REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU

Sandra Pereira Lopes
Pontifícia Universidade Católica - SP
sandraplopes2004@ig.com.br

Resumo

O estudo realizado investigou e analisou atividades utilizadas por dois autores de livros didáticos na introdução ao estudo da função polinomial de segundo grau, focalizando os registros gráficos e algébricos. O estudo foi fundamentado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2003). No decorrer da investigação e análise foi possível observar nas atividades que os registros gráficos e algébricos são descritos, mas a conversão entre os dois não ocorre nos dois sentidos. Dessa maneira, serão propostas algumas atividades para serem desenvolvidas com auxilio do *software* Winplot priorizando as conversões entre estes registros nos dois sentidos.

Palavras Chave: Função Polinomial do Segundo Grau; Registros Semióticos; Winplot.

1. Introdução

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e tem uma larga aplicação em outras áreas do conhecimento como Física, Biologia, Química e Economia. Nas escolas públicas em geral o livro didático de Matemática é uma das principais ferramentas utilizadas pelo professor para organizar o roteiro das suas aulas.

O presente estudo apresenta uma análise de atividades propostas por dois autores de livros didáticos para o ensino de função quadrática, estudo este iniciado na oitava série do ensino regular e consolidado no primeiro ano do Ensino Médio. A análise e investigação são realizadas com base na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2003). Durante a análise foi verificado a ocorrência ou não de congruência nas conversões dos registros algébricos para os gráficos e naquelas em sentido contrário.

Os trabalhos publicados sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval demonstram que é possível desenvolver com os estudantes outras propostas de atividades que relacionem o registro gráfico com registro algébrico nos dois sentidos de conversão, como proposto por Duval.

Tendo em vista a análise realizada e as conclusões, serão propostas atividades utilizando o *software* Winplot para dinamizar o esboço dos gráficos e então estabelecer os dois sentidos da conversão entre os registros gráficos e algébricos.

Para tanto o estudo foi organizado da seguinte forma: item 2, abordagem dos pressupostos teóricos, item 3, apresentação da análise das atividades de dois livros didáticos e sugestões de atividades que contemplam as diretrizes dadas pelos pressupostos teóricos escolhidos e no, item 4, as conclusões.

1.1 Questões e Objetivos

A investigação e análise das atividades propostas pelos autores serão norteadas por duas questões: a) Como é realizada a abordagem do conceito de função quadrática pelos autores selecionados? b) Como os autores tratam da articulação entre os registros gráficos e algébricos, em relação à representação do objeto matemático função quadrática? São propostas tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão?

O objetivo geral deste estudo é propor atividades para o ensino das Funções Polinomiais de Segundo Graus que contemplem os pressupostos principais da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, usando o *software* Winplot como instrumento didático.

Os objetivos específicos são:

- Analisar atividades para o ensino de funções quadráticas em dois livros didáticos focalizando conversão entre registros algébricos e gráficos.
- Apresentar sugestões de atividades para o ensino de funções quadráticas onde ocorra congruência nas conversões dos registros gráficos para os algébricos e nas dos registros algébricos para os gráficos.

1.2 Metodologia e Procedimentos

A metodologia adotada para o desenvolvimento do estudo está fundamentada em uma análise documental de caráter qualitativo.

> Realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos "[...] documento é toda base de conhecimento fixado materialmente e suscetível de ser utilizado para consulta, estudo ou prova [...]" (PÁDUA, 2005, p.68-69).

Os documentos de análise são dois livros didáticos que fazem parte do catálogo do Programa Nacional do Livro Didático PNLD (2008 e 2009). Os livros foram aprovados por uma comissão técnica que elaborou um relatório técnico sobre cada uma das obras. A escolha desses livros é justificada pelo fato de estarem nas escolas e servirem de consulta para os professores.

A escolha das atividades para a aplicação dos pressupostos teóricos foi realizada em dois livros didáticos de Matemática, indicado respectivamente, por LD-1 e LD-2:

- LD-1: IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. Matemática e realidade: 8ª série – 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- LD-2: SMOLE, K. C.S; DINIZ, M. I. S. Matemática. V.1. 4.ed. 1ª série. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004.

Para a seleção dos materiais didáticos relacionados acima, foram adotados os seguintes critérios:

- Leitura do Guia do Livro Didático e resenhas das coleções de Matemática aprovadas pelo PNLD (2008 e 2009) para o ensino fundamental e Médio.
- Pesquisa na biblioteca da escola, a fim de verificar se haviam algumas dessas obras disponíveis para consulta.

2. Pressupostos teóricos

2.1 A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas é de cunho cognitivo e originou-se nos trabalhos do filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval, surgindo em pesquisas relativas à aquisição da cultura matemática, à organização de situações referentes à aprendizagem desse conhecimento e a problemas relacionados com essa aprendizagem.

