo:**

Este artigo é parte de uma pesquisa em desenvolvimento que pretende investigar de que forma os alunos do Ensino Médio resolvem sistemas de equações lineares quando uma abordagem favorece a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica. Este trabalho traz a aplicação e análise da primeira atividade e outras atividades propostas pelas pesquisadoras. A sequência didática proposta utiliza os pressupostos da engenharia didática e foi elaborada centrada na língua natural, algébrica e gráfica, com a utilização do *software* GeoGebra. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval irá permear o trabalho dessa investigação.

**Palavras chave:** sistemas lineares; registros de representação semiótica; GeoGebra.

### **1. Introdução**

Este trabalho apresenta a aplicação e análise da primeira atividade e as demais atividades, propostas na pesquisa de Mestrado Profissional, em desenvolvimento, no Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática PUC/SP. O objetivo do trabalho é aplicar e analisar uma sequência didática para alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública em São Bernardo do Campo - São Paulo, para a resolução de sistemas de equações lineares nos registros algébrico, gráfico e na língua natural com a utilização do *software* GeoGebra.

Na prática docente percebe-se nos alunos concluintes do terceiro ano do Ensino Médio a dificuldade em resolver problemas de Matemática envolvendo sistemas de equações lineares. Estudos preliminares como pesquisas, artigos e documentos oficiais, confirmam essa dificuldade, embora na literatura específica existam diferentes formas de representação e resolução de sistemas de equações lineares.

Nesse sentido, nota-se a importância do tema sistemas de equações lineares para a formação Matemática dos estudantes, bem como, sua expectativa de aprendizagem conforme o conteúdo no Ensino Fundamental II salientada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro (5ª e 6ª séries) e 4º ciclos (7ª e 8ª séries) do Ensino Fundamental e Currículo do Estado de São Paulo Ensino Fundamental–Ciclo II.

Assim, o objetivo da pesquisa é investigar de que forma os alunos do Ensino Médio conseguem resolver sistemas de equações lineares em que a abordagem proposta favorece a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica.

A investigação contempla a representação algébrica, língua natural e gráfica, com o recurso do *software* GeoGebra, de sistemas de equações lineares como forma de atingir um aprendizado com significado.

A sequência proposta para a resolução de sistemas consiste na conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e do registro algébrico para resolução gráfica. Também, contempla na resolução algébrica o tratamento e no registro gráfico a discussão dos sistemas lineares de acordo com a posição relativa das retas de cada equação que compõe o sistema. A solução algébrica nem sempre é compreendida pelos alunos e nossa hipótese é que a representação gráfica pode contribuir para a compreensão do significado do que é resolver um sistema de equações lineares.

## **2. Referencial Teórico e Metodológico**

De acordo com Duval (2009), para procurar a razão dos bloqueios de compreensão em Matemática apresentada por muitos alunos, é necessário estudar o funcionamento dos sistemas cognitivos que propiciam o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, analisando, ainda, quais são os sistemas cognitivos necessários e se são próprios da atividade Matemática.

Para o funcionamento da atividade cognitiva requerida pela Matemática, que é diferenciada de outros domínios do conhecimento, as representações semióticas são uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático por duas razões: em primeiro lugar - as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. Em segundo lugar - a existência de grande variedade de

representações semióticas utilizada em Matemática como figuras geométricas, as escritas algébricas, representações gráficas e a língua natural. (Duval<sup>1</sup>, apud Machado, 2009).

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009) é utilizada devido à importância da conversão de registros para a abordagem do tema sistemas de equações lineares na construção do conhecimento do aluno.

Segundo Duval (2009), existem dois tipos de transformações dos registros de representação semiótica: conversão e tratamento representando os diferentes signos utilizados em Matemática, tais como figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural e registro numérico.

