# SOLUÇÃO QUALITATIVA PARA UM SISTEMA DE EQUAÇÕES EM IR² E A TEORIA DE IMAGEM DE CONCEITO

André Seixas de Novais
IFRJ – Instituto Federal do Rio de Janeiro (Campus Volta Redonda)
UBM – Centro Universitário de Barra Mansa
andreseixas2003@yahoo.com.br

**RESUMO**

O objetivo deste trabalho é discutir os efeitos de uma proposta alternativa para o estudo das representações das soluções de sistema de equações em IR², sobre a Imagem de Conceito de estudantes. As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções foi um dos problemas que motivaram a elaboração desta pesquisa. A metodologia empregada envolve uma pesquisa bibliográfica dividida em três etapas: a primeira busca fundamentar a estruturação teórica do trabalho, descrevendo o significado da Teoria de Imagem de Conceito proposta por Tall & Vinner (1981); a segunda parte da pesquisa envolveu o planejamento e preparação de uma proposta alternativa para o ensino de equações e sistemas de equações em IR²; já na terceira etapa houve a aplicação de: um pré-teste, um curso de extensão de 40 horas e um pós-teste, em alunos do curso de Matemática do Centro Universitário de Barra Mansa. Após a análise dos resultados, foi possível avaliar o desenvolvimento da Imagem de Conceito dos acadêmicos participantes, chegando à conclusão de que houve uma melhoria significativa na compreensão das representações gráficas e algébricas de uma equação.

**Palavras-chave:** Imagem de Conceito, Geometria Dinâmica, Sistemas de Equações, Lugares Geométricos, Representações.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma grande dificuldade que observo nos estudantes da educação básica e superior, é em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Este foi o problema que motivou o levantamento desta pesquisa. É perceptível que esta problemática não é apenas de um grupo específico de alunos, mas dos estudantes de maneira geral; um problema que suscita debates entre a comunidade de Educação Matemática.

De minhas experiências em sala de aula e das reflexões tidas a partir da leitura e estudo de diversas publicações em Educação Matemática, foi possível levantar algumas hipóteses que, provavelmente, agravam o problema em questão: A falta de uma abordagem de coordenadas na reta antecipadamente ao estudo de coordenadas no plano; A abordagem extremamente reducionista de sistema de eixos ortogonais; A apresentação de propriedades e objetos matemáticos sem a devida argumentação matemática; A sequência pouco natural e muito distante entre os tópicos de geometria analítica e funções; A falta de uma abordagem sobre Lugares Geométricos; A falta de uma abordagem qualitativa sobre o número de soluções de sistemas de equações em IR². Outra hipótese levantada é a de que o uso de softwares de geometria dinâmica pode minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos sobre equações e seus gráficos.

Com base nesta problemática e nas hipóteses levantadas, foi desenvolvido uma sequência didática[1] para o ensino de equações e sistemas de equações em IR², delimitando o tema em "Solução qualitativa para Sistemas de Equações em IR² e a Teoria de Imagem de Conceito, uma proposta alternativa para alunos dos ensinos superior e médio".

Este trabalho é justificável na medida em que inúmeros problemas são enfrentados pelos ingressantes em disciplinas como o Cálculo, Álgebra linear, Geometria Analítica, entre outras do ensino superior. Uma das bases para um bom desenvolvimento em disciplinas como estas, é a interpretação das relações existentes entre as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Acreditamos que a sequência didática atualmente encontrada em alguns livros do ensino médio, assim como o tipo de abordagem extremamente informal agrava a compreensão dos significados deste conceito, disponibilizando ao futuro ingressante na área de exatas um repertório disperso e sem conexão entre os tópicos estudados.

Não se pretende de forma alguma esgotar toda a apresentação possível para este tema, nem tão pouco mudar a estrutura atualmente encontrada na educação básica, todavia objetivamos apresentar uma proposta alternativa que sirva de reflexão e complementação do estudo de equações em IR² e seus gráficos. Não discutiremos também, as relações existentes entre as equações polinomiais e as funções analíticas, o que deixaremos como objeto de futuros estudos, contudo acreditamos que a proposta alternativa a ser apresentada servirá como um bom pré-requisito para o estudo de funções.

## 2. A TEORIA DE IMAGEM DE CONCEITO

Tall & Vinner (1981), baseados em seus estudos sobre a aprendizagem de limites e continuidade, descrevem a teoria denominada de Imagem de Conceito - IC. Essa teoria

[1] O termo Sequência Didática estará sendo utilizado neste trabalho como um conjunto encadeado de procedimentos planejados para ensinar determinado conceito.

sugere que, especialmente em Matemática avançada, a Definição Formal[2] pode não ser a melhor maneira de introduzir um conceito matemático. Este fato é ilustrado pela própria história da Matemática, haja vista que muitos conceitos matemáticos tidos atualmente por definições formais precisas, foram anteriormente concebidos através de conjecturas e a aquisição de suas propriedades.

