

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM: CONSTRUINDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS

Renata Karoline Fernandes
UEL
renatakaroline08@hotmail.com

Magna Natalia Marin Pires
UEL
magnapires@yahoo.com.br

Resumo:

Este artigo apresentará uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) utilizando a estratégia de Resolução de Problemas na perspectiva da Educação Matemática Realística. A THA oportuniza aos professores construir um plano de aula rico em detalhes, com possíveis questionamentos, intervenções e conduções. A atividade que constitui esse trabalho é uma das tarefas da Early Algebra¹, que é uma área de pesquisa sobre a Educação Algébrica inicial, e tem como objetivo estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do Ensino Fundamental I.

Palavras-chave: Educação Matemática; Trajetória Hipotética de Aprendizagem; Resolução de Problemas.

1. Introdução

A Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem pensada por Hans Freudenthal por volta de 1970 e atualmente várias pesquisas são desenvolvidas nessa área, principalmente no Instituto Freudenthal, localizado na Holanda.

A RME se baseia na resolução de problemas matemáticos realísticos, ou seja, problemas que são possíveis de serem imaginados pelos alunos. Neste sentido, Treffers e Goffree (1985) afirmam que não indica necessariamente que os contextos das tarefas propostas devam pertencer ao mundo real, mas sim que a contextualização nessa abordagem deve oportunizar aos alunos situações nas quais sejam possíveis de serem feitas representações mentais que auxiliem na resolução dos problemas.

Na abordagem da RME a Matemática é vista como uma construção humana e sua aprendizagem ocorre por meio reinvenção guiada. Quando Freudenthal (1991) sugere que a Matemática deve ser reinventada em sala de aula pelos alunos e guiada pelos professores, indica que os alunos são capazes de redescobri-la com algum auxílio quando necessário.

¹ Mais informações em: <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp>

A Matemática em sala de aula não deve ser apresentada para os alunos como algo pronto e acabado, mas sim como algo que é da própria natureza do homem e que foi desenvolvido para auxiliar a vida das pessoas.

Para que a reinvenção aconteça em sala de aula, os alunos devem ser orientados e estimulados para que encontrem uma forma de solucionar qualquer tarefa proposta de maneira simples e informal, valorizando o que os alunos já sabem e construindo novos conhecimentos.

De acordo com a abordagem da RME a metodologia escolhida pelo professor para encaminhar o processo de ensino e aprendizagem deve oportunizar aos alunos situações para que estes possam reinventar a Matemática e neste sentido, a metodologia de Resolução de Problemas pode ser um caminho. Segundo Polya (1995) resolver um problema é encontrar um caminho desconhecido, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade para encontrar uma solução desejada, mas não alcançável imediatamente.

Para Buriasco (1995, p. 26) a resolução de problemas,

enquanto aproximação ao “fazer matemático”, encarada numa perspectiva de compreensão conceitual mais do que mero desenvolvimento mecânico de “habilidades”, deve preparar o estudante para converter-se em aprendiz independente, intérprete e usuário da matemática. Para cumprir essas metas, as aulas devem se tornar espaço e contexto em que a matemática adquira sentido no movimento contínuo de analisar e compreender, de perceber estruturas e relações estruturais, de expressar-se oralmente e por escrito com argumentos claros e coerentes.

Tendo em vista que a aula de matemática deve proporcionar momentos de reinvenção guiada, matematização no sentido de que se aprende matemática fazendo matemática, desenvolvimento de habilidades, construção de conhecimentos, análises e discussões, surge uma pergunta: como auxiliar professores a planejar aulas com a metodologia de resolução de problemas que proporcione tais momentos aos alunos?

Uma alternativa que nos parece coerente é a trajetória hipotética de aprendizagem (THA), que é a descrição detalhada de uma aula hipotética que evidencia possíveis dúvidas que possam aparecer, com encaminhamentos e caminhos para discussões.

2. A Trajetória Hipotética de aprendizagem:

Simon (1995) afirma que a THA é composta por três componentes essenciais: (1) o objetivo do ensino com direções definidas; (2) as atividades de ensino (3) e o processo hipotético de aprendizagem e as possibilidades de modificações da THA, sendo que as

possibilidades de mudança são necessárias, uma vez que cada turma tem suas características, contudo é quase impossível seguir fielmente uma trajetória hipotética.