Sobre esta teoria, Machado (2003) afirma que o conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referente a esse conhecimento. Para a autora:

> A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. Assim, a abordagem cognitiva adotada por Duval, desenvolvida em estreita relação com o "funcionamento" matemático, no que ele tem de específico, torna sua teoria operatória, por excelência (MACHADO, 2003, p.8).

Para Duval[1](1988), os objetos matemáticos são abstratos. Logo, para se tratar com eles e para se falar deles, ou seja, para que se estabeleça a comunicação em Matemática, é necessário usar representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, imagens e etc, isto é, *representações semióticas*[2].

Especificamente em Matemática, as representações semióticas segundo Duval (2003) são classificadas nos seguintes registros: linguagem natural (oralmente ou por escrito), sistemas de escritas (numéricos e algébricos), figuras geométricas planas ou em perspectiva e grafos cartesianos. Para que aconteça a compreensão em Matemática, é necessário o domínio e a coordenação de pelo menos dois registros.

De acordo com Duval (2003), a cada registro corresponde um tipo diferente de *tratamento*, ou seja, de transformação dentro do mesmo sistema – por exemplo, um cálculo todo realizado usando a escrita algébrica. À transformação que opera a mudança de sistema de um registro para outro, considerando-se ainda o mesmo objeto de estudo, Duval chama *conversão*.

> A conversão de uma representação é a transformação desta em uma representação em um outro registro conservando a totalidade ou parte do objeto matemático em questão. A conversão não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece "dentro" do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes. (DAMM 1999, p.146)

A compreensão em Matemática se dá quando os registros mobilizados na conversão são perfeitamente articulados. Por vezes, no entanto, ocorre o fenômeno de *não-congruência*: quando o registro da representação de partida não é suficientemente transparente em relação ao registro de chegada. Segundo Duval (2003), isto contribui para o fracasso da compreensão do conceito estudado.

---

[1] Duval, R. Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. Annales de Didactique et de Sciences cognitive, I,7-25, 1988a.

[2]DUVAL apud Damm 1999, p.143. Representações Semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. (Duval, 1993. p.39).

> A contribuição de Duval para o processo de ensino/aprendizagem em matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático. Isso porque uma única via não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática. Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático - por exemplo, $f(x)=x$ seria a função, e não uma representação do objeto matemático. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação. (FLORES, 2006, p.77).

Neste estudo, buscou apoiar-se na Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Duval (1988) de interpretação de propriedades figurais, justamente pela percepção de que os estudantes, frequentemente, confundem o objeto matemático com as suas representações (linguística, simbólica e gráfica). Isto acontece particularmente no estudo de função.

As dificuldades apresentadas por muitos alunos em relação ao conteúdo “função” no Ensino Médio estão relacionadas com as conversões entre os diversos registros que podem ser utilizados.

2.2 O *software* Winplot

O Winplot é um *software* matemático de uso livre, desenvolvido por Richard Parris, da Philips Exeter Academy, em New Hampshire, EUA. É um programa gráfico muito eficiente e versátil na plotagens de gráficos de funções (de uma ou duas variáveis) em duas dimensões (2D) e em três dimensões (3D). Além de fácil utilização, ele poder ser rodado em computadores menos modernos. O Winplot é uma contribuição poderosa para consolidar ideias. Por exemplo, a possibilidade de movimentar curvas pela variação controlada de parâmetros, constitui um recurso pedagógico de alcance ilimitado não somente para o estudante, mas também para o professor.

A escolha *do software* Winplot para o estudo de funções polinomiais de 2º graus deve-se ao fato de ser um programa de manipulação simples e capacidade de representar uma grande variedade de ilustrações. Em particular, ele permite criar e explorar funções explícitas de forma interativa, além de esboçar características das funções por meio de animações que:

- Facilitam a compreensão de que, dada uma função real f, definida por y = f(x), a figura representativa do conjunto de pontos (x, f(x)) num sistema de coordenadas é a representação gráfica da função f.
- Apresentam o esboço do gráfico a partir da marcação de pontos, ligando-os por segmentos de reta. Além de não ser obrigatório fazer cálculos, temos claramente maior exatidão, uma vez que a quantidade de pontos utilizados pode ser notável e o resultado se obtém instantaneamente.
- Visualiza o comportamento universal de f.
- Permite focalizar aspectos visuais algébricos por experimentação, dando possibilidade para uma aprendizagem por descobrimento e favorecendo a motivação para aprender.
- Permite simulações de diversas situações, o que facilita o processo de ensino-aprendizagem.

Em suma, os recursos oferecidos por este *software* educativo quando bem trabalhados, favorecem uma melhor compreensão do tema abordado.