Uma conversão é uma transformação de uma representação, mudando de um registro para outro. Por exemplo, ao utilizar um gráfico cartesiano para representar um sistema de equações realiza-se uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

O tratamento é uma operação efetuada dentro de um mesmo registro de representação, por exemplo, ao multiplicar uma equação do sistema por um número real diferente de zero para escaloná-lo, realiza-se um tratamento desse registro algébrico. Quando se utiliza um *software* de geometria dinâmica, efetua-se um tratamento no registro gráfico ao movimentar a figura ou quando reescreve-se o enunciado de uma atividade de outra forma aplica-se um tratamento na língua natural.

Desse modo, apresentamos uma proposta de atividades orientadas pelo referencial teórico acima exposto.

Para responder a questão de pesquisa é utilizada, como metodologia, os pressupostos da Engenharia Didática para analisar as situações didáticas propostas.

A engenharia didática como produto resultante de uma análise *a priori*, é caracterizada por Artigue<sup>2</sup> (1988, apud Machado, 2010, p. 235) *como em esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.*

O processo experimental da Engenharia Didática se compõe das fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

---

<sup>1</sup> DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

<sup>2</sup> ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.9, n. 3. Pp 281-308. Grenoble, 1988.

Nas análises preliminares buscamos considerações do referencial teórico, dos documentos oficiais e conhecimentos didáticos já desenvolvidos sobre o assunto, considerando os objetivos da pesquisa.

Embasados nesses levantamentos, criamos para a fase da concepção e análise *a priori* uma sequência didática a ser aplicada em sala de aula aos alunos participantes da experimentação, de tal forma que permita a observação e a análise no desenvolvimento das atividades. Assim, esse aluno será colocado como sujeito da ação e, o professor, se necessário, fará a retomada das questões discutidas e estabelecerá os principais resultados da teoria.

O desenvolvimento das atividades prioriza a resolução dos sistemas lineares com a conversão dos registros de representação semiótica. Na primeira atividade aplicada, analisada e integrante deste artigo, foi explorada a conversão do registro da língua natural para o algébrico. A proposta da segunda atividade retoma a classificação dos sistemas de equações lineares de acordo com a posição relativa da reta que representa cada equação para auxiliar os alunos na discussão dos sistemas. O sistema de equações lineares será apresentado no registro algébrico e a sua resolução e discussão estará no registro gráfico, com o recurso do *software* GeoGebra. Na terceira atividade, a proposta é apresentar uma das equações com parâmetros representando coeficientes com a possibilidade de mudanças de valor, efetuando um tratamento no registro gráfico. A quarta atividade propõe a mudança do registro gráfico para o registro algébrico.

A fase da experimentação é a fase da realização da engenharia didática com a população de alunos considerada. Iniciará no momento do contato pesquisador/professor com esses alunos. Propomos as seguintes ações para alcançarmos nosso objetivo: a explicitação dos objetivos e condições da realização da pesquisa aos alunos participantes, aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações a serem feitas durante a experimentação.

A análise *a posteriori* e a validação da primeira atividade foram feitas depois do término da respectiva fase da experimentação.

As demais atividades serão realizadas após a execução, com base nos dados colhidos, nas observações e nas produções dos alunos durante a fase de experimentação. As hipóteses levantadas à luz de nosso referencial teórico serão validadas ou não pela confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*.

### 3. Estudos Preliminares

Procuramos orientações em documentos oficiais para sabermos como o assunto é apresentado. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 77) *no estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria.*

A resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas está associada à posição relativa das retas no plano de cada uma das equações que formam o sistema, dependendo de sua intersecção, paralelismo ou coincidência há existência ou não de solução. Com operações elementares simples a solução pode ser confirmada.

Tal fato é reforçado nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2002) afirmando que se deve construir uma conexão entre as diferentes linguagens, associando situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice versa.

