DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA PARA AS NOÇÕES BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL FINITAMENTE GERADO

Eneias de Almeida Prado[1]
Faculdade de Tecnologia Eniac
eneias_prado@hotmail.com

Resumo:
Tenho como objetivo apresentar uma decomposição genética para as noções base e dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado. O aporte teórico que permite descrever a decomposição genética é a APOS de Ed. Dubinsky e seus colaboradores. Como resultado apresento a decomposição genética, sobre os três pontos de vista da noção base: um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e a justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes. E ainda, estabeleço a correlação com a invariante dimensão.

Palavras-chave: Educação Matemática; Decomposição Genética; Álgebra Linear; Base; Dimensão.

1. Introdução

Tenho, neste artigo, o objetivo de apresentar uma decomposição genética para as noções base e dimensão de um espaço vetorial, como resposta, as questões: qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado[2]? E, quais as possíveis correlações existentes entre as noções elementares de Álgebra Linear?

Segundo Dorier *et al.* (1997) base e dimensão são noções elementares de Álgebra Linear – AL – que merecem a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática. As noções elementares não são necessariamente as mais simples. No contexto da AL, o termo *elementar* significa que são noções essenciais para construir todas as demais noções de AL.

A relevância deste trabalho se justifica, também, pelo fato da AL no decorrer dos anos ter alcançado seu papel de destaque no estudo de Matemática. Segundo Dubinsky

[1] Doutorando do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PPGEM – da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (bolsista CAPES), professor de Matemática e Desenho Geométrico no Colégio Parthenon e membro do GPEA – Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – da PUC/SP.
[2] De agora em diante, ao dizer *espaço vetorial* refiro-me a um $\mathbb{R}$-*espaço vetorial finitamente gerado*.

(2001), sua importância está atrelada às aplicações na própria Matemática, como por exemplo, no caso do *Cálculo com múltiplas variáveis*, no qual a derivada é quase incompreensível sem a utilização de matrizes e transformações lineares, no estudo das equações diferenciais lineares, na geometria diferencial e na análise funcional.

2. Aspectos do aporte teórico APOS

O aporte teórico que define o termo decomposição genética é a APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores, que baseado em Prado (2009, 2010), surgiu como uma adaptação das ideias de Piaget ao ensino de matemática superior. Do ponto de vista do aporte APOS a construção do conhecimento matemático passa por três etapas básicas: ação, processo e objeto, não necessariamente nessa ordem. O "S" se refere à palavra esquema no sentido de Piaget.

A passagem de uma etapa a outra se dá por meio de abstrações reflexionantes, que podem se caracterizar como interiorização, coordenação, encapsulação, e reversibilidade.

A *interiorização* é constituída por construções mentais de um processo interno referente a uma série de ações sobre o objeto cognitivo que podem ser executadas na mente, sem necessariamente passar por todos os passos específicos. A *coordenação* é o ato cognitivo de fazer coincidir dois ou mais processos para construir um novo processo. A *encapsulação* é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático). A *reversibilidade* se caracteriza pelo fato do sujeito ser capaz de obter um novo processo invertendo um processo interiorizado.

Ação é uma transformação de um objeto percebida pelo indivíduo como algo externo. Essa transformação se dá por meio de uma reação a uma indicação que fornece informações precisas sobre os passos a serem dados. Um indivíduo que possui uma compreensão de uma transformação dada pode executar uma ação, quando necessário, mas não está limitado a operar em nível de ação.

O *processo* se dá quando o indivíduo repete uma ação por várias vezes de forma que há uma reflexão que o permita interiorizar tal ação. Esta construção faz com que o indivíduo realize a mesma ação sem que necessariamente haja estímulos externos, ou seja, o indivíduo passa a ter mais controle sobre a transformação e é capaz de descrever os passos envolvidos como também os inverter quando necessário.

O *objeto* é a encapsulação de um processo e ocorre quando o indivíduo reflete sobre as ações aplicadas a um processo específico e está consciente do processo como um todo, ou seja, é capaz de executar ações com o objeto e, quando necessário, pode desencapsular o objeto e voltar ao processo que lhe deu origem.

Um indivíduo ao formar uma coleção individual de ações, processo e objetos, pode relacioná-las e formar um *esquema* para o conceito estudado, e ainda pode agregar estas partes a outros esquemas previamente construídos.

Ao utilizar a teoria APOS em uma investigação deve-se fazer uma *decomposição genética* dos conceitos de interesse, essa decomposição tem como objetivo descrever um trajeto possível para a formação de um dado conceito por parte do estudante, porém pode não ser o único. O importante é que, qualquer decomposição genética de um conceito seja um instrumento que dê conta de descrever o comportamento do sujeito observado.