3. Análises

As escolas públicas recebem livros didáticos aprovados pela equipe técnica do Programa Nacional do Livro do didático. Os diversos livros didáticos sugeridos para uso nas escolas públicas apresentam o conteúdo de funções polinomiais do segundo grau.

Para Moretti (2003), o que mais aparece no estudo de funções nos livros didáticos é a utilização de certa quantidade de pontos do plano cartesiano, obtidos por meio da substituição direta na expressão algébrica para o traçado da curva. Segundo o autor, quando esse procedimento é utilizado, não existe ligação entre gráfico e expressão algébrica da função correspondente, surgindo então diversos problemas. De fato, a figura representada no plano cartesiano geralmente não é definida por uma quantidade finita de pontos.

Os alunos frequentemente apresentam dificuldades para realizar uma leitura e interpretação satisfatória dos conceitos de funções polinomiais do segundo grau, pois são estimulados através dos livros didáticos com sequências didáticas que geralmente não apresentam questões de interpretação, elaboração de hipóteses e conjecturas.

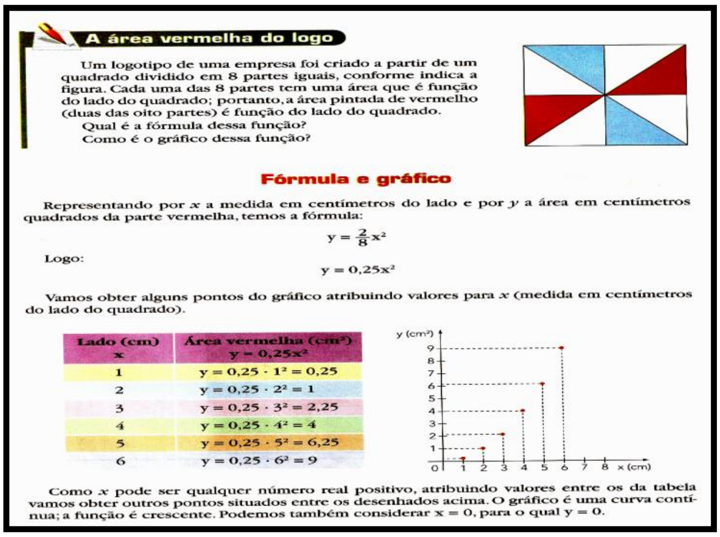
Assim, neste estudo, a análise de algumas sequências didáticas retiradas de dois livros didáticos, procurando observar se e como são realizadas as mudanças de registros de representação na apresentação e estudo da função quadrática.

A análise das sequências didáticas tem como pressupostos teóricos o que Duval (2003) classifica de *interpretação global das propriedades figurais*, ou seja, a averiguação da ocorrência, da articulação entre os registros gráficos e algébricos do objeto matemático "função quadrática". Duval (2003) sustenta que na fase de aprendizagem, a conversão desempenha um papel essencial na apreensão do conceito e que as conversões são as mudanças de registro mais eficazes para a apreensão dos conceitos.

Na linha do que pregam os Parâmetros Curriculares Nacionais, outro aspecto relevante que observaremos nos livros didáticos, no estudo da passagem da representação gráfica para a representação algébrica e vice-versa, é a forma sob a qual são apresentados problemas encontrados na física, química, biologia, economia e outras ciências.

3.1 Análise do LD-1

Figura 1: Fonte: LD-1, 2005 p. 292



A área vermelha do logo

Um logotipo de uma empresa foi criado a partir de um quadrado dividido em 8 partes iguais, conforme indica a figura. Cada uma das 8 partes tem uma área que é função do lado do quadrado; portanto, a área pintada de vermelho (duas das oito partes) é função do lado do quadrado.

Qual é a fórmula dessa função?

Como é o gráfico dessa função?

Fórmula e gráfico

Representando por x a medida em centímetros do lado e por y a área em centímetros quadrados da parte vermelha, temos a fórmula:

$$y = \frac{2}{8}x^2$$

Logo:

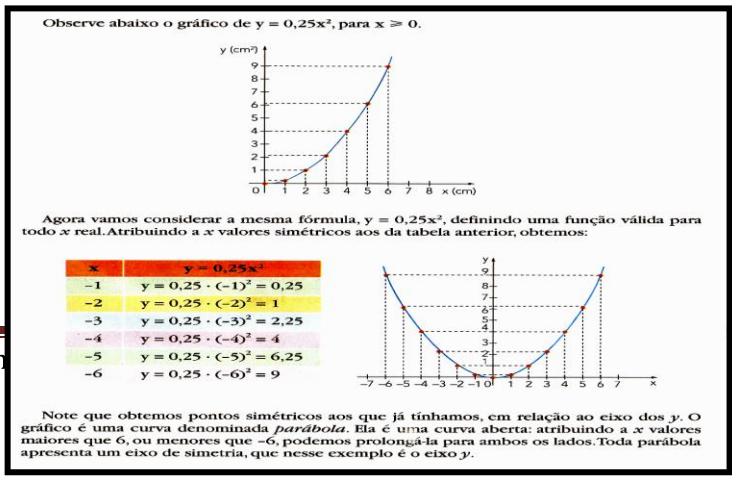
$$y = 0,25x^2$$

Vamos obter alguns pontos do gráfico atribuindo valores para x (medida em centímetros do lado do quadrado).