Duas pesquisas com o tema em questão, contribuíram para este estudo. Jordão (2011) desenvolveu, analisou e aplicou uma sequência didática visando a resolução dos registros algébricos e gráficos dos sistemas lineares 2D e 3D no *software* Winplot. Constatou que o uso do *software* na conversão do registro algébrico para o gráfico contribui para a construção do conhecimento. Battaglioli (2008) demonstra nos livros didáticos analisados a exploração tímida da mudança de conversão de registros, como também, uma predominância da conversão do registro da língua natural para o algébrico e nenhuma proposta que tenha o registro gráfico como ponto de partida.

Desse modo, a proposta de atividades desta pesquisa se orienta também pelos estudos acima expostos.

### 4. Procedimentos Metodológicos

Os sujeitos desta pesquisa são estudantes de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio matutino de uma escola pública da cidade de São Bernardo do Campo, São Paulo. Foram escolhidos por já saberem, hipoteticamente, resolver sistemas de equações lineares algebricamente e graficamente.

Nossa perspectiva é que os alunos consigam determinar a solução dos sistemas lineares das atividades propostas, fazendo conexão com outras formas de representação

relacionando os coeficientes das equações das retas que compõem o sistema com a posição relativa dessas retas representadas com o *software* GeoGebra, analisando suas resoluções.

Uma oficina foi desenvolvida para os alunos se familiarizarem com o *software* GeoGebra contendo as ferramentas básicas necessárias para a execução da atividade.

A sequência didática é composta por quatro atividades desenvolvidas para um trabalho de aprendizagem específico que contemple a diversidade de sistemas de representação que, segundo Duval (2009, p. 19)

a coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino.

As diferentes formas exploradas nas atividades dos sistemas de equações lineares têm por objetivo favorecer a comparação entre os diferentes tipos de registros confrontando as resoluções encontradas.

## 5. Sequência Didática

### Objetivo da atividade 1:

O aluno assimilar a mudança do registro da língua natural para o algébrico e resolver, por meio do tratamento, o sistema obtido.

### Apresentação da Atividade 1:

A soma das idades de Janaina e Marisa é 17 anos.

A idade de Janaina mais o dobro da idade de Marisa são 20 anos. Qual é a idade de cada uma? (Adaptada de Dante, 2007).

### Análise *a priori* da atividade 1:

A expectativa é de que os alunos utilizem como estratégia a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, identificando a idade de cada uma por uma incógnita, bem como utilizem seus conhecimentos prévios considerando os tratamentos necessários no sistema obtido para determinar as idades de Janaina e de Marisa.

### Análise *a posteriori* da atividade 1:

Os alunos fizeram a mudança para o registro algébrico e representaram o sistema, mas tiveram dificuldades na resolução do mesmo, pois não realizaram adequadamente o tratamento algébrico na articulação das duas equações para eliminar uma das incógnitas na

utilização do método da adição ou da substituição. Apresentaram dificuldades para conseguir os coeficientes simétricos no método da adição.

A análise da atividade 1 resolvida pelos alunos demonstra que efetuaram a transformação do registro de representação semiótica, ou seja, a conversão da língua natural para o registro algébrico, mas apresentaram dificuldades de tratamento na escolha de um método que assegurasse a resolução.

### Objetivo da atividade 2:

O aluno aprender, com a mudança do registro algébrico para o registro gráfico, a classificar um sistema de equações por meio da representação gráfica e também relacionar os coeficientes do sistema com a sua resolução.

A questão foi dividida em três itens para abranger os três tipos de sistemas de acordo a posição relativa das retas de cada equação.