3. Decomposição Genética

Euán (2007) e Euán et al. (2008) apresentaram uma decomposição genética da noção base de um espaço vetorial, no entanto, segundo Trigueros (2005), uma decomposição genética não é algo fechado, pronto, ela depende, geralmente, da maneira como o pesquisador concebe a noção em estudo. Assim, Prado (2009, 2010) apresentou um refinamento da decomposição genética feita pelas autoras utilizando o que concebe como sendo base de um espaço vetorial: um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e a justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes.

Nesse artigo, recorte da pesquisa Prado (2010), apresento uma decomposição genética para as noções de base e dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado.

No que segue, estabeleço o código, uma *ação tal*, indico por Ax, um *processo tal*, indico por Px e um *objeto tal*, indico por Ox[3], com $x \in \mathbb{N}$. Sendo que a primeira vez que citar uma ação, ou processo, ou objeto, apresento a definição entre parênteses e em itálico.

Assim, proponho como necessário para a construção da noção base de um espaço vetorial que o indivíduo tenha concepção objeto sobre conjunto, subconjunto e pertinência de elemento a conjunto, além de concepção processo sobre espaço vetorial.

[3] No anexo 1, existe uma lista com tais códigos, que deverá ser utilizado durante a leitura desta seção.

As ações que considero como sendo necessárias para um indivíduo construir a noção base de um espaço vetorial, são: *A1 (operar com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais)* e *A7 (verificar a combinação linear existente entre vetores, a partir da ação A1).* As demais concepções que o indivíduo deve possuir, em parte, estão relacionadas à concepção processo sobre espaço vetorial e, em parte, servem de suporte para a construção da noção de base de um espaço vetorial.

O indivíduo ao generalizar a ação *A1* constrói a ação *A7* que pode ser interiorizada no processo *P1(estabelecer se um vetor dado, ou um conjunto de vetores, pertencentes a um espaço vetorial podem ser escritos como combinação linear entre vetores pertencentes a um conjunto dado).* Esse processo pode ser encapsulado no objeto *O1 (Conjunto Gerador)* que, posteriormente, possibilita ao indivíduo abstrair reflexivamente e construir o processo *P2 (reconhecer quais os subconjuntos do espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto de vetores desse espaço)*, que poderá ser encapsulado no objeto *O4 (Conjunto Gerador/Espaço Gerado).*

Do objeto *O4*, suponho, por meio da reversibilidade, que o indivíduo poderá construir o processo *P6 (obter um conjunto minimal gerador),* pois como afirmam Coelho e Lourenço (2001, p.43), "[...] um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores e, muitas vezes, é importante termos um conjunto gerador que seja o *menor* possível". O indivíduo, então, poderá encapsular o objeto *O5(base, como sendo um conjunto minimal gerador).*

Proponho ainda que o indivíduo coordene o objeto *O4* e o processo *P6*, de maneira que realize a ação *A8 (verificar se os vetores pertencentes ao conjunto gerador podem ser escritos como combinações lineares uns dos outros).* Caso nenhum dos vetores considerados possam ser escritos como combinações lineares uns dos outros, o indivíduo escolherá mais vetores no conjunto gerador e verificará se esses outros vetores continuam ou não sendo combinações lineares um dos outros. Caso haja vetores que possam ser escritos como combinação linear, o indivíduo realiza a ação *A9 (eliminar de um conjunto gerador os vetores que possam ser escritos como combinação linear uns dos outros).* Assim, o indivíduo repete a ação *A9*, até que todos os vetores desse conjunto não possam ser escritos, como combinações lineares entre si.

Desta maneira, o indivíduo ao coordenar as ações *A8* e *A9* constrói o processo *P3 (determinar a dependência linear em um conjunto).* Assim, o processo *P3*, posteriormente, será encapsulado no objeto *O2 (Dependência Linear).*

Em seguida, ao reverter o objeto *O2* poderá construir o processo *P7 (obter um conjunto maximal linearmente independente)*. E, posteriormente, encapsulá-lo no objeto *O6 (base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente).*

Um indivíduo, ao coordenar os processos *P6* e *P7*, poderá construir o processo *P8 (identificar um conjunto minimal gerador, como sendo um maximal linearmente independente*). Esse processo poderá, ainda, ser encapsulado no objeto *O3 (base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente*). Na figura 1 apresento as construções descritas acima.