Lado (cm) x	Área vermelha (cm²) $y = 0,25x^2$
1	$y = 0,25 \cdot 1^2 = 0,25$
2	$y = 0,25 \cdot 2^2 = 1$
3	$y = 0,25 \cdot 3^2 = 2,25$
4	$y = 0,25 \cdot 4^2 = 4$
5	$y = 0,25 \cdot 5^2 = 6,25$
6	$y = 0,25 \cdot 6^2 = 9$

Como x pode ser qualquer número real positivo, atribuindo valores entre os da tabela vamos obter outros pontos situados entre os desenhados acima. O gráfico é uma curva contínua; a função é crescente. Podemos também considerar $x = 0$, para o qual $y = 0$.

Figura 2: Fonte: LD-1, 2005 p. 293



Observe abaixo o gráfico de $y = 0,25x^2$, para $x \geq 0$.

Agora vamos considerar a mesma fórmula, $y = 0,25x^2$, definindo uma função válida para todo x real. Atribuindo a x valores simétricos aos da tabela anterior, obtemos:

x	$y = 0,25x^2$
–1	$y = 0,25 \cdot (-1)^2 = 0,25$
–2	$y = 0,25 \cdot (-2)^2 = 1$
–3	$y = 0,25 \cdot (-3)^2 = 2,25$
–4	$y = 0,25 \cdot (-4)^2 = 4$
–5	$y = 0,25 \cdot (-5)^2 = 6,25$
–6	$y = 0,25 \cdot (-6)^2 = 9$

Note que obtemos pontos simétricos aos que já tínhamos, em relação ao eixo dos y. O gráfico é uma curva denominada *parábola*. Ela é uma curva aberta: atribuindo a x valores maiores que 6, ou menores que –6, podemos prolongá-la para ambos os lados. Toda parábola apresenta um eixo de simetria, que nesse exemplo é o eixo y.

A figura 1 e 2 representa a primeira atividade proposta pelos autores do livro LD-1. Eles iniciam a abordagem do conceito de função quadrática através de dois questionamentos, a saber: Qual é a fórmula dessa função? e Como é o gráfico dessa função?

Assim, o conceito de função quadrática fica limitado a uma fórmula e posteriormente a um gráfico. Os autores não têm a preocupação de realizar uma retomada do conceito de função, reforçando um erro conceitual, pois o conceito de função não se limita apenas a fórmulas ou gráficos.

Podemos verificar que é realizada a passagem do registro da língua materna para o registro algébrico, conforme preconiza a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval.

Embora os autores de LD-1 tenham a preocupação de transitar entre os registros da língua natural, sistemas de escritas algébricas, figuras geométricas e gráficas, não fica claro para os estudantes como é realizado o que Duval chama de conversão.

A atividade citada reforça o que, de acordo com Moretti (2003, p.149-150), é comum encontrar nos livros didáticos: “o esboço de gráficos ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente”. Para Duval (1998 apud MORETTI, 2003, p.151) existem três tipos distintos de procedimentos na construção de gráficos:

1-O procedimento por pontos: em um sistema cartesiano;

2-O procedimento de extensão do traçado: que promove a união de pontos por traços, desenhando o gráfico; e

3-O procedimento de interpretação global das propriedades da figura-forma: que permite a percepção de que a modificação da escrita algébrica implica a mudança da representação gráfica, por meio da associação da variável visual da representação↔ unidade significativa da escrita algébrica.

Nos procedimento 1 e 2, não há relação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente, mas apenas a associação entre um par ordenado e sua representação cartesiana. Já os gráficos construídos utilizando-se o procedimento 3, permitem a visualização da relação entre as modificações nas expressões algébricas das funções e as modificações nos respectivos gráficos e vice-versa.

