

## TORRE DE HANÓI: O JOGO COMO RECURSO METODOLÓGICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

*Adriane Eleutério Souza*

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná -Ponta Grossa*

*profadrimat@hotmail.com*

### **Resumo**

Este artigo trata de uma proposta pedagógica para o ensino de matemática usando o jogo como um recurso metodológico para o ensino-aprendizagem de funções e progressões, para a 1ª série do Ensino Médio. Tem por objetivo apresentar o conteúdo de forma lúdica, para desafiar e motivar o aluno na construção de seu conhecimento a partir do jogo da Torre de Hanói. À medida que o jogo se desenvolve, o aluno irá relacionar as grandezas envolvidas e, a partir dessas relações, terá condições de construir o conceito de função e progressão. A importância dessa pesquisa é colocar o jogo como um recurso metodológico, para que as situações criadas por ele em sala de aula façam o aluno ter autonomia de construir o seu conceito sobre o conteúdo. A metodologia utilizada é de caráter descritivo para melhor explicar o uso desse jogo a todo o leitor que se propuser a aplicá-lo em turmas de 1ª série do ensino médio explorando os recursos que ele oferece dentro dos conteúdos propostos.

**Palavras - chave:** Ensino; aprendizagem; jogo; função; progressão.

### **1 Introdução**

A escola tem por função dar a formação adequada ao aluno, capacitando-o para saber relacionar as informações e os conhecimentos na resolução de situações-problema, tornando-o um cidadão crítico. No entanto não se têm obtido por meio do ensino tradicional uma forma de desenvolver nos alunos a autonomia, a capacidade de reflexão crítica e a criatividade para aplicar os conhecimentos adquiridos.

Assim, as preocupações com um ensino de qualidade em qualquer nível escolar são cada vez mais frequentes e hoje muitos estudos apontam caminhos para a busca de recursos metodológicos que podem apoiar o aluno em sala de aula.

Entretanto, a matemática, por seu aspecto abstrato e sua natureza dedutiva, exige que o seu ensino seja desenvolvido por meio da construção de uma atividade concreta sobre os objetos para a qual o aluno necessita da intuição como um processo mental, afirma Huete (2006, p. 15).

Nesse pressuposto, pode-se inserir o jogo como um recurso metodológico em sala de aula, pois a sua importância está nas possibilidades de aproximar o aluno do conhecimento científico ao enfrentar situações que demandam reflexão, análise e criação de estratégias para resolver problemas, assim estabelecendo um caminho para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

A relevância do jogo no ensino de matemática é por seu caráter lúdico, pois atividades lúdicas são inerentes ao ser humano, assim como cantarolar, brincar, cantar, ou seja, atividades que proporcionam prazer ao serem executadas. Portanto, de acordo com Ribeiro (2009, p. 18), “Nos momentos em que estão concentradas em atividades lúdicas, as crianças envolvem-se de tal modo que deixam de lado a realidade e entregam-se às fantasias e ao mundo imaginário do brincar”.

Nesse sentido, vindo corroborar com Grandó (2004, p. 18), que afirma:

[...] a psicologia do desenvolvimento destaca que a brincadeira e o jogo desempenham funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no processo de desenvolvimento do aluno. O jogo apresenta-se como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade do aluno, dentre outras de movimento e ação. [...] o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse do aluno, não apenas pelos objetos, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio ao desenvolvimento do pensamento abstrato.

Com o intuito de aprimorar a prática docente, é que se propõe nesse trabalho explorar o jogo da Torre de Hanói como um recurso metodológico de forma que contribua na construção dos conceitos de função e progressão, para o ensino de matemática na 1ª série do ensino médio.

## **2 Referencial teórico**

O conhecimento matemático, em qualquer nível de ensino, não se constitui num conjunto de fatos a serem memorizados. Dessa forma, deve ter um caráter dinâmico que requer ações de ensino direcionadas para que os alunos aprofundem e ampliem os

significados que elaboram mediante as suas participações nas atividades de ensino e aprendizagem, pois, de acordo com Freire (2005, p. 22), “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção”.