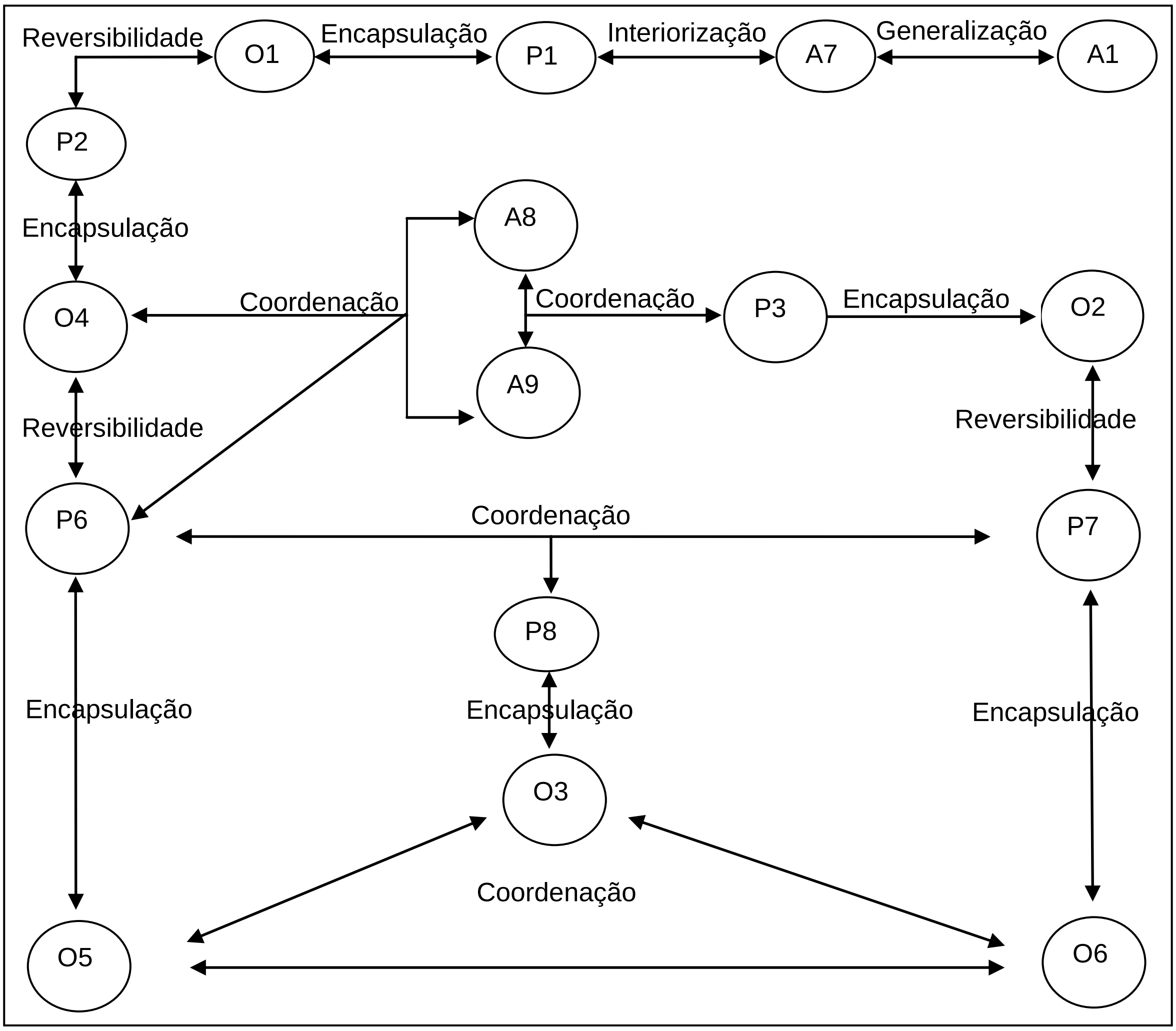

Figura 11: Refinamento

Apresentada a decomposição genética para a noção base de um espaço vetorial, no que segue estabeleço correlações entre as ações elementares de AL, sobretudo, com o importante invariante dessa estrutura, a *dimensão.*

Conforme ilustrado na Figura 1, o indivíduo executa a ação *A1* com elementos de diferentes espaços vetoriais. Essa ação é generalizada, e ele constrói a ação *A7*. Essas duas ações sustentam a decomposição genética a qual proponho, pois, por meio delas, o indivíduo poderá construir a noção base de um espaço vetorial, segundo os três pontos de vista: um conjunto maximal de vetores linearmente independentes; um conjunto minimal gerador; e um conjunto gerador linearmente independente.

O indivíduo após ter generalizado a ação *A1*, repete a ação *A7* com diversos vetores de espaços vetoriais distintos e a interioriza no processo *P1*. Tendo interiorizado esse processo, ele por meio da coordenação da ação *A1* com *P1*, poderá construir o processo *P9 (expressar todas as combinações lineares que podem ser obtidas a partir de um conjunto de vetores)*.

O indivíduo revertendo o processo *P9* poderá construir o processo *P10 (identificar subconjuntos de vetores de um espaço vetorial que são conjuntos geradores desse espaço)*. Prosseguindo, o indivíduo coordena os processos *P9* e *P10* de maneira que possa construir o objeto matemático conjunto gerador e, consequentemente, o objeto espaço gerado – *O4.*

Assim, o indivíduo tendo diversos conjuntos geradores para um mesmo espaço vetorial, procura "descartar" os vetores "desnecessários", pois são combinações lineares uns dos outros. Desta forma, coordena *A8* e *A9* no processo *P6* que, posteriormente, é encapsulado no objeto *O5 (base, como sendo um conjunto minimal gerador*).