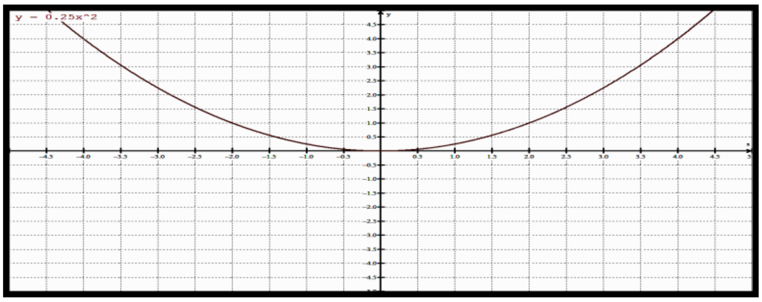
Na atividade analisada, os autores privilegiaram apenas o procedimento 1. Também podemos verificar que os valores escolhidos para “x” são todos números inteiros, o que dificulta o entendimento do estudante ao ler que “o gráfico é uma curva contínua e crescente”, apesar da explicação preliminar de que a curva seria obtida mediante a consideração de todos os números reais em certo intervalo.

Uma alternativa ao procedimento comum de “obter o desenho de uma curva contínua a partir de alguns de seus pontos”, como geralmente acontece pode ser feita usando um *software*, por exemplo, o Winplot. Diferentemente do que é proposto pelos autores de LD-1, o gráfico 1 esboçado pelo *software* é coerente com a situação problema proposta, pois a curva desenhada é contínua para todos os valores e crescente. Os pontos importantes para o problema podem facilmente ser encontrados na figura e, fazendo isto, os alunos realizam o que Duval chama de *conversões*, isto é, transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: no caso, passar da escrita algébrica de uma função à sua representação gráfica e vice-versa.

Gráfico 1: $f(x)=0,25x^2$, p/ $x \geq 0$

A escolha do contexto do problema pode acarretar alguns problemas para a construção, leitura e interpretação gráfica. O aluno pode ser induzido a pensar, por exemplo, que toda função tem gráfico contínuo (curva traçada pela junção de um número finito de pontos marcados no plano cartesiano). A referência aos números negativos também fica prejudicada.

Gráfico 2: $f(x)=0,25x^2$, p/ $x \in \mathbb{R}$

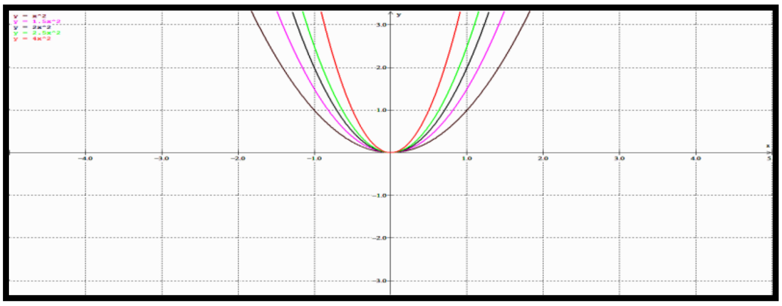


Os gráficos 1 e 2 são facilmente esboçados pelo *software* Winplot, sem a necessidade de elaborar tabelas com valores . A partir deles é necessário, no entanto, que o professor elabore um roteiro de questionamentos para os alunos, que favoreça a observação e a interpretação das informações.

Uma sugestão interessante de trabalho com o *software* Winplot é explorar a família de funções quadráticas do tipo $f(x)=ax^2$ p/ $x \in R$ onde $a>0$ traçadas em um mesmo plano cartesiano propondo uma análise da família de funções do tipo em questão. Vejamos então: a) $f(x)= x^2$; b) $f(x)= 1{,}5x^2$, c) $f(x)= 2x^2$; d) $f(x)= 2{,}5x^2$, e) $f(x)= 4x^2$

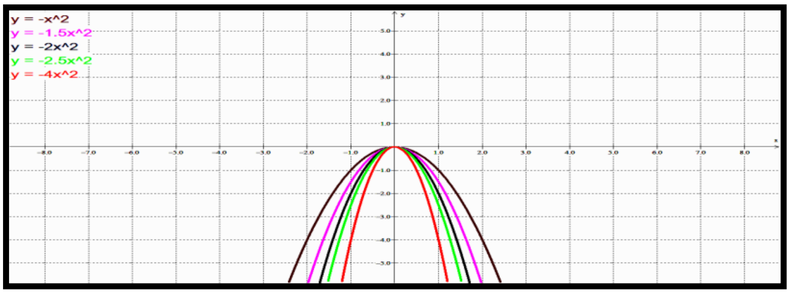
Questões para discussão: 1) O que podemos observar que acontece nos gráficos quando o coeficiente (positivo) “a” de x^2 assume valores cada vez maiores? 2) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Qual?