Nesse sentido, para que ocorra a aprendizagem, ela tem que ser significativa e relevante, visando à compreensão de significados, possibilitando relações com experiências anteriores, vivências pessoais e outros conhecimentos, pois o ensino da matemática deve orientar a resolução de problemas desafiando e incentivando o aluno a aprender mais e utilizar esse aprendizado em diferentes situações científicas ou sociais.

Portanto, ao ensinar matemática tem-se:

[...] que relacionar as ideias com algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição, para que o novo conhecimento se entrelace construindo o raciocínio lógico do indivíduo e dando significado ao novo aprendizado (AUSUBEL,1980, p. 34).

Para tanto, ao educador está o desafio de buscar recursos metodológicos para um ensino mais abrangente, envolvente e multidisciplinar e vendo no lúdico uma possibilidade de construir uma ponte entre o real e o imaginário. Afirma Bicudo, (1999, p.188):

É nessa função, que o jogo se equivale à linguagem, pois ambos representam a realidade e a transpõem, como sua ficção e é pela atividade lúdica que se torna possível o uso dos signos e, então, a constituição da semiótica; assim, o jogo gera o signo cujo valor é dado pela sociedade.

É nesse contexto que se insere a proposta pedagógica de trabalhar de forma lúdica a matemática por meio de jogos.

## **2.1 O lúdico na escola**

As atividades lúdicas são características essenciais do ser humano, pois existe uma necessidade do homem de exercer atividades cujo objetivo seja o prazer que estas possam lhe proporcionar. Essa necessidade não é minimizada ou modificada em função da idade do indivíduo. Exercer atividades lúdicas é uma ação para qualquer momento da vida, pois estão presentes em nosso cotidiano, assim como ouvir música, cantar, brincar, caminhar e tudo que possa representar um bem-estar para nós mesmos.

Segundo Grando (2008, p. 10), “o ensino de forma lúdica exerce um papel fundamental para o desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral dos alunos,

representando um momento que necessita ser valorizado em sala de aula”. Assim, o jogo, a brincadeira, a música, o lazer enquanto atividades livres, gratuitas são exemplos daquilo que representa a atividade lúdica e longe estão de se reduzirem apenas a atividades infantis.

Freinet denomina de "Práticas Lúdicas Fundamentais" não o exercício específico de alguma atividade, pois ele acredita que qualquer atividade pode ser corrompida na sua essência, dependendo do uso que se faz dela. Logo, para Freinet (1988, p. 304), a dimensão lúdica é:

[...] um estado de bem-estar que é a exacerbação de nossa necessidade de viver, de subir e de perdurar ao longo do tempo. Atinge a zona superior do nosso ser e só pode ser comparada à impressão que temos por uns instantes de participar de uma ordem superior cuja potência sobre-humana nos ilumina.

Nesse contexto, o jogo assume caráter lúdico por sua natureza desafiadora, trazendo movimento, barulho e certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. A ideia de ludicidade nessa proposta é de um trabalho que estimule a aprendizagem, desenvolvendo habilidades matemáticas por parte dos alunos.

## **2.2 Jogos no ensino da matemática**

O jogo é um recurso metodológico que oportuniza a interação entre os alunos em sala de aula e, a partir das discussões geradas, cria um envolvimento capaz de promover maior participação, cooperação, respeito mútuo e pensamento crítico entre os alunos, em qualquer área do conhecimento.

Assim sendo, nas aulas de matemática, o jogo é usado como uma estratégia de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional, pois, segundo Smole e Diniz (2007, p.9):

Em se tratando de aulas de matemática, o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático.

Portanto, o jogo é uma atividade pedagógica que exige planejamento e orientação, pois leva o aluno ao desenvolvimento das habilidades tais como observação, análise,

levantamento de hipótese, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização desenvolvendo linguagens e diferentes processos de raciocínio.

Sendo assim, a dimensão lúdica está associada à dimensão educativa do jogo. Essa dimensão não pode ser confundida com momentos de descanso ou passatempo, ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse.

Sabendo que o ensino tradicional de matemática pode levar o aluno ao desencanto por essa ciência e sendo os erros um dos motivos consequentes da falta de compreensão dos conteúdos, pode-se associar o lúdico ao ato educativo do jogo. O erro, de acordo com Smole (2007, p.10), é uma consideração importante a ser trabalhada, sendo que o jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia.

Ao trabalhar com o jogo, os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, sem deixar marcas negativas, oportunizando novas tentativas que estimulam a verificação e a descoberta do erro, replanejando jogadas que propiciam a aquisição de novas ideias e novos conhecimentos. Ao permitir que aluno corrija seus erros revendo suas respostas, o jogo possibilita a ele a descoberta de em que falhou ou teve sucesso e por que isso ocorreu. Essa consciência permite ao aluno compreender o próprio processo de aprendizagem desenvolvendo a autonomia para continuar aprendendo.

## **2.2.1 O jogo – Torre de Hanói**

### 2.2.1.1 Um pouco de história

A torre de Hanói – também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo – foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. Segundo ele, o jogo, que era popular na China e no Japão, veio do Vietnã.

O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus

Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges receberam foi de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

#### 2.2.1.2 Estrutura, propriedades e regras da Torre de Hanói

O jogo é composto de um tabuleiro com três furos e a distância entre eles deve ser próxima da medida do diâmetro do disco maior, sabendo que são seis discos concêntricos, com diâmetros diferentes e com um furo central para o encaixe em um dos três pinos de madeira, os quais são encaixáveis nos furos sobre o tabuleiro.

O desafio deste jogo consiste em transferir os discos, que devem estar inicialmente empilhados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho, com o maior deles na base e o menor no topo. Esta transferência pode ser feita para quaisquer dos outros pinos livres, no menor número de movimentos possíveis, movendo apenas um disco de cada vez e sem sobrepor um disco maior sobre outro menor. A disposição final dos discos deve ser igual a do início do jogo. A Torre de Hanói é um jogo de manuseio individual.

O número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema depende do número de discos e a partir dessa dependência o objetivo é descobrir, de forma dedutiva, a relação matemática existente entre eles.



**Figura 1: O jogo - Torre de Hanói**

### **3 Metodologia**

Este trabalho tem característica educativa que visa à aplicação do jogo da Torre de Hanói, como um recurso metodológico dentro de uma prática pedagógica para o ensino de matemática e tem por objetivo descrever tal prática como uma proposta de ensino-aprendizagem de função e progressão, por meio lúdico para a 1ª série do ensino médio.

A escolha de uma metodologia adequada ao que se pretende descrever é de grande importância para a realização da pesquisa. O trabalho deverá contribuir com as práticas pedagógicas de outras pessoas que tenham acesso aos estudos realizados nessa pesquisa e que produzam a sua interpretação enriquecendo suas aulas e dando continuidade ao desenvolvimento do conhecimento científico. Diante do pressuposto e de acordo com Moreira e Caleffe (2006, p. 70), “os problemas podem ser resolvidos e as práticas melhoradas por meio da observação objetiva e minuciosa, da análise e da descrição. Muitas técnicas ou métodos de solução de problemas são incluídos na categoria de pesquisa descritiva”.

Assim sendo, este trabalho é uma sugestão para explorar a relação de dependência entre dois conjuntos que tem origem no jogo da Torre de Hanói. O jogo é executado de forma individual e independente de acordo com as propriedades e regras descritas no item 2.2.1.2 deste trabalho. A cada jogada, a partir do primeiro disco, anotam-se em uma tabela

os resultados organizados em duas colunas, uma para o número de discos e outra para o número de movimentos: para um disco um movimento; para dois discos três movimentos; para três discos sete movimentos e assim por diante até finalizar com os seis discos propostos inicialmente. As colunas determinam dois conjuntos numéricos, discos e movimentos e, à medida que o jogo se desenvolve, descreve-se o sequenciamento desses números dentro de cada conjunto, como ilustra a tabela abaixo:

**Tabela 1: Relação entre o número de discos e movimentos**

Nº de discos-D	Nº de movimentos-M
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

### **1º ESTUDO**

Com esses resultados, verifica-se a correspondência um a um entre o número de discos e os seus movimentos. Assim, esta relação é chamada de função, pois cada elemento do conjunto D se associa a um e somente um elemento do conjunto M. Dentro da semiótica matemática, essa associação é chamada de correspondência biunívoca, logo esse é o momento de construir o conceito de função no contexto matemático. Com a intervenção do professor, fazem-se questionamentos ao aluno sobre os valores encontrados, conduzindo-o a perceber que ao mudar o número de discos, conseqüentemente variam os de movimentos. Então, estes dependem dos discos, assim estabelecendo que os movimentos estão em função dos discos, ou seja, quem comanda o jogo é o número de discos. Assim, o conjunto discos fica denominado de conjunto domínio da função e os valores correspondentes no conjunto movimento compõem o conjunto imagem. Esses conceitos servirão de base para a formação dos pares ordenados. Na seqüência da discussão, em sala de aula, far-se-á a construção de gráficos no plano cartesiano.



## **2º ESTUDO**

De acordo com o conteúdo programático do 1º ano do Ensino Médio, as progressões farão parte do ano letivo desta série após o estudo das funções. Sendo assim, a tabela 1 serve de apoio para a construção do conceito das progressões de forma aplicada e significativa, partindo das sequências numéricas que se encontram no jogo.

**Tabela 2: As sequências numéricas dentro do jogo**

Nº de discos-D Progressão Aritmética	Nº de movimentos-M Sequência	Ímpar Decomposição	Progressão Geométrica
1	1	1	1
2	3	2 - 1	2
3	7	8 - 1	8
4	15	16 - 1	16
5	31	32 - 1	32
6	63	64 - 1	64

Dentro da tabela, as colunas se organizam a partir das jogadas e ao verificar algumas características numéricas, quando decomposta a sequência da coluna dos movimentos. Depois disso, identifica-se dentro desta sequência dos movimentos, uma progressão geométrica (P.G.), pois a partir do primeiro valor se *multiplica* por dois (razão) para o encontro do sucessor – assim se caracteriza a P.G. Na coluna dos discos, tem-se a sequência que se chama progressão aritmética (P.A.), pois, a partir do primeiro número, *soma-se* o número um (razão) para se encontrar o sucessor.

## **4 Conclusão**

O conteúdo de funções inicia-se na série final do ensino fundamental e é retomado na 1ª série do ensino médio, sendo abordado de forma algébrica e direta pelos livros didáticos, por meio de exercícios de fixação em forma de algoritmos não contextualizados.

Dessa forma, perde o vínculo matemático com o cotidiano do aluno e torna o aprendizado bastante abstrato. Logo, inibe o aluno de descobrir, de forma autônoma, as relações existentes entre as grandezas que estão embutidas em um contexto matemático, dificultando o seu aprendizado.

Com a percepção desse problema, exige-se do professor uma intervenção pedagógica para tornar esse aprendizado mais significativo. Com esse fim, o jogo da Torre de Hanói é o material de apoio como recurso metodológico desta pesquisa e com a proposta de estimular não só o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo, como também o das progressões, mostrando de forma concreta as diferentes sequências numéricas pertencentes ao jogo.

A partir da Torre de Hanói, o ensino-aprendizado de funções e progressões faz-se por meio de uma situação real consequente do jogo, que oportuniza ao aluno perceber a matemática de forma contextualizada e fazer referências como apoio das suas anotações e assim construir o seu significado para as relações existentes. Nesse sentido, irá conduzir o aluno a uma construção dinâmica sobre o conteúdo, capaz de provocar mobilidade às explorações matemáticas levando este a identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar situações relativas à definição de função, conjunto domínio, conjunto imagem e as diferentes sequências numéricas, de forma particular as progressões.

## 5 Referências

ANTUNES, Celso. **Como desenvolver as competências em sala de aula**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

AUSUBEL, D. P. ; NOVAK, J. D. ; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro, RJ: Interamericana, 1980.

BICUDO, Maria Aparentada. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

BRITO, Márcia Regina. **Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 2005.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo, SP: Paulus, 2004.

HUETE, Juan Carlos Sánches; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da matemática**. Porto Alegre, RS: Artemed, 2006.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1991. 102 p.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luis Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná, 2008.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre, RS: Artmed, 2001.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO Patrícia. **Brincadeiras infantis nas aulas de matemática**. Porto Alegre, RS: Artmed, 2000.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Cadernos do mathema**: jogos de matemática. Porto Alegre, RS: Artemed, 2007.