Ao reverter o processo *P6*, o indivíduo poderá construir a ação *A10 (identificar conjuntos minimais geradores para um mesmo espaço vetorial, e observar a existência de um invariante)*.Esta ação é interiorizada no processo *P11 (dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão)*, que é, então, encapsulado no objeto *O7 (Dimensão)*, que coordenado com *O4* poderá construir *O8 (base, como sendo um conjunto gerador com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço)*.

Essa construção está representada na Figura 2.

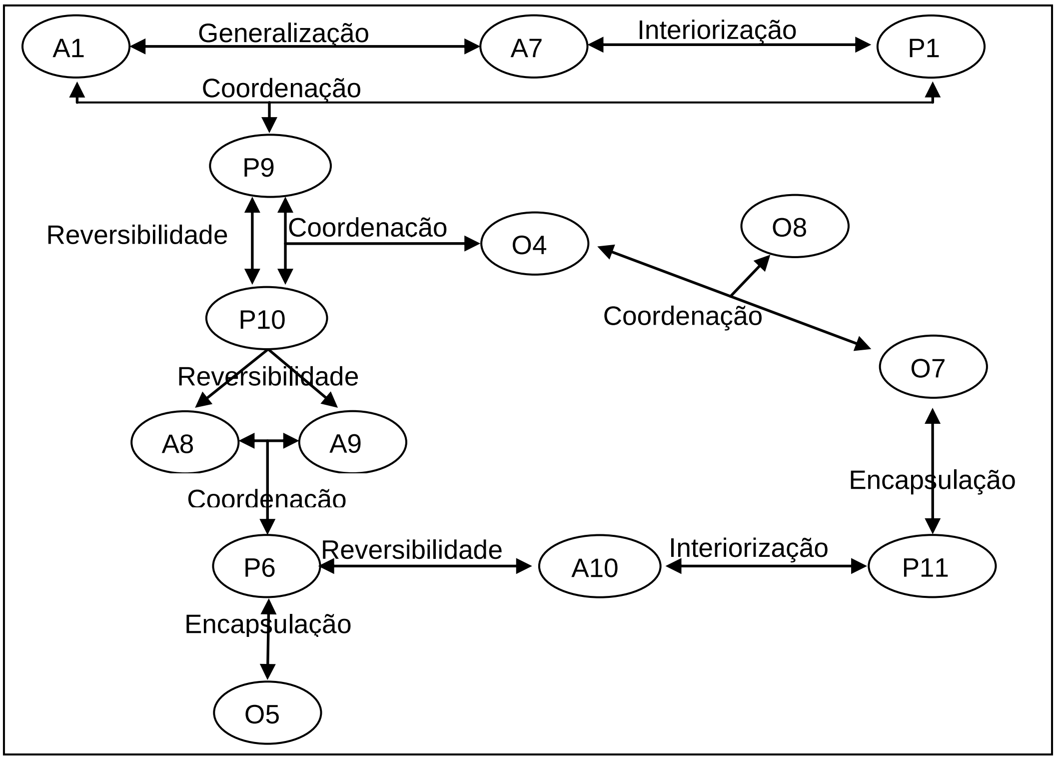

Figura 2: Construção das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial

Essa construção permitiu o desenvolvimento das noções: combinação linear, conjunto gerador/espaço gerado, dimensão e base de um espaço vetorial. Como a noção dependência linear de um conjunto está implícita nessa construção, no que segue, descrevo-a de maneira explícita e, consequentemente, apresento a construção de outro ponto de vista para a noção de base de um espaço vetorial, ou seja, como sendo um conjunto maximal linearmente independente.

Para iniciar tal construção, retomo a ideia de Costa e Catarino (2007) que se assume o fato da aprendizagem em Matemática pressupor a conexão de novas noções a noções já estudadas. O fato, também, foi discutido nos trabalhos de Araújo (2002) e Padredi (2003). Mas, Costa e Catarino (2007) centralizaram em seu estudo a descontinuidade existente entre as noções de colinearidade e dependência linear.

Penso que sempre a noção de dependência linear em um conjunto aparenta estar atrelada à necessidade de obter um conjunto minimal gerador, ou a necessidade de se escrever combinações lineares de uma única maneira. Assim, questiono será possível construir a noção de base de um espaço vetorial iniciando pela noção de dependência linear?