Novais (2001, p. 39) coloca que "Para que haja uma aquisição satisfatória da Definição Formal, deve haver uma familiarização prévia com o conceito, envolvendo, por exemplo, problemas, exercícios, hipóteses, propriedades, imagens gráficas, etc.".

Dificuldades dos estudantes com as definições formais não são um fenômeno novo, e já ocupavam a mente de um dos grandes matemáticos, na virada do século:

> O que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e só se aplica a eles, é aquela que satisfaz as regras da lógica. Mas na educação não é isso, é aquela que pode ser compreendida pelos alunos. (POINCARÉ, 1908, p.117)

Silva (2009) destaca que, em muitos casos, há nítidas discrepâncias entre um conceito matemático formalmente definido e aquilo que entendemos sobre tal conceito, ou ainda, sobre aquilo que explicamos em aula e aquilo que realmente é entendido pelo aluno.

Tall & Vinner, definem a IC como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, incluindo todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. É construída através dos anos por experiência de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (1981, p.152, tradução nossa)

Novais (2011, p. 41), exemplifica que:

> [...] a Imagem de Conceito sobre uma equação de duas variáveis pode ser considerada como tudo aquilo que o indivíduo tem em mente sobre essas equações. Essa imagem é constantemente transformada à medida que o indivíduo enfrenta novas experiências com relação a tais equações. Essas experiências vêm por meio de exercícios, problemas, conjecturas, teoremas, etc. A Imagem de Conceito de um indivíduo sobre essas equações pode englobar várias propriedades, exemplos, imagens e processos, tais como: a equação $y=mx+q$, a relação entre dois conjuntos numéricos A e B, uma tabela na qual se exprimem valores arbitrários para uma das variáveis, determinando, assim, a outra, o gráfico da parábola associado à equação quadrática em uma variável, etc. Neste contexto, a Imagem de Conceito pode conter atributos inconsistentes, equivocados e até errados sobre determinado conceito, como por exemplo, um estudante pode conter em sua Imagem de Conceito a seguinte ideia: equação e função é a mesma coisa.

A Definição de Conceito - DC (se houver) é uma expressão utilizada para especificar determinado conceito. Pode ser uma reconstrução pessoal, do estudante, de uma

[2] Entenderemos por Definição Formal aquela aceita pela comunidade matemática em geral.

definição. É a forma com que o estudante usa as palavras para se referir ao conceito. “Se a Definição de Conceito é dada a ele ou construída por ele mesmo, esta pode variar ao longo do tempo” (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa). Sendo assim, a DC pode diferir da Definição Formal e, além disso, pode ser inconsistente com a IC.

Vinner & Hershkowitz (1980), Tall (1988), Giraldo (2004), Lima R. (2007), Escarlate (2008) e Novais (2011), destacam e a apresentam inúmeras características, propriedades e exemplos em que a Teoria de Imagem de Conceitos se materializa.

### 2.1. Fatores de Conflito Potencial e Fatores de Conflito Cognitivo

Outro termo que é introduzido por Tall & Vinner (1981) é Imagem de Conceito Evocada, descrevendo assim toda a parte da IC que é ativada em certo momento. Para eles:

> Em diferentes momentos, aparentemente imagens conflitantes podem ser evocadas. Apenas quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente precisa haver qualquer sentido real de conflito ou confusão.” (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa)

Um Fator de Conflito Potencial (Tall; Vinner, 1981) é uma parte da IC que pode entrar em conflito com outra parte da IC. Exemplificando, Novais (2011, p. 43) coloca que:

> [...] quando se ouve a palavra “função de 2º grau” instantaneamente pode vir à mente do indivíduo a imagem da parábola, pode vir a lei $f(x)=x^2$, pode vir a equação $y=x^2$. Num outro momento o mesmo indivíduo, ao ouvir a palavra “equação de 2º grau com duas variáveis”, pode evocar a expressão $f(x)=ax^2+bx+c$, pode evocar a concavidade, a taxa de variação da curva gerada pelas soluções desta equação, a expressão $y=x^2$. Porém evocando simultaneamente aspectos da equação de 2º grau com duas variáveis e aspectos da função de 2º grau, vários conflitos e confusões podem surgir, como por exemplo: “parábolas com concavidade à direita ou à esquerda podem representar funções?”.

Dessa forma, um Fator de Conflito Potencial (Tall; Vinner, 1981) é uma parte da IC que pode entrar em conflito com outra parte da IC. “Quando a imagem de conceito evocada contém um fator de conflito potencial, temos o Fator de Conflito Cognitivo” (Tall & Vinner, 1981, p. 153, tradução nossa). Ou seja, a Imagem de Conceito Evocada, que é ativada a partir de estímulos como os de resolver um exercício, fornecer um contraexemplo, demonstrar um teorema, promove porções da mesma Imagem de Conceito que podem ser contraditórias em determinados momentos, gerando assim os Fatores de Conflito Cognitivo.

### 2.2. Unidades Cognitivas e Raízes Cognitivas

Banard & Tall (1997), introduzem o termo Unidade Cognitiva - UC como sendo uma parte da IC que o indivíduo pode manter no foco da atenção em um determinado momento. Apesar de serem ideias surgidas em momentos e contextos diferentes, os termos Unidades Cognitivas e Imagem de Conceito se complementam, apresentando uma relação estrita entre si. Novais (2011, p. 45) destaca que "Uma Unidade Cognitiva pode ser um símbolo ($f(x)$), um fato específico ($f(3)=9$), um fato geral ($f(x)=x^2$), uma relação ($f$: A em B), um teorema (o gráfico da função dada pela lei $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a$, $b$, $c \in$ IR e $a \neq 0$ é uma parábola), e etc.".

Para Banard & Tall (1997, p. 41, tradução nossa), "[...] a capacidade de conceber e manipular unidades cognitivas é uma facilidade vital para o pensamento matemático". Esses autores destacam que dois fatores complementares que são importantes na construção de uma poderosa estrutura de pensamento são (1997, p. 41): a capacidade de comprimir informações em unidades cognitivas; a habilidade de fazer conexões entre as unidades cognitivas tal que informações pertinentes possam ser colocadas ou retiradas do foco da atenção quando for conveniente.

A definição de Raiz Cognitiva - RC apresentadas por Tall (1989, p. 9, tradução nossa), é "um conceito de ancoragem, que o aluno considera de mais fácil compreensão, formando uma base sobre a qual uma teoria pode ser construída".

Tall (2000, p. 11, tradução nossa) redefine RC apresentando a sua relação com a IC do indivíduo, ele escreve que é "[...] uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior.".

Dessa forma, Tall caracteriza a RC como uma UC, consolidando-a como pertencente à IC do indivíduo.

Tall, McGowen & DeMarois (2000, p. 255), partindo da ideia inicial de Tall (1989), caracterizam a RC como um conceito encontrado no início de uma sequência de currículo que: 1) é uma UC significativa e fundamental para conhecimento do aluno no início da sequência de aprendizagem; 2) permite o desenvolvimento inicial por meio de uma estratégia de expansão significativa em vez de uma reconstrução cognitiva; 3) contém a possibilidade de um significado a longo prazo, no desenvolvimento teórico posterior do conceito matemático; e 4) é robusta o suficiente para permanecer útil quando uma compreensão mais significativa se desenvolve. Novais (2011, p. 49) exemplifica RC:

> [...] pela noção de número de soluções de um sistema de equações com duas incógnitas a partir do gráfico dessas equações. Partido da ideia que a Imagem de Conceito do estudante já reconhece o Lugar Geométrico das soluções de uma equação em IR², isto é, mais especificamente, o estudante já reconhece o gráfico da equação $ax+by+c=0$ com $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ e $a, b, c \in$ IR, como uma reta e $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ e $a, b, c, d, e \in$ IR, como uma parábola, elipse, hipérbole ou circunferência. Um software gráfico pode auxiliá-lo na construção da teoria sobre o número de soluções de um sistema de equações, utilizando a Raiz Cognitiva que estas soluções são dadas pelas interseções entre os gráficos. Ou seja, se a Imagem de Conceito de um indivíduo reconhece que os Lugares Geométricos das soluções das equações $x^2+y^2=4$ e $x+y=m$, com $m\in$IR são respectivamente uma circunferência e uma reta, o indivíduo pode variar o valor de $m$ (em de um software gráfico), verificando assim os casos de tangência, secância e em que os gráficos não se tocam.

## 3. UMA PROPOSTA ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM IR²

Em virtude das hipóteses levantadas, procurou-se estabelecer uma sequência didática sobre o conceito de equações em que se viabilizem as seguintes ideias: O estudo de estruturas unidimensionais para uma posterior extensão para estruturas bidimensionais; A assimilação de um número real como a coordenada de um ponto na reta; Noções de geometria analítica que favorecessem a análise, conjectura, generalização e prova de várias propriedades sobre as equações e seus gráficos; A compreensão das noções sobre Lugar Geométrico - LG, possibilitando a futura definição de LG’s como a reta, circunferência, parábola, elipse, etc; O reconhecimento do gráfico de uma equação como o LG das soluções desta equação; O entendimento que a solução de um sistema de equações é dada pelos pontos de interseção entre os LG’s de cada uma das equações.

Dessa forma, foi elaborada uma proposta alternativa para o estudo de Equações Indeterminadas e Sistemas de Equações. Em Novais (2011) é possível encontrar as atividades modulares desta proposta na íntegra. A estrutura divide-se em 3 eixos norteadores: Noções Fundamentais de Geometria Analítica; Lugares Geométricos; Equações Indeterminadas e Sistema de Equações.

### 3.1. Noções Fundamentais de Geometria Analítica

Esse eixo foi dividido em dois módulos: Coordenadas na Reta e Coordenadas no Plano.

No primeiro o estudante é levado a compreender o número real como a coordenada de um ponto na reta, sendo estabelecida, assim, uma concepção inicial sobre estruturas unidimensionais, para uma posterior inserção em estruturas bidimensionais. É construída a noção do módulo de um número real a partir da noção de distância entre coordenadas da reta, fornecendo uma visualização geométrica e um sentido concreto para a definição de módulo, permitindo uma generalização da noção de distância entre dois pontos da reta para uma posterior conceituação da distância entre dois pontos no plano, favorecendo assim, a extensão de conceitos em IR para IR².

No segundo, é apresentada uma abordagem em que as noções iniciais de geometria analítica são desenvolvidas a partir de uma generalização das noções de coordenadas na reta. Vários problemas que buscam a conjectura de propriedades são apresentados, e, a partir de tais conjecturas, os teoremas são provados. Destacam-se neste módulo o teorema sobre a distância entre dois pontos no plano e o teorema que relaciona o coeficiente angular entre dois pontos e a condição de alinhamento entre três pontos, pois estes são de fundamental importância para os objetivos almejados no módulo posterior.

No diagrama 1, podemos resumir as conexões neste tipo de abordagem, que favorecerá posteriormente a conjectura e demonstrações de proposições relacionadas às equações, como veremos posteriormente.

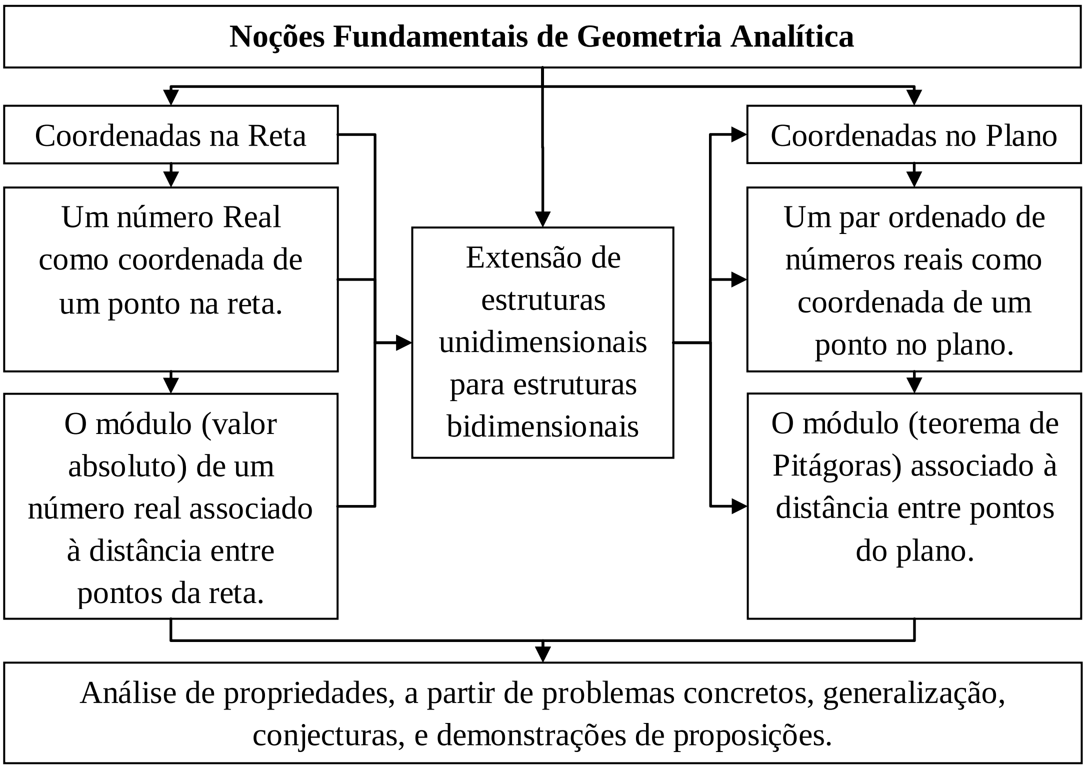


**Diagrama 1: Resumo das conexões fornecidas pelo primeiro eixo norteador**

### 3.2. Lugares Geométricos

No módulo “Lugares Geométricos”, o software de geometria dinâmica “Geo-Gebra” é utilizado com os estudantes, buscando-se a compreensão da definição de LG, assim como as definições de reta, reta mediatriz, circunferência, parábola e elipse. Na figura 1, é apresentada a solução do exercício “Qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades da origem e 1 unidade do ponto A=(-2,1)”. Dá-se aqui uma ideia inicial do que será mais tarde a solução de um sistema de equações, com base no conceito de Raiz Cognitiva proposto por Tall (1989).

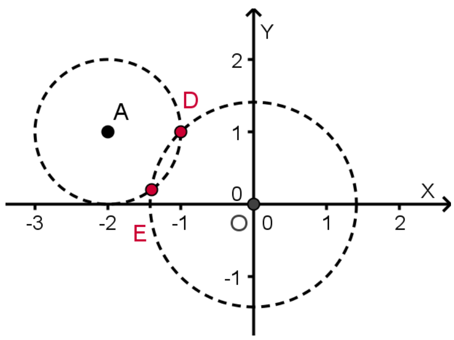


**Figura 1: Soluções do exercício 4, pontos D e E.**

No diagrama 2, encontramos um resumo das principais aquisições obtidas pelo estudante após ter passado por este módulo.

**Lugares Geométricos**

| | | |
|---|---|---|
| Reconhecimento que pode-se ter: nenhum, finitos ou infinitos pontos que satisfazem determinada condição. | Plenas condições de definir: reta, circunferência, reta mediatriz, parábola e elipse como LG’s. | Reconhecimento que dados as condições 1, 2, ..., n e seus respectivos LG-1, LG-2, ..., LG-n, o LG que atende simultaneamente a todas condições é formado pelos pontos de interseção entre todos os LG’s. |

Com as definições de reta, parábola, circunferência e etc., será possível posteriormente provar afirmações sobre o gráfico de equações.

**Diagrama 2: Resumo das conexões fornecidas pelo segundo eixo norteador.**

Em resumo as aquisições pretendidas são: Compreensão da noção de Lugar Geométrico; Condições plenas de definir reta, circunferência, parábola e outros LG's; Reconhecer que a interseção entre dois ou mais LG's é o Lugar Geométrico dos pontos que satisfazem simultaneamente condições de cada um dos LG; Disponibilizar mecanismos para futuras justificativas matemáticas envolvendo gráficos de equações.

### 3.3. Equações Indeterminadas e Sistemas

Esse eixo também foi dividido em dois módulos: Equações Indeterminadas e Sistema de Equações.

No primeiro, os conceitos de equações de duas variáveis, isto é, equações em $IR^2$ são tratados de forma a desenvolver uma compreensão do gráfico de uma equação como Lugar Geométrico das soluções desta equação. É utilizado o termo Equações Indeterminadas, pois neste caso o conjunto solução pode ser tanto finito quanto infinito. Vários exercícios a serem realizados no Geo-Gebra e com papel-lápis são apresentados, levando os alunos a conjecturarem propriedades que, em seguida, são demonstradas.

Como gancho inicial para este módulo, tem-se a questões "[...] Um exemplo de equação indeterminada seria $x+y=6$. Quantas soluções reais você poderia listar para esta equação?" e "Como poderíamos representar todas as soluções para a equação $x+y=6$?". Nesta etapa, as diversas representações das soluções desta equação serão abordadas. A representação por meio de uma tabela com os pares ordenados das soluções mostra-se ineficiente, à medida que apresenta um subconjunto limitado e discreto do conjunto solução, o mesmo acontece com a representação cartesiana dos pares ordenados da tabela.

Os principais objetivos propostos por este módulo em correlação com os módulos anteriores são: Reconhecer o gráfico de uma equação em $IR^2$ como o Lugar Geométrico das soluções desta equação; Perceber que a condição de alinhamento entre três pontos e a distância entre dois pontos são ferramentas fundamentais da Geometria Analítica que fornecem subsídios para generalizar a reta, a parábola e a circunferência como Lugares Geométricos de equações polinomiais de 1º e 2º graus; Reconhecer o Lugar Geométrico de uma equação específica polinomial de 1º ou 2º grau; Conjecturar, generalizar e demonstrar propriedades de equações indeterminadas de 1º e 2º grau e de seus respectivos gráficos.

No módulo "Sistema de Equações", o exercício que serve como um gancho para a formalização das ideias é "10) Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam ao ponto A(2, 0) e a reta r: *y=2* e são colineares aos pontos B(-5, -5) e C(4, 1)?". É interessante observar que nos exercícios anteriores deste módulo, havia apenas uma condição imposta para o LG, fornecendo assim, na maioria dos casos, um conjunto infinito de soluções. Já no caso deste exercício, há duas condições simultâneas para o LG, neste caso será necessário determinar a equação referente à primeira condição e, em seguida, a equação referente à segunda condição, para depois determinar o conjunto solução que satisfaz ambas as equações. Deste gancho é apresentada uma resolução algébrica e geométrica deste exercício. Os pontos D e E são a solução neste caso, conforme pode ser observado na Figura 2.

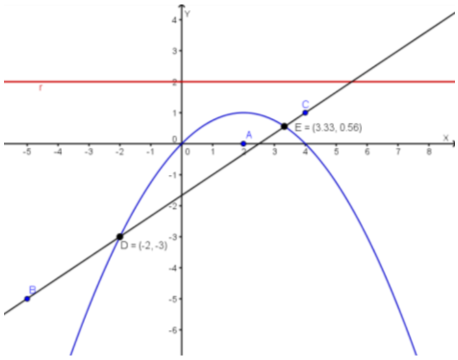


**Figura 2: Soluções do exercício 10, ponto D e E.**

Os principais objetivos propostos por este módulo em correlação com os anteriores são: Correlacionar os conhecimentos desenvolvidos nos módulos Lugares Geométricos e Equações Indeterminadas, respectivamente, com a noção de número de soluções de um sistema de equações; Identificar a solução gráfica de um sistema de equações como uma Raiz Cognitiva para o desenvolvimento da teoria sobre sistema lineares ou não-lineares, pressupondo-se que as noções sobre Equações Indeterminadas já fazem parte da Imagem de Conceito do estudante; Reconhecer que o conjunto solução de um sistema de equações é dado pelos pontos de interseção entre os LG's de cada uma das equações; Reconhecer que os pontos de interseção entre os gráficos das equações são os únicos pontos que satisfazem todas as equações do sistema; Utilizar o software de geometria dinâmica Geo-Gebra para uma melhor compreensão de conceitos complexos sobre sistemas, analisar e generalizar propriedades sobre sistemas.

No diagrama 3, podemos resumir as principais conexões existentes nos dois últimos módulos discutidos, que em sua grande maioria foram tratados com o auxílio de software de geometria dinâmica.

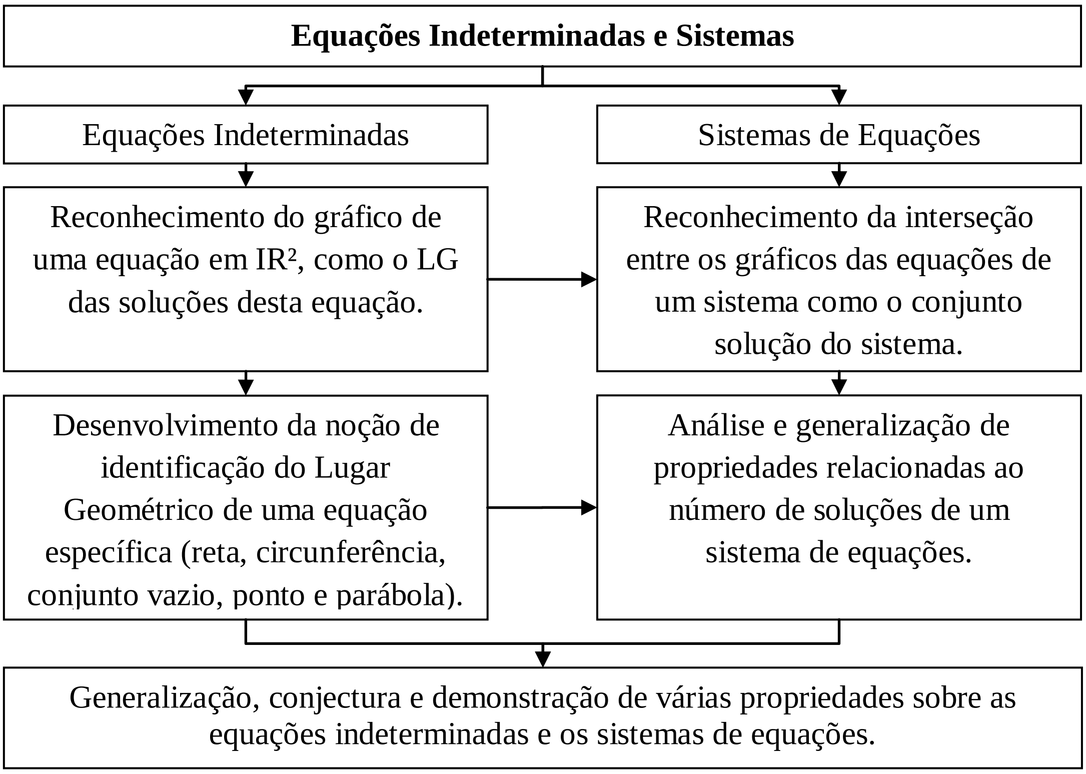


**Diagrama 3: Resumo das conexões fornecidas pelo terceiro eixo norteador.**

## 4. METODOLOGIA E RESULTADOS OBTIDOS

Foram desenvolvidas duas pesquisas bibliográficas e uma pesquisa de campo. Foi realizado uma análise qualitativa dos dados, o que acreditou-se ser necessário para obter uma conclusão mais detalhada acerca das discussões dos efeitos da abordagem sobre as Imagens de Conceito dos participantes.

Os participantes desta pesquisa foram selecionados entre alunos da graduação em Licenciatura em Matemática do Centro Universitário de Barra Mansa – UBM.

### 4.1. Planejamento das Atividades de Trabalho

O planejamento das atividades consistiu três etapas: 1) Pesquisa Bibliográfica, objetivando o estudo e a análise de teorias que viessem fundamentar a construção de uma sequência mais natural para o ensino de equações em $IR^2$; 2) Pesquisa bibliográfica, com os objetivos de: i) analisar uma coleção de livros didáticos do ensino médio que apresentassem uma sequência didática considerada inadequada para o desenvolvimento do conceito de equações e seus gráficos; ii) preparar para o planejamento dos conteúdos a serem incluídos numa proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas; e iii) elaboração de uma proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas e sistema de equações a ser apresentado sob a forma de curso de extensão universitária; 3) Pesquisa de Campo com as seguintes ações: i) aplicação de um questionário de pesquisa objetivando conhecer um pequeno perfil de cada um dos participantes do curso; ii) aplicação de um pré-teste de forma a diagnosticar uma parte da Imagem de Conceito dos cursistas sobre o tema equações; iii) Desenvolvimento do curso denominado "Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos". Este curso foi dividido em cinco módulos, totalizando uma carga horária de 40 horas que foi oferecido no UBM pela pró-reitoria comunitária, sob a forma de curso de extensão, ocorrido entre os meses de novembro e dezembro de 2010; iv) aplicação de um pós-teste de forma a analisar o desenvolvimento da Imagem de Conceito sobre equações do cursista pós-curso; e v) Análise dos resultados da pesquisa e conclusões.

Em Novais (2011) é possível encontrar na íntegra as atividades modulares, análise da coleção de livros didáticos, pré/pós-teste, resultados individuais (por participante), resultados gerais, entre outros.

## 5. Considerações finais

Inicialmente, o problema que motivou a elaboração desta pesquisa foi "As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções". Além disso, em virtude da delimitação do tema, procuramos focar nossos trabalhos apenas na representação gráfica de equações em IR e IR². Dentre as hipóteses levantadas que possivelmente agravam essa problemática, algumas puderam ser comprovadas ao longo da elaboração, aplicação e análise dos dados.

Apesar de poucos participantes terem reconhecido que há diversas interpretações para equações da forma $x\text{-}a=0$ e que isto dependeria do universo em que se encontram as soluções da equação, consideramos que uma abordagem de coordenadas na reta antecipadamente ao estudo de coordenadas no plano fortalece essa noção, além de proporcionar uma extensão de estruturas em IR para IR². A hipótese de que esta sequência não é realizada adequadamente por alguns livros do ensino médio foi corroborada com a análise da coleção do Ensino Médio, ver Novais (2011).

Nessa mesma análise, consolidou-se a hipótese da apresentação extremamente reducionista para sistema de eixos ortogonais. Desta forma, a elaboração de uma sequência didática sobre plano cartesiano, envolvendo problemas contextualizados, conjectura de propriedades e demonstração das principais proposições envolvendo distância entre pontos e condição de colinearidade foi necessária.

Ainda na análise dos livros didáticos, foi comprovada a hipótese de que existem livros didáticos do ensino médio que apresentam as propriedades e objetos matemáticos sem a devida argumentação matemática. Por meio da proposta alternativa planejada, foi possível construir uma sequência didática que favorece a conjectura, generalização e demonstração de proposições relativas a equações em $IR^2$.

Apesar de confirmado a existência de sequências didáticas que pouco favorecem a conexão e a evolução de tópicos da matemática como funções e geometria analítica, além de causar um sentimento de informalidade excessiva ao objeto matemático, não foi possível, devido a diversas limitações da experiência, apresentar um trabalho adequado envolvendo funções. Contudo, acreditamos que o enriquecimento da Imagem de Conceito sobre as relações existentes entre as equações e o lugar geométrico de suas soluções servirá como um excelente fortalecedor da compreensão sobre as diversas representações das funções analíticas. Sendo assim, este trabalho deixa em aberto a possibilidade de estudo dos efeitos da proposta alternativa sobre o ensino de funções analíticas na educação básica ou superior.

A partir dos documentos analisados, percebemos a falta de uma abordagem adequada sobre Lugares Geométricos no ensino médio. Acreditamos que esse tipo de abordagem, associada ao uso de software de geometria dinâmica, minimiza as dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos relativos às diversas representações das soluções de uma equação, ver Novais (2011) capítulo 5.

Não encontramos no livro didático analisado, uma abordagem qualitativa sobre o número de soluções sistemas de equações em $IR^2$, confirmando nossa hipótese. Após a estruturação das coordenadas em IR, a demonstração de teoremas indispensáveis para a sequência proposta, a compreensão adequada sobre Lugar Geométrico, a conjectura, análise e demonstração das principais propriedades relacionadas a equações e seus gráficos, foi possível realizar com os participantes uma análise qualitativa do número de soluções de um sistema de equações em $IR^2$. Consideramos que esta análise foi extremamente importante para o enriquecimento de suas Imagens de Conceito, o que futuramente poderá contribuir para uma boa inserção em áreas mais avançadas da Matemática como o Cálculo Diferencial e Integral, a Álgebra Linear e a Análise.

Concluímos desta forma o trabalho, acreditando que uma proposta alternativa que envolva uma sequência didática bem estruturada, associada à utilização de software de Geometria Dinâmica, destacando as conexões entre coordenadas na reta, coordenadas no plano, lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações, minimizará as dificuldades encontradas na compreensão das relações existente entre as equações e as diversas representações de suas soluções, assim como proporcionará a conjectura de propriedades que poderão ser discutidas através de uma argumentação matemática sólida.

## BIBLIOGRAFIA

BARNARD, A. D.; TALL, D. O. Cognitive Units, Connections, and Mathematical. Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education, 2, 41-48, 1997.

CROWLEY, L., TALL, D., O., The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in achieving Goals in College Algebra. Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, 2, 225-232, 1999.

ESCARLATE, A. Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.

GIRALDO, V. Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada. Tese (doutorado em ciências). Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GRAY, E., TALL, D. O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 65-72, 2001.

GRAY, E., TALL, D., O. Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. The Journal for Research in Mathematics Education, v. 26, n.2, p. 115-141, 1994.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: Ciência e Aplicações. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004. Vol 1, 2, 3.

LIMA, R. N. D. Equações Algébricas no Ensino Médio. Uma jornada por diferentes mundos da matemática. Doutorado em Educação Matemática. PUC: São Paulo, 2007.

MCGOWEN, M., DEMAROIS, P., TALL, D., O. The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. Proceedings of PME-NA, 1, 255-261, 2000.

NOVAIS, André Seixas. Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em $IR^2$/André Seixas de Novais – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.

POINCARÉ, H. Science et Méthode. Reedição de 1999. Paris: Kimé, 1908.

RIBEIRO, A., J. Equações e seus multisignificados no ensino da matemática: contribuições de um estudo epistemológico. São Paulo, 2007. 141 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontífica Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, C., M. Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais. Rio de janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

TALL, D. O. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand, 3–20, 2000.

TALL, D. O. Concept Image and Concept Definition. University of Warwick Published in Senior Secondary Mathematics Education, 37-41, 1988.

TALL, D. O. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. For the Learning of Mathematics, 9, 3, 37-42, 1989.

TALL, D. O. VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.

THOMAS, M., TALL, D. O. Encouraging versatile thinking in algebra using the computer, Educational Studies in Mathematics, 22, 2, 125-147, 1991.

VINNER S., HERSHKOWITZ R. Concept Images and Some Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometric Concepts. Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177-184, 1980.