GEOGEBRA E O LUGAR GEOMÉTRICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES EM IR²

André Seixas de Novais
IFRJ - Instituto Federal do Rio de Janeiro
UBM – Centro Universitário de Barra Mansa
andreseixas2003@yahoo.com.br

Isabella Moreira de Paiva Corrêa
IFRJ - Instituto Federal do Rio de Janeiro
isabella.correa@ifrj.edu.br

Resumo:

O objetivo deste trabalho é discutir os efeitos de uma proposta alternativa para o estudo das representações das soluções de sistema de equações em IR², sobre a Imagem de Conceito de estudantes. As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções foi um dos problemas que motivaram a elaboração deste trabalho. A metodologia empregada envolve uma pesquisa bibliográfica buscando fundamentar a estruturação teórica do trabalho, descrevendo os significados da Teoria de Imagem de Conceito proposta por Tall & Vinner (1981) e um minicurso como proposta alternativa para o ensino de equações e sistemas de equações em IR².

Palavras-chave: Imagem de Conceito, Geometria Dinâmica, Sistemas de Equações, Lugares Geométricos, Representações.

1. Introdução

É observável, em inúmeros estudantes dos Ensinos Médio e Superior, uma grande dificuldade em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Este foi o problema que motivou este trabalho.

A partir das discussões realizadas entre os autores deste trabalho acerca das dificuldades de seus próprios alunos ao longo do tempo, concluiu-se que esta não era uma temática pontual, mas um problema que afeta o ensino de Matemática em geral, uma dificuldade que suscita debates entre a comunidade de Educação Matemática.

Das experiências em sala de aula, leituras e estudos a partir das publicações em Educação Matemática e, das reflexões em equipe, foi possível levantar algumas hipóteses que agravariam tal problema: a sequência pouco natural e muito distante entre os tópicos de geometria analítica e funções; a falta de uma abordagem sobre Lugares Geométricos (LG); e a falta de uma abordagem qualitativa sobre o número de soluções de sistemas de equações em IR². Outra hipótese levantada é a de que o uso de softwares de geometria dinâmica poderá minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos sobre equações e seus gráficos, uma vez que favorece simulações e estudos de parâmetros de forma visual.

Com base nesta problemática e nas hipóteses, resolvemos desenvolver uma sequência didática para o ensino de equações e sistemas de equações em IR², delimitando o tema em *"GeoGebra e o Lugar Geométrico de um Sistema de Equações em IR²"*.

Este trabalho é justificável na medida em que inúmeros problemas vêm sendo enfrentados pelos ingressantes em disciplinas como o Cálculo, Álgebra linear, Geometria Analítica, entre outras do ensino superior. Uma das bases para um bom desenvolvimento em disciplinas como estas, é a interpretação das relações existentes entre as representações gráficas e algébricas de equações e funções.

Como embasamento teórico para este minicurso utilizou-se a Teoria de Imagem de Conceito proposta por Vinner & Hershkowitz (1980) e Tall & Vinner (1981), onde são discutidas a ideias de Imagem de Conceito, Definição de Conceito, Imagem de Conceito Evocada, Fatores de Conflito Potencial e Cognitivo. Outras pesquisas que complementam a teoria em questão são Tall (1988), Tall (1989), Banard & Tall (1997), Tall (2000), Tall, McGowen & DeMarois (2000) descrevendo o conceito de Unidades Cognitivas e Raízes Cognitivas. Giraldo (2004), Lima (2007) e Escarlate (2008), destacam e a apresentam inúmeras características, propriedades e exemplos em que a Teoria de Imagem de Conceitos se materializa. Além de discutir, apresentar e exemplificar esta teoria, Novais (2011) levanta uma proposta alternativa para o estudo das relações entre equações em IR² e seus gráficos. Esta proposta será aplicada, parcialmente, neste minicurso.

Não pretendemos de forma alguma esgotar toda a apresentação possível para este tema, nem tão pouco mudar a estrutura atualmente encontrada na educação básica, todavia objetivamos apresentar uma proposta que sirva de reflexão e complementação do estudo de equações em IR² e seus gráficos.