Gráfico 3: Família de funções do $f(x)=ax^2$, p/ $x \in R$ onde $a>0$



Ainda podemos aproveitar a sugestão acima e estudar os casos onde o parâmetro $a<0$. Vejamos então: a) $f(x)= -x^2$; b)$f(x)= -1{,}5x^2$; c)$f(x)= -2x^2$; d)$f(x)= -2{,}5x^2$; e)$f(x)= -4x^2$
Questões para discussão: 1) O que podemos observar que acontece nos gráficos quando o coeficiente “a” de x^2 assume valores absolutos cada vez maiores? 2) As curvas obtidas possuem algum ponto em comum? Qual? 3) O que se pode dizer a respeito do sinal dos valores de todas essas funções, conforme a variável independente x percorre o eixo real?

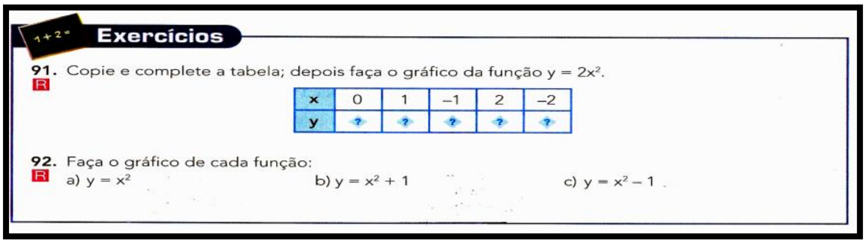
Gráfico 4: Família de funções do tipo $f(x)=ax^2$, p/ $x \in R$ onde $a<0$



Nessas situações de aprendizagens buscamos analisar e estabelecer um significado matemático para o parâmetro “a” simulando algumas situações, pois quando o parâmetro “a” é alterado é possível observar que o gráfico também sofre alterações.

Nessas situações de aprendizagens é possível analisar e estabelecer um significado matemático para o parâmetro “a” simulando algumas situações, pois quando o parâmetro “a” é alterado é possível observar que o gráfico também sofre alterações.

Figura 3: Fonte LD-1, 2005, p. 293



Exercícios

91. Copie e complete a tabela; depois faça o gráfico da função $y = 2x^2$.

x	0	1	–1	2	–2
y	?	?	?	?	?

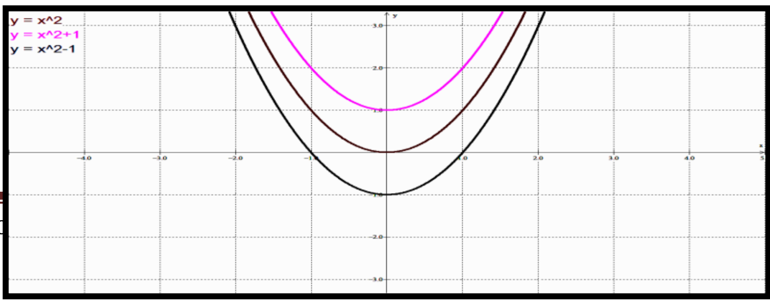
92. Faça o gráfico de cada função:
a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x^2 - 1$

No exercício 91 proposto em LD-1, os autores privilegiam o que Duval (2003) chama de *tratamento*, ou seja, transformações de representações dentro de um mesmo registro. É interessante observarmos que é solicitado ainda o gráfico da função em questão evidenciando um conflito entre registros, ou seja, a conversão não reflete a realidade.

A utilização de um *software* como o Winplot é bastante conveniente em exercícios como o de número 92, que aparece na figura acima. Com ele (o *software*) é possível realizar um estudo mais detalhado nas funções quadráticas do tipo $f(x)=ax^2+c$, p/ $x \in R$, com $a>0$ e responder algumas questões convenientes ao tema.

Questões: 1) O que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$ quando se soma ou se subtrai uma constante, para se obter uma nova função? 2) Quando somamos uma constante, positiva ou negativa, quantas e quais são as raízes das funções obtidas?

Gráfico 5: Família de funções do tipo $f(x)=ax^2+c$ onde $a>0$



Podemos sugerir a partir desse estudo o caso de a<0 para a família de funções do tipo $f(x)=ax^2+c$, p/ $x \in R$

a)$f(x) = x^2$; b)$f(x) = -x^2+1$; c)$f(x) = -x^2-1$

Questões: 1) O que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$ quando se soma ou se subtrai uma constante "c", para se obter uma nova função? 2) Quando somamos uma constante, positiva ou negativa, quantas e quais são as raízes das funções obtidas?