### Apresentação da atividade 2:

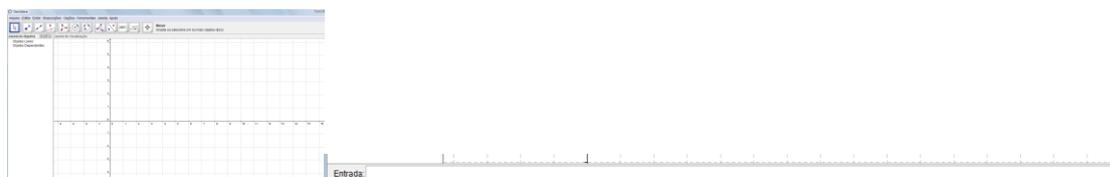
Resolver, graficamente, um sistema é classificá-lo de acordo com a posição relativa entre as retas que representam as equações do sistema. Com a utilização do *software* GeoGebra, resolva, graficamente, os sistemas e equações abaixo. Utilize os conceitos da classificação de acordo com a posição relativa da reta que representa cada equação:

<b>Sistema Possível e Determinado</b>	<b>Sistema Impossível</b>	<b>Sistema Possível e Indeterminado</b>
As retas que representam as equações se intersectam num único ponto, que é a solução do sistema.	As retas que representam cada uma das equações são distintas e paralelas, não apresentam ponto em comum, e não existe solução para o sistema.	As retas que representam cada uma das equações são coincidentes, havendo infinitas soluções para o sistema.
a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

Para a resolução, siga a sequência abaixo:

Para abrir o GeoGebra clique duas vezes no ícone do ícone do *software*.

Abrirá a caixa:

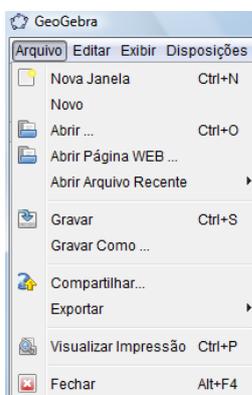


a)  $\begin{cases} x - 2y = 3 \end{cases}$

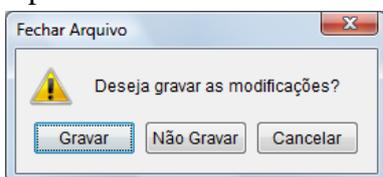
$$2x - 4y = 7$$

- 1) Digite a equação no **campo de entrada**:  $x - 2y = 3$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 2) Digite a equação no **campo de entrada**:  $2x - 4y = 7$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 3) Na janela de visualização, qual é a posição relativa entre as duas retas? Responda qual é o tipo de sistema.
- 4) Veja os valores de x e y do ponto de intersecção das duas retas, quando for o caso. Resolva algebricamente para conferir.

Utilizar a ferramenta **arquivo**, clicar em **novo**:



Aparecerá a caixa:



Clique em **não gravar**.

$$b) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

- 1) Digite a equação no **campo de entrada**:  $x - 2y = 3$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 2) Digite a equação no **campo de entrada**:  $3x - 6y = 9$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 3) Na janela de visualização, qual é a posição relativa entre as duas retas?  
Responda qual é o tipo de sistema.
- 4) Veja os valores de x e y do ponto de intersecção das duas retas, quando for o caso.  
Resolva algebricamente para conferir a resposta.

Utilize a ferramenta **arquivo**, clique em **novo** e **não gravar**.

$$c) \int x - 2y = 3$$

$$x + 2y = 7$$

- 1) Digite a equação no **campo de entrada**:  $x - 2y = 3$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 2) Digite a equação no **campo de entrada**:  $x + 2y = 7$ , clique enter e verifique se aparecerá na janela de visualização a reta que representa a equação.
- 3) Na janela de visualização, qual é a posição relativa entre as duas retas? Responda qual é o tipo de sistema.
- 4) Veja os valores de  $x$  e  $y$  do ponto de intersecção das duas retas, quando for o caso. Resolva algebricamente para conferir a resposta.

Utilizar a ferramenta **arquivo**, clique em **novo** e **não gravar**.

### **Análise a priori da atividade 2:**

Espera-se dos alunos a utilização da estratégia conversão do registro algébrico para o gráfico com a utilização do *software* GeoGebra empregando seus conhecimentos prévios para relacionar os coeficientes das incógnitas  $x$  e  $y$  e do termo independente com a representação da reta das equações dos sistemas para conferir os resultados, bem como, realizar o tratamento no registro algébrico para determinar a resolução do sistema.