Na tentativa de minimizar a descontinuidade descrita por Costa e Catarino (2007) e responder à questão, proponho que o indivíduo retome a ação *A1*. No entanto, ele executará a ação com vetores pertencentes ao $\mathbb{R}^2$ e ao $\mathbb{R}^3$. Posteriormente, generalizará essa ação de maneira que possa construir a ação *A7*, para esses espaços.

Então, deverá recorrer à Geometria Analítica e retomar os objetos vetores colineares e vetores coplanares. Não estou interessado no vetor com sua representação “geométrica”, pois esta poderá ser um obstáculo para o indivíduo, assim como verificou Gueudet-Chartier (2000).

Dessa forma, com o uso da coordenação entre a ação *A7* com a ação *A11 (verificar se os vetores são colineares (ou coplanares))*, o indivíduo constrói o processo *P12 (dizer se um vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) depende do outro ou não)*. Há, agora, a necessidade de o indivíduo generalizar esta definição para todos os espaços vetoriais, porém Dreyfus afirma que

> na transição do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ concreto para um espaço vetorial abstrato, o foco de atenção repousa nas relações entre os vetores [...]. A fim de fazer essa transição, é necessário que o sujeito seja capaz de conceber o objeto ‘vetor’ em termos puramente de suas relações com outros objetos semelhantes, ou diferentes (vetores ou escalares), e aceite que o próprio objeto não é mais especificado por mais nenhuma outra propriedade intrínseca. Considerando somente essas relações, possibilita o sujeito tirar conclusões a partir delas que geralmente serão válidas, independentemente das propriedades intrínsecas específicas desses vetores (DREYFUS, 1991, p.36)

Assim, o indivíduo, ao generalizar a ação *A11* e o processo *P12*, constrói o objeto *O2* e, a partir desse objeto, o indivíduo utiliza-se da reversibilidade e constrói a ação *A12 (obter conjuntos linearmente independentes e, observar a existência de conjuntos linearmente independentes com diferentes números de vetores)*. Esta ação é, então, interiorizada no processo *P8* que, posteriormente, será encapsulado no objeto *O6*.

Dessa maneira, o indivíduo vai considerar o conjunto de vetores obtido, como sendo o maior conjunto de vetores linearmente independentes, quando qualquer outro vetor considerado no espaço e incluído ao conjunto torná-lo um conjunto linearmente dependente.

Depois, o indivíduo, assim como fez para os conjuntos geradores, reverte o processo *P8* e constrói a ação *A13 (identificar para um mesmo espaço vetorial, distintos subconjuntos maximais linearmente independentes e, observar a existência de um invariante).*

A ação *A13* é interiorizada no processo *P13 (dizer qual o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser obtido em um determinado espaço vetorial)*. Esse processo é, então, encapsulado no objeto *O7***.** Assim, o indivíduo coordenando o objeto *O7* com o objeto *O2*, poderá construir o objeto *O9 (base, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço).*

A construção da noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, da noção de dimensão e a correlação entre essas noções é representada na Figura 3.