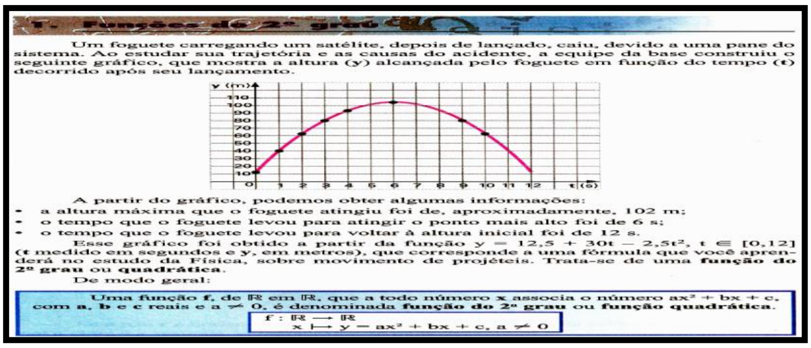
Gráfico 6: Família de funções do tipo $f(x)=ax^2+c$ onde a<0

Para Duval:

> O conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um "objeto" descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação nestas imagens acarreta uma modificação na escrita da expressão algébrica correspondente, determinando uma variável visual pertinente para a interpretação do gráfico. (DUVAL, 1988).

3.2 Análise do LD-2

Figura 4: Fonte: LD-2 pg. 131



1. Funções do 2º grau

Um foguete carregando um satélite, depois de lançado, caiu, devido a uma pane do sistema. Ao estudar sua trajetória e as causas do acidente, a equipe da base construiu o seguinte gráfico, que mostra a altura (y) alcançada pelo foguete em função do tempo (t) decorrido após seu lançamento.

A partir do gráfico, podemos obter algumas informações:

- a altura máxima que o foguete atingiu foi de, aproximadamente, 102 m;
- o tempo que o foguete levou para atingir o ponto mais alto foi de 6 s;
- o tempo que o foguete levou para voltar à altura inicial foi de 12 s.

Esse gráfico foi obtido a partir da função $y = 12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2$, $t \in [0,12]$ (t medido em segundos e y, em metros), que corresponde a uma fórmula que você aprenderá no estudo da Física, sobre movimento de projéteis. Trata-se de uma **função do 2º grau** ou **quadrática**.

De modo geral:

Uma função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número **x** associa o número $ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, é denominada **função do 2º grau** ou **função quadrática**.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

A figura 4 refere-se ao estudo da função quadrática descrevendo a relação tempo x altura de certo acontecimento. É estabelecida então uma conexão entre a Matemática e a física pela aplicação de um caso particular da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Nenhuma referência é feita ao significado matemático dos parâmetros a, b e c. Não apresentam registros do tratamento realizado, ou seja, das transformações de representações dentro do mesmo registro: por exemplo, não explicam como encontraram os pontos cartesianos no gráfico.

Tratamentos e conversões são tipos de transformações de representações semióticas muito diferentes. Neste caso, o tratamento não foi apresentado, ou seja, a equação não foi resolvida e nem os pontos calculados, mas as conversões foram realizadas, ou seja, foi feita a passagem da escrita algébrica da função para a sua representação gráfica.

Para Duval (2003) é comum que se considere a conversão de representações como uma operação simples e local, ou seja, seria reduzida a uma codificação. Por exemplo, passar de uma função para sua representação gráfica seria aplicar uma regra, na qual um ponto está associado a um par de números em um plano cartesiano. No entanto, salienta que:

> [...] tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens, mas igualmente de um ponto de vista teórico, pois a regra de codificação permite uma leitura pontual das representações gráficas. Essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa. [...] (DUVAL, 2003, p17).

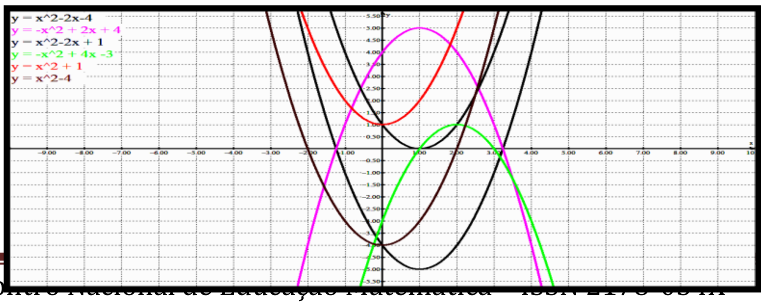
Embora seja válido estudar um problema como o apresentado pelos autores de LD-2, tal situação pressupõe que os alunos já tenham bons conhecimentos do conceito de função. Assim como, as competências para transitar entre os registros semióticos realizando tratamento e conversão simultaneamente.

A seguir uma proposta de trabalho utilizando o *software* Winplot, que pode auxiliar o professor a desenvolver as conversões necessárias para uma aprendizagem significativa do objeto matemático função quadrática. Baseada nos estudos até aqui apresentados.