A THA apresentada nesse trabalho destina-se a alunos do 5º ano, com a intenção de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

A tarefa proposta foi retirada da *Early Algebra*, site que apresenta trabalhos e pesquisas relacionados à Educação Algébrica, desenvolvidos por um grupo de pesquisadores dos Estados Unidos.

A tarefa em tela tem por objetivo oportunizar momentos de reflexões aos estudantes para que estes possam construir significados para as relações e os conceitos algébricos por meio de representações intuitivas que caminharão para representações convencionais no futuro. Além disso, pretende-se focar no desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do estudo de padrões em sequências e organização de dados.

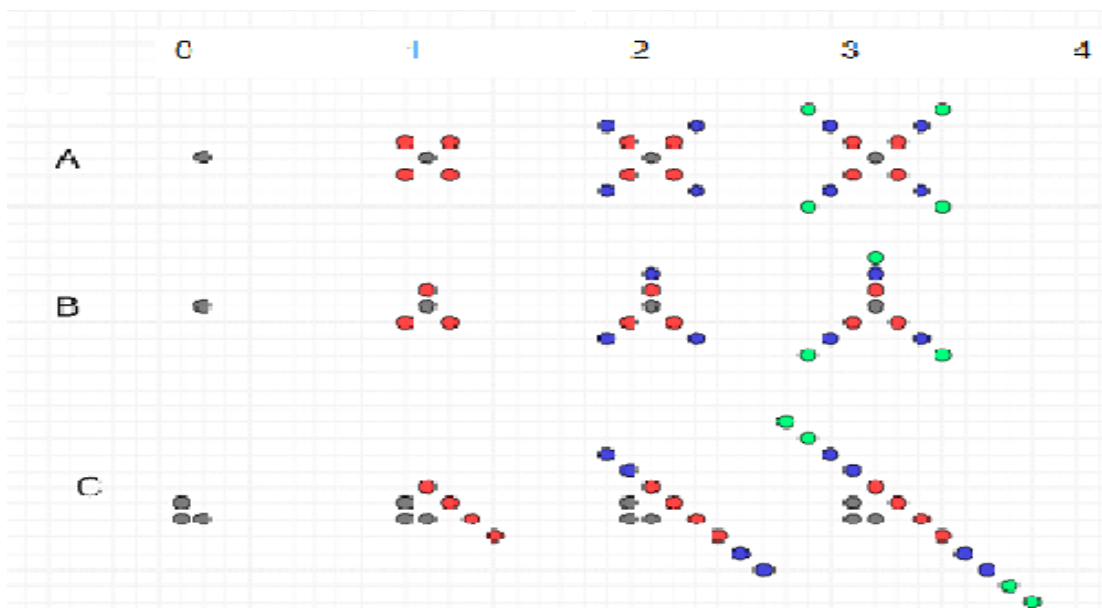
Essa aula irá proporcionar discussões com a classe toda, discussões em duplas e interação entre alunos e professor.

Para o desenvolvimento desta trajetória as falas do professor iniciarão com a letra P, as informações aos professores estarão em quadros e as falas dos estudantes serão iniciadas pela letra E_n, sendo que cada valor para n indica um possível aluno.

No início da aula o professor deve explicar as características da metodologia de resolução de problemas, na qual o aluno deve, por meios próprios, buscar uma solução para o problema que será proposto, deverão matematizar. O professor neste processo auxiliará apenas quando necessário e muitas vezes por meio de perguntas, que estimularão os alunos a pensarem sobre o caminho que estão seguindo e qual o próximo passo. Essa explicação é importante para que os alunos saibam como se comportar e o que esperar do professor.

A turma deve se organizar em duplas para que os alunos possam discutir suas ideias. A tarefa será entregue a cada uma das duplas e o professor deve dar tempo para que seus alunos leiam atentamente o enunciado da tarefa.

Tarefa: Observe a figura e complete a tabela .



Nível	Bolinhas em A	Bolinhas em B	Bolinhas em C
0			
1			
2			
3			
4			
5			
N			

P: Agora que estão organizados devem fazer uma leitura atenta da tarefa, antes de começar a resolvê-la.

Por se tratarem de alunos do Ensino Fundamental I e não terem sido introduzidos ao simbolismo da álgebra, uma pergunta provável é o que significa a letra N. Para responder essa questão não existe a necessidade de uma explicação formal, mas sim uma explicação que seja suficiente para que os estudantes consigam realizar a tarefa proposta.

E₁: Professora tem um erro na tarefa.

P: Qual erro?

E₁: Está perguntando quantas bolinhas tem no nível N, mas N não é número é letra.

P: Esse N não é um erro ele se chama variável, pois pode representar qualquer valor, por exemplo, no nível 0, $N=0$, no nível 1, $N=1$, no nível 2, $N=2$. Entenderam?

E: Sim.

P: Então podem começar a realizar a tarefa, e assim que todos terminarem discutiremos a respeito das resoluções.

Na estratégia de resolução de problemas é importante que o professor interfira o menos possível e que as questões individuais sejam atendidas no grupo, e não com a classe toda. No caso da pergunta sobre a letra N foi necessário um esclarecimento geral, uma vez que é muito provável que todos fizessem a mesma pergunta.

E₂: Professor, não tem como fazer o nível 4 e nem os próximos níveis.

P: Por que não tem como completar a tabela no nível 4?

E₂: Porque nos outros níveis tem desenho e no nível 4 não tem, então não posso contar quantas bolinhas são.

P: Vocês podem imaginar uma forma de descobrir a quantidade de bolinhas do nível 4? Olhem na parte da tabela que já completaram e nos desenhos anteriores, percebem alguma regularidade?

E₂: Nos níveis anteriores do A, foi aumentando de quatro em quatro bolinhas e a figura parece um X, então é só desenhar os próximos.

P: E no nível B e C, o que vocês conseguem perceber?

E₂: No segundo nível aumenta de 3 em 3, mas o desenho não é mais um X, agora parece um Y deitado e no C a figura não parece mais nenhuma letra, mas aumentou de 4 em 4.

P: Muito bem.

E₃: Professor, para completar a tabela precisa fazer o desenho? Acho que conseguimos completar sem desenhar.

P: Vocês podem resolver a tarefa da maneira que acharem mais adequadas.

Assim que os alunos terminarem a tarefa, ou fizerem o máximo que conseguirem, o professor deve sistematizá-la com o auxílio dos estudantes.

P: Eu gostaria da ajuda de vocês, quem poderia vir ao quadro mostrar como fez para preencher a tabela.

E₄: Eu posso. Eu fiz os desenhos até o nível 5 e depois eu e minha dupla cansamos de desenhar, então começamos a olhar para os desenhos e percebemos que nem precisava ter desenhado. Em A era só somar a quantidade do nível anterior com 4 para descobrir quantas

bolinhas tinha no próximo nível, em B é só aumentar 3 e em C ocorre o mesmo que em A, ou seja, é só somamos 4.

P: Muito bem e como ficou a sua tabela?

E₄: Nós não conseguimos completar a linha que pede esse tal de N, mas minha tabela ficou assim:

Nível	Bolinhas em A	Bolinhas em B	Bolinhas em C
0	1	1	3
1	5	4	7
2	9	7	11
3	13	10	15
4	17	13	19
5	21	16	23
N			

P: Não tem problema não ter completado toda a tabela, vamos ver se outros estudantes podem nos ajudar a terminar.

E₅: Professora, eu não consegui completar a tabela também, mas eu percebi uma coisa.

P: O que você percebeu?

E₅: No A se não fosse a primeira bolinha, ia ser bem fácil completar a tabela, ia ser a tabuada do 4, por que sempre aumentam 4 bolinhas em cada um dos níveis, no B, ia ser a tabuada do 3, porque aumenta só 3 bolinhas, mas tem a 1ª bolinha do nível zero que atrapalha. E no C ia ser a tabuada do 4 novamente, mas mais uma vez tem as três bolinhas do nível zero que atrapalham.

P: Olha que interessante o que você percebeu. Turma vocês compreenderam o que E₅ disse, se não fossem as bolinhas do nível zero, que estão atrapalhando, as colunas formariam a tabuada do 4 em A, do 3 em B e do 4 em C. Alguém mais percebeu algo que nos ajude a preencher a linha do N?

E₆: Professor, nós vimos que é só somar ou 3 ou 4 no nível anterior, que descobrimos o próximo nível e se é assim, por que precisamos descobrir o valor do N? Se ele pode ser qualquer número como vamos saber qual colocar?

P: Sim, o N pode ser qualquer número e por isso se chama variável, e eu concordo com você, que podemos somar 3 ou 4 dependendo se é A, B ou C, mas tem um motivo para precisarmos completar a tabela toda, até a linha do N. Alguém imagina qual seja esse motivo?

E₂: Quando nós estávamos desenhando percebemos que ia ser difícil, ia demorar muito, então fomos olhar os números para perceber o que estava acontecendo. Acho que é por isso que precisamos saber o que colocar na linha do N, se não demora muito. Imagina só se eu quisesse saber quantas bolinhas ia ter no nível 100? Nossa, ia ser muita bolinha e muita conta para fazer.

P: Exatamente. Quando conseguirmos completar a tabela, vamos descobrir quantas bolinhas tem no nível 100 com uma conta para cada um dos níveis.

E₅: Quando descobrirmos o que colocar nessa linha vai facilitar bastante.

P: Sim.

E₇: Se o que está atrapalhando são as bolinhas do nível zero é só tirar essas bolinhas e ficamos com a tabuada.

E₈: Mas não podemos tirar as bolinhas, porque muda o desenho.

Caso os estudantes deixem de contribuir cabe ao professor fazer perguntas, que os auxiliem a criar novas conjecturas.

P: Vamos pensar no que E₇ disse se tirássemos as bolinhas do nível zero, como ficaria a tabela?

E₉: Pode deixar professor, que eu vou ao quadro mostrar a tabela como ficaria.

Nível	Bolinhas em A	Bolinhas em B	Bolinhas em C
0	0	0	0
1	4	3	4
2	8	6	8
3	12	9	12
4	16	12	16
5	20	15	20
N			

P: Qual a diferença entre as duas tabelas que estão no quadro?

E₁₀: A diferença é que em cada nível do A está faltando 1 bolinha, que é a bolinha que nós tiramos do nível zero, no B falta 1 também e no C faltam 3 bolinhas.

P: Como podemos fazer para que essa tabela que E₉ completou volte a ser a tabela da nossa tarefa?

E₁₁: É fácil, é só somar o que está faltando que volta a ficar igual.

P: Por favor, E₁ venha ao quadro e coloque as somas na tabela que E₉ fez.

Nível	Bolinhas em A	Bolinhas em B	Bolinhas em C
0	$0 + 1$	$0 + 1$	$0 + 3$
1	$4 + 1$	$3 + 1$	$4 + 3$
2	$8 + 1$	$6 + 1$	$8 + 3$
3	$12 + 1$	$9 + 1$	$12 + 3$
4	$16 + 1$	$12 + 1$	$16 + 3$
5	$20 + 1$	$15 + 1$	$20 + 3$
N			

P: Muito bem. Vocês disseram que se não fossem os números que estavam atrapalhando as colunas formariam algumas tabuadas não é? Eu gostaria de alguém pudesse me mostrar porque ficaria da maneira que vocês me disseram.

E₁₂: Eu mostro. Seria a tabuada porque $4 \cdot 1 = 4$, que sem as bolinhas que tiramos ia ser a quantidade de bolinhas que teria no nível 1 do A, vou completar o resto na tabela para você ver.

Nível	Bolinhas em A	Bolinhas em B	Bolinhas em C
0	$4 \cdot 0 + 1$	$3 \cdot 0 + 1$	$4 \cdot 0 + 3$
1	$4 \cdot 1 + 1$	$3 \cdot 1 + 1$	$4 \cdot 1 + 3$
2	$4 \cdot 2 + 1$	$3 \cdot 2 + 1$	$4 \cdot 2 + 3$
3	$4 \cdot 3 + 1$	$3 \cdot 3 + 1$	$4 \cdot 3 + 3$
4	$4 \cdot 4 + 1$	$3 \cdot 4 + 1$	$4 \cdot 4 + 3$
5	$4 \cdot 5 + 1$	$3 \cdot 5 + 1$	$4 \cdot 5 + 3$
N			

E₁₂: Mas não tem como preencher a linha do N.

P: Pensaremos a respeito disso juntos. Analisaremos primeiramente só o A, quando estávamos no nível 0 foi possível escrever $4 \cdot 0 + 1$, no nível 2, $4 \cdot 2 + 1$, no nível 3, $4 \cdot 3 + 1$, e assim por diante. Por que multiplicamos por 4?

E₁₂: Porque é a quantidade que aumentou em cada nível.

P: E por que somamos sempre 1?

E₁₂: Esse 1 é pelo que já falamos, no nível 0 não começa com 0 bolinhas e sim com 1 bolinha, então é só somar 1 em cada nível para termos a quantidade de bolinhas que estão no desenho.

P: E o valor que esta sendo multiplicado por 4, o que ele representa?

E₁₂: É a ordem dos números, 0, 1, 2, 3, 4, até quando quiser.

E₁₅: Também é igual o número do nível. no nível 0 multiplicou por zero, no nível 1, multiplicou por 1, no nível 2, multiplicou por 2, e assim foi.

P: Pensando no que E₁₅ nos disse, o que acontece quando chegarmos ao nível N?

E₁₂: Multiplica por N

P: Qual valor multiplica por N?

E₁₆: Nos outros níveis sempre foi o 4, então deve ser o 4 também. Falta somar 1, nos outros níveis somamos 1 em todos.

E₁₇: É verdade, então agora ficou fácil completar a linha do N de A, é só colocar 4 vezes N mais 1.

P: Muito bem pessoal e como o N pode ser qualquer número, como podemos fazer para descobrir no A quantas bolinhas vão ter no nível 10?

E₁₅: Agora não precisa nem desenhar e nem ficar somando, não é?

P: Como seria então?

E₁₅: Pode trocar o N pelo 10, e fica 4. $10 + 1 = 41$, então no nível 10 vão ter 41 bolinhas.

P: Muito bem, agora gostaria que voltassem em suas duplas e completassem a linha do N, para o B e C.

O Professor deve novamente esperar um tempo para que seus alunos pensem sobre tudo o que fizeram. Um tempo para que organizem seu raciocínio. Ao final, o professor pode pedir para que algum aluno complete o que falta na tabela, que está no quadro, explicando como pensou para poder completá-la.

E₁₈: Professor, eu completei o nível N do B fazendo 3 vezes N mais 1 e do C, 4 vezes N mais 3.

P: Como você fez para descobrir, como completaria?

E₁₈: Foi fácil, pensei igual quando completamos o A, quem ia multiplicar o N e quantas bolinhas precisava somar para ficar certo sem mudar a regra.

Ao finalizar essa atividade o professor pode pedir para que os alunos descubram quantas bolinhas tem em determinados níveis, sendo no caso o nível 100 apropriado, uma vez que um aluno sugeriu este valor, para que façam manipulações algébricas e lidem com símbolos, mesmo sem a necessidade de formalizá-los.

3. Algumas Considerações

A THA, neste contexto, mostrou-se como uma alternativa válida para auxiliar professores a planejarem aulas que proporcionem, aos alunos, momentos de reflexão, desenvolvimento do pensamento algébrico em qualquer nível de escolaridade, matematização e também proporciona a reinvenção guiada, que para a abordagem da RME é modo de aprender matemática, uma vez que só se aprende Matemática, fazendo-a, reinventando.

Por meio da atividade proposta nessa THA, os alunos podem ter contato com as ideias inerentes à situação e com símbolos algébricos, por conseguinte, é possível evidenciar que o pensamento algébrico dos alunos é estimulado para que cheguem a uma representação mais formal.

Ao construírem uma THA, os professores se preparam para responder possíveis questões, refletem sobre as possibilidades de condução de suas aulas, elaboram maneiras de guiar seus alunos para a aprendizagem, simulam questões que poderiam norteá-los de forma satisfatória e procuram atingir o objetivo proposto na atividade didática. Contudo, ao terem contato com uma THA estruturada, possivelmente, eles se sintam incentivado a propor desafios aos seus alunos, e a trabalhar com metodologias diversificadas, como a metodologia de resolução de problemas, presente neste trabalho.

4. Referências

BURIASCO, R, L, C de. **Sobre a Resolução de Problemas (I)**. Ano 1, n.º5. Secretaria Municipal de Educação, Londrina, 1995.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

LUPINACCI, V, L, M; BOTIN, M, L, M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 1–5, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SIMON, M. A. “**Reconstructing Mathematics Pedagogy From A constructivist Perspective**. Journal for research In mathematics Education”, 26(2), p.114-145, 1995.

TREFFERS, A; GOFFREE, F. ‘**Rational analysis of realistic mathematics education**

– the Wiskobas program’, in L. Streefland (ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, OW&OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Vol. II, p. 97–121, 1985.

VAN DEN HEUVEL – PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.