2. Uma proposta alternativa para o estudo de Equações e Sistemas de Equações em IR²

O minicurso consiste de uma sequência didática, focando o desenvolvimento da Imagem de Conceito dos estudantes sobre o conceito de equações, que viabilize as seguintes ideias: a compreensão das noções sobre LG, possibilitando a futura definição de LG's como a reta, circunferência, parábola, elipse, etc; o reconhecimento do gráfico de uma equação como o Lugar Geométrico das soluções desta equação; o reconhecimento da equação da reta, parábola e circunferência; o entendimento que a solução de um sistema de equações é dada pelos pontos de interseção entre os LG's de cada uma das equações.

O fio condutor deste minicurso é o estudo de Equações Indeterminadas e Sistemas de Equações[1]. A estrutura desta proposta divide-se em três eixos norteadores (Lugares Geométricos, Equações Indeterminadas e Sistema de Equações).

Como gancho inicial para o minicurso é solicitado aos participantes que indiquem o número de soluções para o sistema $\begin{cases} x = y^2 + m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$, com $m \in$ IR. O caminho quase que "*automático*" é o da resolução algébrica das equações, uma vez que este tipo de estratégia tem sido o mais praticado pelos livros didáticos e consequentemente em nossa trajetória escolar. Após alguns minutos de tentativas a questão será deixada de lado e a solução solicitada pelos ministrantes ficará para o final do minicurso.

2.1. Lugares Geométricos

O software de geometria dinâmica "Geo-Gebra" é utilizado com os estudantes, buscando-se a compreensão da definição de Lugar Geométrico (LG), assim como as definições de reta, reta mediatriz, circunferência, parábola e elipse.

Na figura 1, é apresentada a solução do exercício *"Qual é o LG dos pontos que distam* $\sqrt{2}$ *unidades da origem e 1 unidade do ponto A=(-2,1)"*. Dá-se aqui uma idéia inicial do que será mais tarde a solução de um sistema de equações, com base no conceito de Raiz Cognitiva proposto por Tall (1989).

[1] Em Novais (2011) é possível encontrar as atividades modulares desta proposta na íntegra.

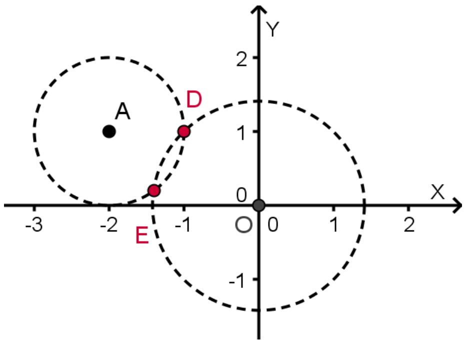

Figura 1: Soluções do exercício 4, pontos D e E.

No diagrama 2, encontramos um resumo das principais aquisições a serem obtidas pelos participantes após terem passado pelas atividades de 1 a 8 (anexo) “1ª parte do minicurso”, pretendidas nesta proposta de sequência didática.

Lugares Geométricos

Reconhecimento que pode-se ter: nenhum, finitos ou infinitos pontos que satisfazem determinada condição.

Plenas condições de definir: reta, circunferência, reta mediatriz, parábola e elipse como LG’s.

Reconhecimento que dados as condições 1, 2, ..., n e seus respectivos LG-1, LG-2, ..., LG-n, o LG que atende simultaneamente a todas condições é formado pelos pontos de interseção entre todos os LG’s.

Com as definições de reta, parábola, circunferência e etc., será possível posteriormente provar afirmações sobre o gráfico de equações.

Diagrama 1: Resumo das conexões fornecidas pelo segundo eixo norteador.

Em resumo as aquisições pretendidas são: compreensão da noção de Lugar Geométrico; condições plenas de definir reta, circunferência, parábola e outros LG’s; reconhecer que a interseção entre dois ou mais LG’s é o Lugar Geométrico dos pontos que satisfazem simultaneamente condições de cada LG; e disponibilizar mecanismos para futuras justificativas matemáticas envolvendo gráficos de equações.

2.2. Equações Indeterminadas

Nesta parte da estrutura alguns conceitos de equações de duas variáveis, isto é, equações em IR² são tratados de forma a desenvolver uma compreensão do gráfico de uma equação como LG das soluções desta equação. É utilizado o termo Equações Indeterminadas, pois neste caso o conjunto solução pode ser tanto finito quanto infinito. Vários exercícios a serem realizados no Geo-Gebra e com papel-lápis são apresentados levando os participantes a conjecturarem propriedades inúmeras propriedades.

Como gancho para iniciarmos esse módulo, optamos pelas seguintes questões "*[...] Um exemplo de equação indeterminada seria x+y=6. Quantas soluções reais você poderia listar para esta equação?"* e *"Como poderíamos representar todas as soluções para a equação x+y=6?"*. Nesta etapa, as diversas representações das soluções desta equação serão abordadas. A representação por meio de uma tabela com os pares ordenados das soluções mostra-se ineficiente à medida que apresenta um subconjunto limitado e discreto do conjunto solução, o mesmo acontece com a representação gráfica a partir dos pares ordenados da tabela.

Os principais objetivos propostos pelas atividades de 9 a 24 (anexo) "2ª parte do minicurso" em correlação com as atividades anteriores são: reconhecer o gráfico de uma equação em IR² como o Lugar Geométrico das soluções desta equação; e reconhecer o Lugar Geométrico das soluções das equações: $y = ax + b,$ com $a \neq 0$, $y = ax^2 + bx + c,$ com $a \neq 0$ e $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, assim como a variação dos parâmetros *a*, *b*, *c* e *r*.

2.3. Sistema de Equações

Durante está parte, inúmeros sistemas são solucionados com a seguinte sugestão "*Discuta o número de soluções dos sistemas de equações abaixo utilizando duas formas qualitativas de resolução: 1ª forma: Conjecture o número de soluções dos sistemas de equações abaixo, refletindo sobre o LG das soluções de cada uma das equações. 2ª forma: Use o GeoGebra para solucionar os sistemas*". É interessante observar que, anteriormente, havia apenas uma condição imposta sobre o LG, fornecendo assim, na maioria dos casos, um conjunto infinito de soluções. Já nesta parte, há duas condições impostas para o LG, neste caso será necessário determinar: o LG referente à primeira equação, o LG da segunda equação, para, em seguida, determinar o LG que satisfaça ambas as condições.

Os principais objetivos propostos pelas atividade 25 (anexo) "3ª parte do curso" são: correlacionar os conhecimentos desenvolvidos nas atividades sobre LG e Equações Indeterminadas, respectivamente, com a noção de número de soluções de um sistema de equações; identificar a solução gráfica de um sistema de equações como uma Raiz Cognitiva para o desenvolvimento da teoria sobre sistemas, pressupondo-se que as noções sobre Equações Indeterminadas já fazem parte da Imagem de Conceito do estudante; reconhecer que o conjunto solução de um sistema de equações é dado pelos pontos de interseção entre os LG's de cada uma das equações; reconhecer que os pontos de interseção entre os gráficos das equações são os únicos pontos que satisfazem todas as equações do sistema; e utilizar o software Geo-Gebra para uma melhor compreensão de conceitos complexos sobre sistemas, analisando e generalizando diversas propriedades.

No diagrama 3, podemos resumir as principais conexões existentes nas atividades sobre Equações Indeterminadas e Sistemas de Equações.

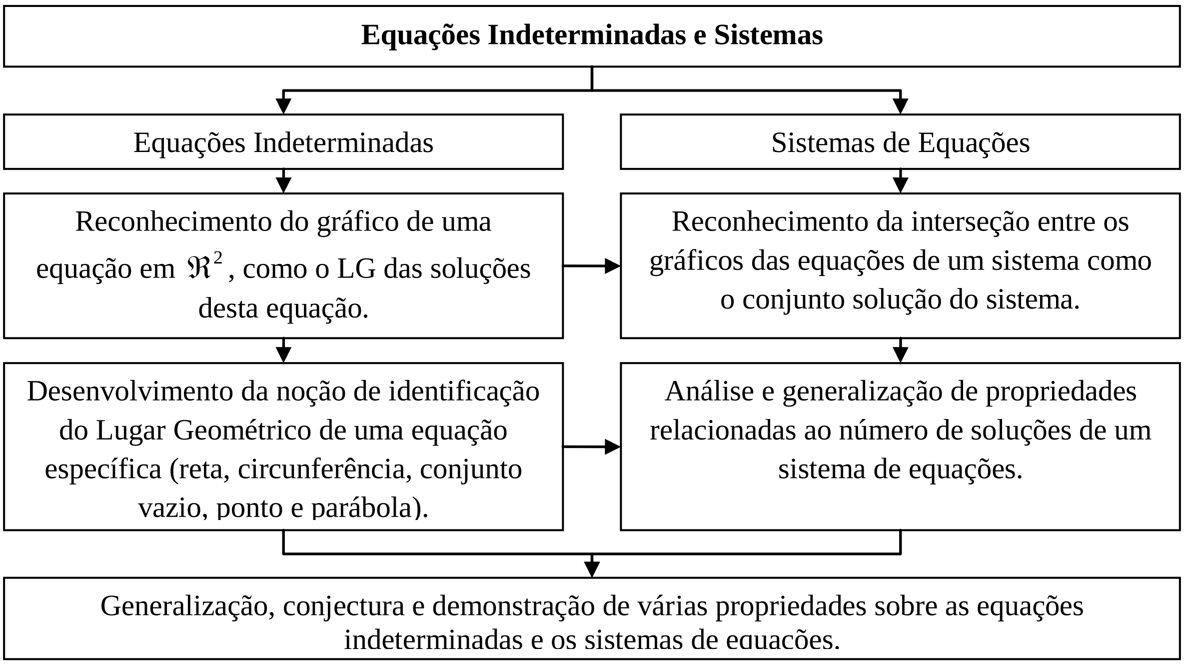

Diagrama 2: Resumo das conexões fornecidas pelo terceiro eixo norteador.

Para finalizar essa seção, será apresentado o Diagrama 4, que destaca as principais conexões entre os três eixos norteadores, assim como seus respectivos módulos e algumas observações sobre tais conexões.

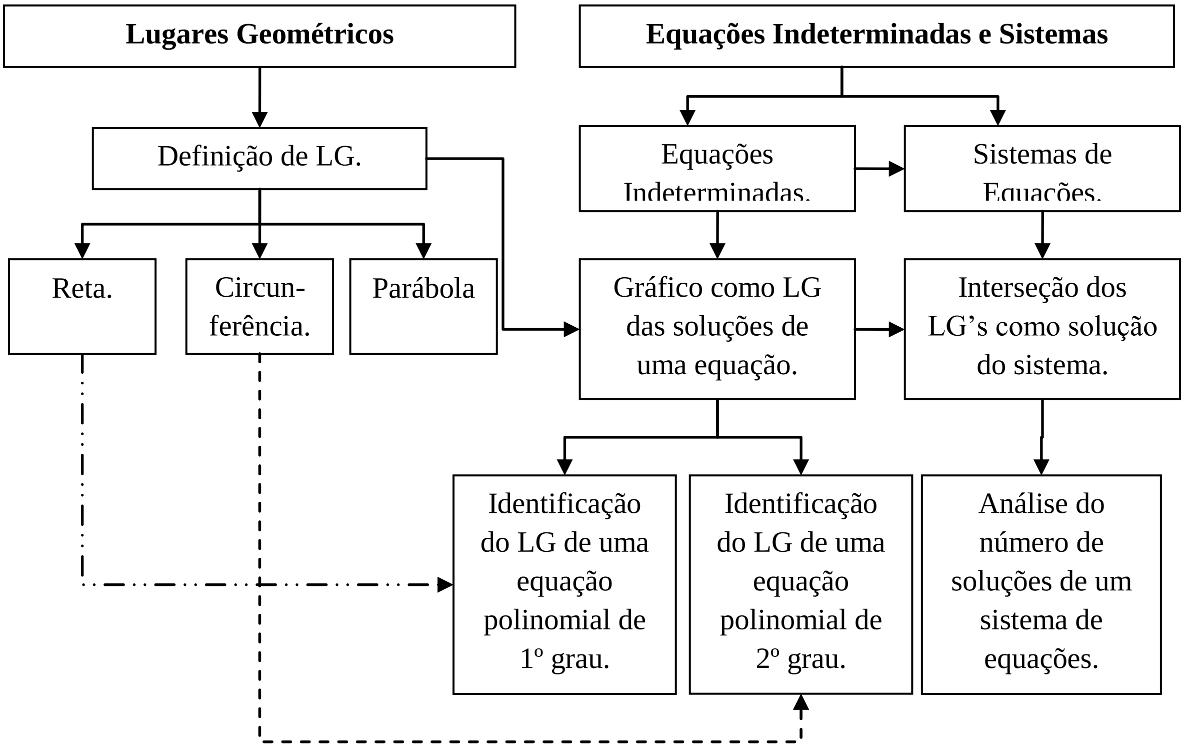

Diagrama 3: Conexões entre os eixos norteadores.

3. Considerações finais

Inicialmente, o problema que motiva a elaboração deste minicurso é *"As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções"*. Além disso, em virtude da delimitação do tema, procuramos focar nosso trabalho apenas na representação gráfica de equações em IR^2.

Acreditamos que o enriquecimento da Imagem de Conceito sobre as relações existentes entre as equações e o lugar geométrico de suas soluções servirá como um excelente fortalecedor da compreensão sobre as diversas representações das funções analíticas. Sendo assim, este trabalho deixa em aberto a possibilidade de estudo dos efeitos da proposta alternativa sobre o ensino de funções analíticas na educação básica ou superior.

Acreditamos que a abordagem de Lugares Geométricos no ensino médio, associada ao uso de software de geometria dinâmica, minimiza as dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos relativos às diversas representações das soluções de uma equação[2].

Após a compreensão adequada sobre Lugar Geométrico, a conjectura e análise de algumas propriedades relacionadas a equações e seus gráficos, será possível realizar com os participantes uma análise qualitativa do número de soluções de um sistema de equações em IR^2. Consideramos que esta análise foi extremamente importante para o enriquecimento de suas Imagens de Conceito, o que futuramente poderá contribuir para uma boa inserção em áreas mais avançadas da Matemática como o Cálculo Diferencial e Integral, a Álgebra Linear e a Análise.

Concluímos desta forma o trabalho, acreditando que uma proposta alternativa que envolva uma sequência didática bem estruturada, associada à utilização de software de Geometria Dinâmica, destacando as conexões entre lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações, minimizará as dificuldades encontradas na compreensão das relações existente entre as equações e as diversas representações de suas soluções, assim como proporcionará a conjectura de propriedades que poderão ser discutidas através de uma argumentação matemática sólida.

BIBLIOGRAFIA

BARNARD, A. D.; TALL, D. O. Cognitive Units, Connections, and Mathematical. Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education, 2, 41-48, 1997.

ESCARLATE, A. Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.

GIRALDO, V. Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada. Tese (doutorado em ciências). Rio de janeiro: UFRJ, 2004.

LIMA, R. N. D. Equações Algébricas no Ensino Médio. Uma jornada por diferentes mundos da matemática. Doutorado em Educação Matemática. PUC: São Paulo, 2007.

MCGOWEN, M., DEMAROIS, P., TALL, D., O. The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. Proceedings of PME-NA, 1, 255-261, 2000.

NOVAIS, André Seixas. Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em IR^2/André Seixas de Novais – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.

SILVA, C., M. Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais. Rio de janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

[2] ver Novais (2011) capítulo5

TALL, D. O. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand, 3–20, 2000.

TALL, D. O. Concept Image and Concept Definition. University of Warwick Published in Senior Secondary Mathematics Education, 37-41, 1988.

TALL, D. O. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. For the Learning of Mathematics, 9, 3, 37-42, 1989.

TALL, D. O. VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.

VINNER S., HERSHKOWITZ R. Concept Images and Some Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometric Concepts. Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177-184, 1980.

Anexo

Mini-curso: GEOGEBRA E O LUGAR GEOMÉTRICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES EM IR²

Motivação: Quantas são as possíveis soluções para o sistema de equações $\begin{cases} x = y^2 + m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$, com $m \in IR$?

1ª parte das atividades: Lugares Geométricos

Definição: Um lugar geométrico é conjunto de pontos que satisfazem a uma ou mais condições.

1) Vamos construir o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *O=(0, 0)* do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?

2) Construa o lugar geométrico dos pontos que distam 1 unidade do ponto *A=(-2, 1)* do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?

3) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 2 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

4) Qual é o lugar geométricos dos pontos colineares aos pontos *A=(-1, 2)* e *B=(3, -2)*? Que lugar geométrico é esse?

5) Qual é o lugar geométrico dos pontos colineares aos pontos *C=(-4, 3)* e *D=(5, 0)*? Que lugar geométrico é esse?

6) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 4 e 5 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

7) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 4? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

8) Qual é o lugar geométrico dos pontos *P*, tais que dados os pontos *F(1,2)* uma reta *r* paralela ao eixo *OX*, a distância de *P* a *F* seja igual a distância de *P* a *r*? Defina esse Lugar Geométrico.

Algumas **Definições**:

Reta: É o lugar geométrico dos pontos colineares a dois pontos dados.
Circunferência: É o lugar geométrico dos pontos que distam *r* unidades de um ponto fixo, com $r \in IR_+$. Chamamos raio a constante *r* e centro o ponto fixo.
Parábola: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam a um ponto fixo *F* (denominado foco) e a uma reta dada *d* (denominada diretriz), onde $F \notin d$.

2ª parte das atividades: Equações Indeterminadas

Pontos Genéricos

- Porque chamarei equações em IR^2 de equações indeterminadas?
- Um exemplo: Seja a equação $x+y=6$. Quantas soluções reais você poderia listar para está equação?
- Como você representaria as soluções desta equação?
- Como poderíamos criar um ponto genérico para está equação?
- Poderíamos analisar o comportamento das soluções através do ponto genérico?
- O que é o gráfico de uma equação em IR^2?
- Vamos digitar a equação no campo entrada do GeoGebra e teclar enter.

Escreva o ponto genérico das equações indeterminadas abaixo, verifique o comportamento das soluções através do comando Habilitar Rastro e em seguida digite a equação.

9) $2x+6=4y$. 10) $2x^2+y=3x+2$. 11) $4x^2+9y^2=36$. 12) $x^2=16-y^2$. 13) $xy-x^2=2$.

Vamos estudar o comportamento de equações indeterminadas da forma $y=mx+q$, com m e q reais.

14) No campo entrada do GeoGebra digite, $m=1$ (tecle enter) e $q=0$ (tecle enter), exiba os objetos m e q, em seguida digite a equação $y=m*x+q$ construindo assim o Lugar Geométrico das soluções da equação dada.

15) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de m no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

16) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de q no intervalo [-5, 5], descreva o comportamento do gráfico.

Vamos estudar o comportamento de equações indeterminadas da forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, com a, b e r reais.

17) No campo entrada do GeoGebra digite, $a=0$ (tecle enter), $b=0$ (tecle enter) e $r=1$ (tecle enter) exiba os objetos a, b e r, em seguida digite a equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ construindo assim o Lugar Geométrico das soluções da equação dada.

18) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de a no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

19) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de b no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

20) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de r no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

Vamos estudar o comportamento de equações indeterminadas da forma *y=ax²+bx+c*, com *a*, *b* e *c* reais. (ao final da atividade experimente fazer o mesmo exercício para a equação *x=ay²+by+c*)

21) No campo entrada do GeoGebra digite, *a=1* (tecle enter), *b=0* (tecle enter) e *c=0* (tecle enter) exiba os objetos *a*, *b* e *c*, em seguida digite a equação $y=ax^2+bx+c$ construindo assim o Lugar Geométrico das soluções da equação dada.

22) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *a* no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

23) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *b* no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

24) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *c* no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

3ª parte das atividades Sistema de equações

25) Discuta' o número de soluções dos sistemas de equações abaixo utilizando duas formas qualitativas de resolução: **1ª forma**: Conjecture o número de soluções dos sistemas de equações abaixo, refletindo sobre o LG das soluções de cada uma das equações. **2ª forma**: Use o GeoGebra para solucionar os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 9x-8y+18=0 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

c) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ -2x+y=1 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

d) $\begin{cases} x-y=4 \\ y^2-x+2y=8 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

e) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

f) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-2y=10 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

g) $\begin{cases} x-y=-10 \\ y^2-x+2y=8 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

h) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 2x+3y+13=0 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

i) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=4 \\ x^2-y=2 \end{cases}$

1ª forma: ______________________

2ª forma: ______________________

Você conseguiria discutir o número de soluções para o sistema de equações inicialmente proposto como motivação? E qual seria esse número?