1. Utilizar o software Winplot para esboçar no mesmo plano, os gráficos das seguintes funções trinômios do 2º grau:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$; b) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$; c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; d) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; e) $f(x) = x^2 + 1$; f) $f(x) = x^2 - 4$

Gráfico 7: Família de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$



2. Observações e conjecturas que podem ser feitas com a ajuda do professor:

a) Comparando as funções dadas em “a” e “b”, por $y=x^2–2x–4$e $y =–x^2+2x + 4$, cujos termos são respectivamente opostos, observamos que:

- Os gráficos são simétricos em relação ao eixo x, das abscissas. Os termos independentes -4 (em “a”) e +4 (em “b”) determinam os pontos de intersecção do gráfico com o eixo y, das ordenadas. As duas funções se anulam em dois pontos, ou seja, os gráficos que as representam intersectam o eixo dos x, em dois pontos distintos; além disso, os pontos de intersecção de seus gráficos com o eixo dos x coincidem - os zeros dessas duas funções são os mesmos. O sinal do coeficiente numérico do termo em x^2 determina o sentido da abertura da parábola: em “a” esse coeficiente é positivo e a curvatura é voltada para cima e em “b” esse coeficiente é negativo e a curvatura é voltada para baixo.

Conclusão: Multiplicando por -1 a expressão da função representada em “a”, obtemos a função representada em “b”, e nesse caso dizemos que:

Ocorreu uma reflexão do gráfico em relação ao eixo dos x, ou seja, o gráfico da função representada em “b” é o resultado de uma reflexão do gráfico da função representada em “a”, em relação ao eixo dos x;

- Os zeros da função continuaram os mesmos, a curvatura da parábola ficou invertida e o vértice da parábola (1,-5) passou a ser (1,5). Quanto às imagens das duas funções, temos: $\mathrm{Im}(f_a)=\{y\in\Re / y\geq -5\}$ e $\mathrm{Im}(\mathrm{f_b})=\{\mathrm{y}\in\Re/\mathrm{y}\leq 5\}$

b) observando o gráfico da função representada no item “c”, $y=x^2-2x + 1$ temos: O termo independente (+1) determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo do y.

- O gráfico intersecta o eixo dos x em um único ponto, ou seja, a função tem um único zero se anula para um único valor do domínio. O coeficiente numérico do termo em x^2 é 1 (positivo), determinando a abertura da parábola voltada para cima.

c) no caso da função representada por $y=–x^2+4x–3$, observa-se que:

- O coeficiente numérico do termo em x^2 é -1 (negativo), determinando a abertura da parábola voltada para baixo. O gráfico intersecta o eixo dos y no ponto -3 (termo independente, na expressão algébrica que representa a função). Intersecta o eixo dos x em um único ponto de coordenadas (2, 0), logo, a função possui um único zero, ou a função se anula para um único valor de x, que é 2.

d) comparando os gráficos das funções representadas por $y=x^2+1$ (item e), $y=x^2-4$ (item f) com o gráfico correspondente a $y=x^2$ (expressão algébrica da função prototípica), observamos que o gráfico que corresponde a $y=x^2+1$ é o resultado de uma translação do gráfico que representa $y=x^2$, segundo o eixo dos y, no sentido positivo. O gráfico que corresponde a $y=x^2-4$ é o resultado de uma translação do gráfico correspondente a $y=x^2$, segundo o eixo dos y, em sentido negativo.

4. Considerações finais

Durante o desenvolvimento da análise das atividades de estudo sobre funções quadráticas foi possível verificar que os autores de LD-1 e LD-2 apresentam diferentes registros semióticos para o estudo de funções tais como: expressões algébricas, gráficos cartesianos, tabelas e representações geométricas. Ressaltamos, no entanto que somente a diversidade de registros não garante a compreensão do objeto matemático. De acordo com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, é necessário que utilizemos diferentes registros de representação do objeto, mas é a atividade de conversão que conduz à compreensão em Matemática.

Observamos que os autores de LD-1 e LD-2, indicam subliminarmente que é suficiente obter alguns pares (x,y) de números inteiros, em uma tabela, para obtermos o gráfico de e $y=f(x)$, mesmo que este seja uma curva continua

Por outro lado, as atividades propostas neste estudo apresentam possibilidades de transitar em pelo menos dois registros semióticos diferentes com o auxilio do software Winplot que dinamiza as representações gráficas, como proposto inicialmente.

5. Referências

DAMM, Regina Flemming. Registro de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 135-153.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

IEZZI, Gelson.; DOLCE, Osvaldo.; MACHADO, Antônio. Matemática e realidade: 8ª série – 5.ed. São Paulo: Atual, 2005

FLORES, Claudia Regina. Registro de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. Bolema, Rio Claro, ano 19, n.26,p.77-102, 2006 .

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais MACHADO, S.D.(org). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. P. 149-160.

PÁDUA, Elisete Matallo Marchesini. Metodologia de pesquisa: Abordagem teórico-prática. 11. Ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática. V.1. 4.ed. 1ª série. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004.