Elaboramos uma sequência didática com as ferramentas que serão utilizadas no programa e um resumo da discussão de um sistema de acordo com a posição relativa das retas que representam cada uma de suas equações.

### **Objetivo da Atividade 3**

O aluno resolver um sistema de equações nas diferentes formas de representação.

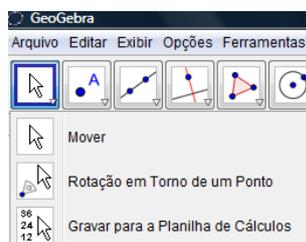
### **Apresentação da Atividade 3:**

Abra o GeoGebra.

#### **Item 1)**

- Digite a equação  $5x + 2y = 5$  no campo de entrada. Clique enter e observe na janela de visualização a reta que representa a equação.
- Crie o controle deslizante **c**, com valor mínimo -5, valor máximo 5 e incremento 1.
- O parâmetro **c** é o termo independente.

Clique a ferramenta Mover.



- Altere o parâmetro **c** do controle deslizante.
- Digite uma nova equação  $5x + 2y = c$  no campo de entrada. Clique enter e observe a reta da equação na janela de visualização.

Responda:

- a) Escreva o sistema das equações das retas que você digitou.
- b) Qual é a posição relativa das retas dessas equações? O que você percebeu entre os coeficientes das equações das retas?
- c) Como você classifica o sistema de equações, de acordo, com a posição relativa entre as equações das retas?
- d) Você achou a intersecção das retas? Em caso afirmativo especifique e justifique sua resposta.
- e) Resolva o sistema algebricamente para conferir a solução e a classificação do sistema.

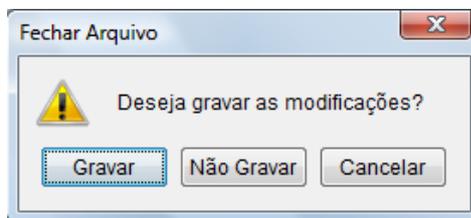
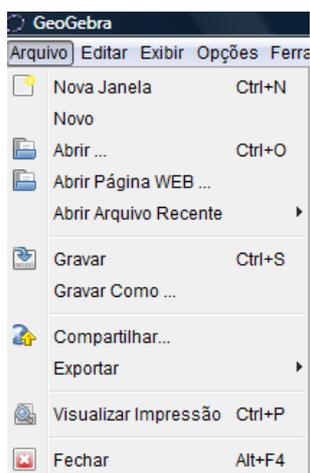
Clique a ferramenta **Mover**

Alterar o parâmetro **c**, com **c** diferente de 5, do controle deslizante, várias vezes.

- f) Registre o que você observou.

## Item 2)

Clique na ferramenta **Arquivo** abrirá uma janela, clique **novo**, abrirá uma janela **Não gravar**.



- Crie os controles deslizantes **a**, **b** e **c** com valor mínimo -5, valor máximo 5 e incremento 1. O parâmetro **a** representa o coeficiente de x, o parâmetro **b** representa o coeficiente de y e o parâmetro **c** representa o termo independente.

- Clique na ferramenta **Mover** e escolha os parâmetros **a**, **b** e **c** do controle deslizante.
- Digite a equação  $ax + by = c$  no campo de entrada. Clique enter e observe na janela de visualização a reta que representa a equação.
- Digite no **campo de entrada** uma nova equação  $2ax + 2by = 2c$ , tecle enter.

Observe no campo de visualização a reta que foi formada pela equação digitada.

Responda:

- a) Escreva o sistema das equações das retas que você digitou.
- b) Qual é a posição relativa das retas dessas equações. O que você percebe entre os coeficientes das duas equações?
- c) Classifique o sistema de acordo com a posição das retas representadas pelas equações acima.
- d) Você achou a intersecção das retas? Em caso afirmativo especifique e justifique sua resposta.
- e) Resolva o sistema algebricamente para conferir a solução e a classificação do sistema.

Clique na ferramenta **Mover**

- Altere os valores dos parâmetros **a**, **b** e **c**, do controle deslizante, várias vezes.
- f) Registre o que você observou na janela gráfica.

**Item 3)**

- Clique na ferramenta **Arquivo** abrirá uma janela, clique **novo**, abrirá uma janela **Não gravar**.
- Crie os controles deslizantes com parâmetros **a** e **c** com valor mínimo -5, valor máximo 5 e incremento 1.
- O parâmetro **a** representa o coeficiente de x e o parâmetro **c** representa o termo independente.
- Digite a equação  $3x + y = 5$  no campo de entrada. Clique enter e observe na janela de visualização a reta que representa a equação.
- Clique na ferramenta **Mover** e altere os parâmetros **a** e **c**, com **a** diferente de 3
- Digite no **campo de entrada** uma nova equação  $ax + y = c$ , tecle enter.
- Observe no campo de visualização a reta que foi formada pela equação digitada.

Registre as respostas das questões abaixo:

- a) Escreva o sistema das equações das retas que você digitou.
  - b) Qual é a posição relativa das retas dessas equações? O que você percebe entre os coeficientes das duas equações?
  - c) Classifique o sistema de acordo com a posição das retas.
  - d) Você achou a intersecção das retas? Em caso afirmativo especifique e justifique sua resposta.
  - e) Resolva o sistema algebricamente para conferir a solução e a classificação do sistema.
- Clique em **arquivo, novo e não gravar**.
  - Crie um controle deslizante para os parâmetros **b** e **c**, com valor mínimo -5, máximo 5 e incremento igual a 1.
  - Digite a equação  $3x + y = c$  no campo de entrada.
  - Clique na ferramenta **Mover**.
  - Altere os parâmetros **b** e **c**, **b** diferente de 1, do controle deslizante várias vezes.  
Registre o que você observou na janela geométrica.

### **Análise a priori da atividade 3:**

Espera-se que os alunos com base na sequência didática proposta utilizem como estratégia:

- A conversão do registro algébrico para o registro gráfico, utilizando como recurso o *software* GeoGebra. O aumento do número de experimentações dar-se-á pela ferramenta controle deslizante que introduz como parâmetros os coeficientes das equações.
- A mobilização dos conhecimentos prévios para perceber e relacionar os coeficientes das incógnitas  $x$  e  $y$  e do termo independente com a representação da reta das equações dos sistemas.
- A conferência dos resultados, realizando o tratamento no registro algébrico para determinar a resolução do sistema algebricamente.

### **Objetivo da Atividade 4:**

O aluno identificar o gráfico com o sistema correspondente.

### **Apresentação da Atividade 4:**

Escreva uma equação que contemple um sistema que possuí:

- a) Duas retas paralelas

$$\begin{cases} -3x + 7y = -3 \end{cases}$$



ABAR, C.A.A.P.(org). Instituto Internacional GeoGebra de São Paulo. Disponível em: [www.pucsp.br/GeoGebra.asp](http://www.pucsp.br/GeoGebra.asp). Acesso: 16 de março de 2013.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques.** v.9, n. 3. Grenoble, 1988.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares no 2º ano do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos.** 2008. 114 f. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2006.

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso 17 de março de 2013.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso 17 de março de 2013.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN+:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Mec, 2002.

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso 17 de março de 2013.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática.** 2ª São Paulo: Editora Ática, 2007. 288 p. (7ª).

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I).** São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

JORDÃO, A. L. I. **Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011. 192 f. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

\_\_\_\_\_. **Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio. Revista Produção Discente Educação Matemática,** São Paulo, v. 1, n. 1, p.5-17, 2012.

MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.** 5. ed. São Paulo: Papirus Editora, 2009. 160 p.

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática uma (nova) Introdução.** 3. ed. São Paulo: Educ, 2010. 247 p.