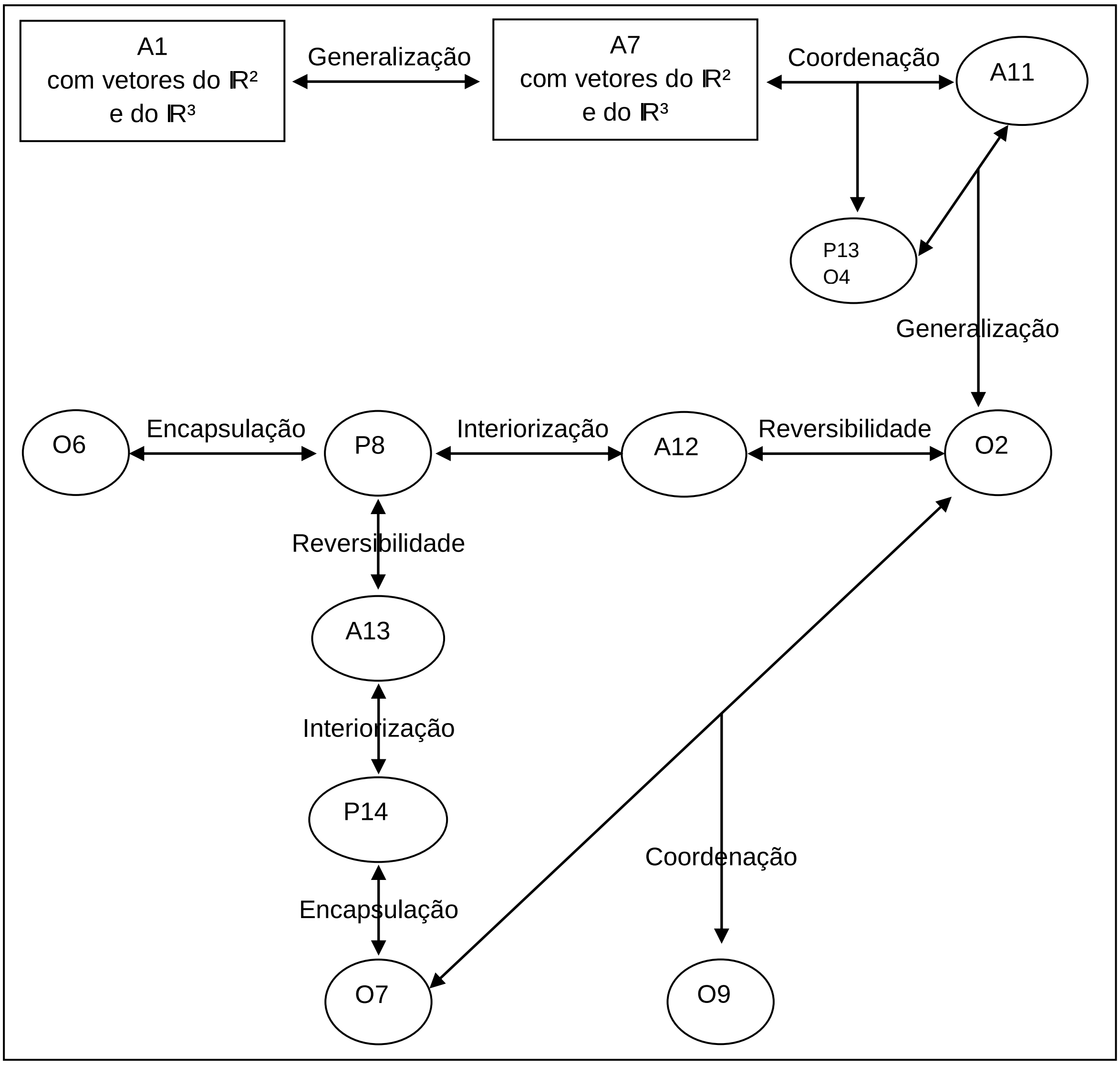

Figura 3: Base: um conjunto maximal linearmente independente

Descrevi a construção da noção de base de um espaço vetorial sob dois aspectos principais, base como sendo um subconjunto maximal de vetores linearmente independentes e como sendo um subconjunto minimal gerador, assim como a correlação com a noção de dimensão.

Sendo a *intuição* um dos processos que permeia o pensamento matemático avançado, pois, segundo Dreyfus (1991, p.40), é a que "ocorre imediatamente da cognição direta, sem evidência de pensamento racional". O indivíduo pode construir o processo *P14 (intuir que: ou as duas definições para a noção de base de um espaço vetorial são complementares ou são equivalentes).*

Esta indagação visa a conduzir o indivíduo a um segundo processo, o *P15 (verificar P14),* que Dreyfus (1991, p.40) define, como sendo o ato de "utilizar recursos para se convencer de que um resultado realmente responde à questão que foi feita e se responde corretamente. Um caminho útil é verificar com o uso de um procedimento inverso”.

Aqui vale salientar que, segundo Dreyfus,

> comumente, a verificação não é vista pelo estudante como uma parte essencial da atividade matemática. Embora a verificação possa lhe dar muita segurança, a maioria dos estudantes parece não estar muito interessado nessa segurança. Isto pode e deve ser modificado pela transferência de mais responsabilidade pelo processo de aprendizagem do professor para o estudante [...] (DREYFUS, 1991, p.40-41).

Com esta abordagem, proponho que a primeira ação que o indivíduo irá realizar para verificar suas hipóteses, será obter um subconjunto maximal de vetores linearmente independentes do espaço vetorial. Feito isso, o indivíduo construirá a ação *A14 (obter um subconjunto maximal linearmente independente e verificar se esse subconjunto é um subconjunto minimal gerador*). Posteriormente, executará a ação *A15 (obter um subconjunto minimal gerador e verificar se esse subconjunto é maximal linearmente independente).*

O indivíduo realiza essas ações para diversos espaços vetoriais, tanto considerando um subconjunto maximal linearmente independente como considerando um subconjunto minimal gerador, que o conduzirá à ação *A16 (conjecturar a existência de uma equivalência entre os objetos O5 e O6)* e, utilizando os processos mais formais, o indivíduo provará que todo conjunto maximal linearmente independente é, ao mesmo tempo, um conjunto minimal gerador.

O processo *P15* é, então, encapsulado no O3, conforme é ilustrado na Figura 4.

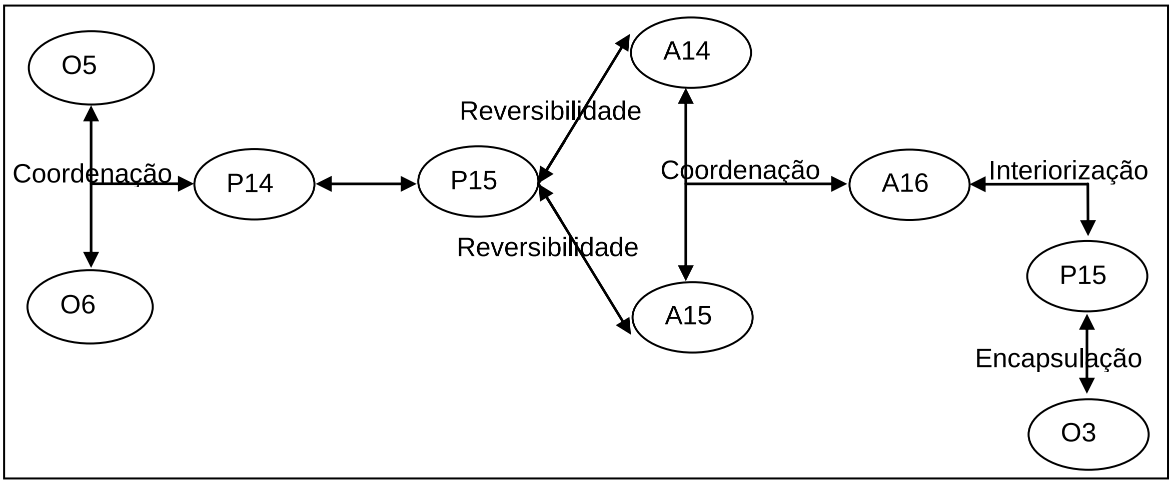

Figura 4: Base: um conjunto gerador linearmente independente

Observo que, embora tenha apresentado separadamente a construção da noção base, segundo os pontos de vista adotados, não há uma “desarticulação”, mas uma preferência por um deles. Cabe salientar que a consistência de uma concepção objeto se dá quando estas construções estão completamente imbricadas.

Saliento que a instituição de categorias é necessária, pois é um meio provisório para organizar um conjunto de dados. Como afirmam Dubinsky e Lewin (1986), essas categorias constituem-se em um instrumento indispensável para a análise de processos formativos que, segundo a epistemologia genética, ocorrem de maneira dinâmica.

4. Considerações Finais

O objetivo enunciado foi o de apresentar uma decomposição genética para as noções base e dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado. Com o aporte APOS descrevi um possível caminho para a construção das noções base e dimensão de um espaço vetorial.

Na decomposição genética que apresentei, descrevi a construção da noção base de um espaço vetorial sob três pontos de vista, iluminados, sobretudo, por Dorier *et al.* (1997) e Padredi (2003), a saber, base, como sendo um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, pois o estudante poderá, assim, refletir sobre a vantagem de empregar uma ou outra abordagem, dependendo da situação.

Na construção da noção base, como sendo um conjunto minimal gerador, foi proposto que o estudante estabelecesse correlações entre as noções: combinação linear, conjunto gerador/espaço gerado e dimensão.

A construção da noção base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente, aparece implícita em Coelho e Lourenço (2001) e nas entrevistas realizadas por Padredi (2003) e, ainda, surge da necessidade de se obter o menor conjunto gerador. Assim, busquei construir a noção base de um espaço vetorial, segundo esse ponto de vista, iniciando pela noção dependência linear e não pela de conjunto gerador.

Assim, com a noção base tendo sido construída por esses dois pontos de vista, foi proposto que o estudante utilizasse o processo da *intuição* e o processo de *verificação*, ambos descritos por Dreyfus (1991), para construir a noção base como sendo uma justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal linearmente independente, isto é, base como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Ao descrever essas construções, identifiquei possíveis correlações que um estudante pode realizar entre as noções elementares de AL. Dentre estas correlações, um estudante, também, pode conceber base, como sendo um conjunto linearmente independente (ou gerador) com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço. Como cita Parraguez (2009), a dimensão é necessária durante a construção das noções elementares de AL, afinal, permitirá o estudante caracterizar um espaço vetorial.

Assim, espero ter contribuído com a área, pois com base na decomposição genética apresentada pode-se implementá-la de maneira que venha propiciar estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazer tais construções.

5. Referências

ARAÚJO, Cláudia C. V. B. **A matemática no livro didático de álgebra linear**. São Paulo, 2002. 110 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

COELHO, Flávio. U. e LOURENÇO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2001, p. 245.

COSTA, Cecília e CATARINO, Paula. *Da colinearidade no ensino secundário à dependência linear no ensino superior: Que descontinuidades?* **Quadrante**, Portugal, v. 16, n. 1, 2007, p.147-159.

DORIER, Jean-Luc *et al*. **L'enseignement de I'algèbre linéaire em question.** França: La Pensée Sauvage Editions, 1997. 331 p.

DREYFUS, Tommy. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. *In:* TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DUBINSKY, Ed e LEWIN, Philip. *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. *In:* **Journal of Mathematical Behavior**, *5. V., n. 1.* 1986. p. 55-92. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2009.

DUBINSKY, Ed. **Teaching and Learning Abstract Algebra and Linear Algebra: A Unified Approach.** *In:* H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.) P*roceedings of the 12th ICMI Study Conference*, 1,2,3 v.: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Melbourne: Melbourne University, 2001, p. 705-712.

EUÁN, Darly A. K. **Aprendizaje de la Base de un Espacio Vectorial desde el Punto de Vista de la Teoria APOE**. Distrito Federal - México, 2007. 336 p. Dissertação (Mestrado en Ciencias en Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional.

EUÁN, Darly A. K, TRIGUEROS, Maria e OKTAÇ, Asuman. *Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE.* **Educación Matemática**, México, v. 20, n.2, 2008, p.65-89.

GUEUDET-CHARTIER, Ghislaine. **Rôle Du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.** Grenoble 1 - França, 2000. 347 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz-IMAG, Université Joseph Fourier.

PARRAGUEZ, Marcela G. **Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial**. Distrito Federal - México, 2009. 166 p. Tese (Doutorado en Matemática Educativa). Centro de Investigación y en Ciencia Aplicada y Tecnologia Avanzada, Instituto Politécnico Nacional.

PADREDI, Zoraide do N. **As "Alavancas Metas" no discurso do professor de Álgebra Linear**. São Paulo, 2003. 179 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PRADO, E. de A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial. São Paulo**, 2010. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PRADO, E. de A., MACHADO, S. D. A. *Sugestão de Aprimoramento de uma Decomposição Genética do Conceito de Base de um Espaço Vetorial. In:* **IX Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste,** 2009.

TRIGUEROS, Maria. **Teoria APOS de Dubinsky e pesquisas realizadas com esse referencial**. Seminários proferidos na PUC/SP, entre os dias 21 e 31 de out. 2008.

ANEXO 1 – Lista com as ações, processos e objetos.

As ações em itálico foram propostas por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) e utilizadas por mim. Já, as demais, foram propostas por mim no refinamento ou na expansão apresentada. Para os processos e objetos, utilizo a mesma regra. A lista completa pode ser consultada em Prado (2010).

Lista de Ações

A1: operar (operações binárias que definem um espaço vetorial) com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais.

A7: verificar a combinação linear existente entre vetores, a partir da ação A1

A8: verificar se os vetores pertencentes ao conjunto gerador podem ser escritos como combinações lineares uns dos outros.

A9: eliminar de um conjunto gerador os vetores que possam ser escritos como combinação linear uns dos outros.

A10: identificar conjuntos minimais geradores para um mesmo espaço vetorial, e observar a existência de um invariante.

A11: verificar se os vetores são colineares (ou coplanares).

A12: obter conjuntos linearmente independentes e, observar a existência de conjuntos linearmente independentes com diferentes números de vetores.

A13: identificar para um mesmo espaço vetorial, distintos subconjuntos maximais linearmente independentes e, observar a existência de um invariante.

A14: obter um subconjunto maximal linearmente independente e verificar se esse subconjunto é um subconjunto minimal gerador.

A15: obter um subconjunto minimal gerador e verificar se esse subconjunto é maximal linearmente independente.

A16: conjecturar a existência de uma equivalência entre os objetos O5 e O6.

Lista de Processos

P1: estabelecer se um vetor dado, ou um conjunto de vetores, pertencentes a um espaço vetorial podem ser escritos como combinação linear entre vetores pertencentes a um conjunto dado.

P2: reconhecer quais os subconjuntos do espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto de vetores desse espaço.

P3: determinar a dependência linear em um conjunto.

P6: obter um conjunto minimal gerador.

P7: obter um conjunto maximal linearmente independente.

P8: identificar um conjunto minimal gerador, como sendo um maximal linearmente independente.

P9: expressar todas as combinações lineares que podem ser obtidas a partir de um conjunto de vetores.

P10: identificar subconjuntos de vetores de um espaço vetorial que são conjuntos geradores desse espaço.

P11: dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão.

P12: dizer se um vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) depende do outro ou não.

P13: dizer qual o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser obtido em um determinado espaço vetorial.

P14: intuir que os objetos O5 e O6 ou são complementares, ou são equivalentes.

P15: verificar o processo P14.

P16: sendo conhecida a dimensão de um espaço vetorial, qualquer candidato à base desse espaço, deve possuir o número de vetores, exatamente, igual à dimensão.

Lista de Objetos

O1: Conjunto Gerador.

O2: Dependência Linear.

O3: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador linearmente independente.

O4: Conjunto Gerador/Espaço Gerado.

O5: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto minimal gerador.

O6: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal linearmente independente.

O7: Dimensão.

O8: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço.

O9: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço.