Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

COMO O PROFESSOR AVALIA AS ARGUMENTAÇÕES E PROVAS MATEMÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL?

Carlos Augusto Aguilar Junior
Pemat-UFRJ/SME-RJ
carlosaugustobolivar@hotmail.com

Lilian Nasser
Pemat-UFRJ/Projeto Fundão-UFRJ
lnasser@im.ufrj.br

Resumo:

O presente trabalho relata pesquisa realizada no âmbito da dissertação de mestrado que consistiu em avaliar as concepções de 59 professores de Matemática de Ensino Básico em relação à argumentação e prova apresentadas por alunos de ensino fundamental. Na pesquisa, os participantes responderam a questionários que continham respostas de alunos a questões onde deveriam mostrar a validade da afirmação matemática proposta (proposição). O levantamento mostrou que a grande maioria dos professores opta e avalia melhor respostas que apresentam um maior rigor técnico, como requer a Matemática, o que é relevante para a formação do professor e preparo para a sala de aula. Por outro lado, houve respostas bastante consistentes dos alunos que não foram tão bem avaliadas pelos professores, o que nos leva a inferir que estes não valorizam devidamente o raciocínio do aluno.

Palavras-chaves: Argumentação; Prova e Demonstração Matemática; Formação Docente; Concepções de Professores.

1. Introdução

Tem sido bastante debatido no âmbito da Educação Matemática, tanto no Brasil quanto ao redor do mundo, o tema da argumentação e da prova matemática e sua aplicação/ensino em sala de aula da Escola Básica e sua importância para a formação do raciocínio lógico-matemático do estudante.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997) – indicam caminhos para a formulação de um currículo de Matemática que permita desenvolver o saber matemático dos estudantes, ao postular que a Matemática

> permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (p. 15).

Conforme se depreende dos PCN (BRASIL, 1997, p.26), um dos objetivos do aprendizagem da Matemática no ensino fundamental é o desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e prova, com vistas, também, à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. Para tanto, o ensino de Matemática deve apoiar-se em estratégias e abordagens que explorem o raciocínio lógico-dedutivo.

Constata-se que, em geral, o conhecimento matemático dos alunos se restringe ao domínio de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que estão fazendo. Este pensamento é revelado por Ferreira (2006), Gouvea (1997) e Almeida (2007). No âmbito do relato de sua pesquisa de mestrado, ao discorrer sobre sua experiência docente, tanto em nível básico quanto superior, Almeida (2007) destaca

> a aguda deficiência, evidenciada por parcela considerável da população estudantil, no trato de questões matemáticas mais elaboradas no que concerne à profundidade do raciocínio lógico-dedutivo exigida para o encaminhamento das questões (p. 14).

Compartilhamos desta preocupação. É realmente frustrante para o estudante, que é estimulado apenas a realizar contas e aplicar fórmulas, perceber que não apresenta em seu desenvolvimento intelectual o domínio do raciocínio matemático. Quando o aluno é desafiado a resolver situações que demandem o uso de raciocínios mais elaborados e não apenas resultados prontos, este se percebe incapaz, mesmo quando apresenta em sua vida acadêmica histórico de bons resultados. Tal situação pode acarretar, como narrado por Almeida (2007, p. 2), “o esmorecimento e o consequente distanciamento dos estudos como também (...) verdadeiras situações de pânico e repulsa pela disciplina”.

Estes questionamentos nos levaram a refletir sobre o papel do professor na construção de um trabalho pedagógico que fomente o raciocínio matemático, a partir de uma proposta que abranja o trabalho de argumentação e prova em Matemática.

A admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da “validade formal de provas”, do valor de uma argumentação/prova dada a um determinado resultado. Hanna (1990) cita a reavaliação realizada por matemáticos e professores de Matemática ocorrida nas décadas de 1970 e 1980 quanto ao papel das estruturas axiomáticas e das provas formais. Segundo a autora,

> neste novo olhar, as provas passam a ter diferentes graus de validade formal, mantendo o mesmo grau de aceitação, permitindo com isso a reconsideração do que poderia ser prova ideal e de que se deveria ensinar nas escolas. (p. 8)

Ainda de acordo com Hanna (1990), dependendo do nível de aprendizagem do aluno, o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para se comprovar uma declaração matemática não deve necessariamente seguir os padrões de rigidez defendidos na Academia. Desse modo, percebe-se que muitos educadores matemáticos já assumem uma postura de afastamento quanto à exigência ou dependência extrema de provas rigorosas em Matemática, dando ênfase na concepção de prova como argumento convincente.

Queremos com este trabalho entender como se dá a compreensão e a aceitação dos professores quanto às argumentações e provas apresentadas pelos alunos.

2. Referencial Teórico

O levantamento bibliográfico realizado nos levou à reflexão sobre questões relativas aos saberes docentes que devem estar presentes em um processo didático estimulador do raciocínio lógico-dedutivo, especificamente quanto à argumentação e justificação em provas matemáticas.

As pesquisas realizadas por Hanna (1990, 1995), Knuth (2002), Healy, Jahn e Pitta Coelho (2007) e Jones (1997) nos ensinam que, ao se debruçar sobre a questão do ensino-aprendizagem de prova matemática, o pesquisador deve voltar o olhar para o trabalho didático-pedagógico do professor em relação à prova matemática, além de se debruçar sobre o estudo da formação acadêmica do professor, levantando informações que possibilitem obter uma visão deste processo formador.

O trabalho de Healy et al. (2007) traz um panorama teórico, citando pesquisas internacionais, revelando as concepções de alunos sobre a prova, como fazem, por exemplo, Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988).

Nosso levantamento encontrou várias pesquisas desenvolvidas ao redor do mundo, onde o objetivo em comum foi o de mapear as habilidades de prova dos alunos (CSÍKOS, 1999; MIYAKAWA, 2002; FURINGUETTI e PAOLA, 1997). De modo geral, estas pesquisas se apoiaram nos esquemas de prova de Sowder e Harel (1998) ou nos tipos de prova postulados por Balacheff (1988).

Csíkos (1999) e Miyakawa (2002) relatam em seus respectivos estudos investigações realizadas com estudantes de Hungria e França, dos ensinos fundamental e médio, estabelecendo uma relação entre a habilidade de argumentar e provar em Matemática com o desempenho na disciplina, além do domínio do assunto. Csíkos (1999) conclui que existe uma relação entre o bom desempenho escolar em Matemática e a habilidade de prova dos alunos, e Mayakawa (2002) conseguiu identificar através dos ensinamentos de Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988) as concepções de prova matemática destes alunos e correlacioná-las com o seu conhecimento matemático, pois verifica que "a dificuldade de construção da prova matemática não é devida apenas à competência algébrica ou à concepção sobre prova, mas também ao conhecimento matemático" (p. 353).

Já Furinghetti e Paola (1997) registram em seu artigo uma ideia semelhante à contida em Miyakawa (2002), ao chamar de *efeito de sombra algébrica ou aritmética* a relação entre os conceitos em Matemática com as concepções de prova dos alunos, pois os autores constatam que as dificuldades com a álgebra e com a aritmética produzem uma blindagem, impedindo a construção de argumentos e justificações pelos alunos.

Em Boavida (2005), vemos a preocupação com o desenvolvimento da habilidade de argumentação e justificação em Matemática, importante para o educando aprender a raciocinar lógica e dedutivamente. Ela defende o encorajamento dos alunos, levando-os a se defrontarem com este tipo de atividade, apesar da reconhecida dificuldade e complexidade desta postura didático-pedagógica, mas destaca a necessidade de uma postura metodológica que crie a "cultura de argumentação".

Holyes (1997) em sua pesquisa também procura identificar, através da aplicação de formulários contendo questões com prova matemática, os níveis de argumentação a existência de concepções de prova de alunos britânicos. Em seu levantamento, que se deu em duas etapas, a pesquisadora indagava dos participantes suas concepções sobre "prova matemática", buscando verificar se as competências elencadas no currículo britânico com respeito à prova se faziam presentes na formação acadêmica dos alunos, além de constatar, junto aos professores, suas próprias concepções de prova matemática e como se dava o seu processo de ensino-aprendizagem.

A forma de se demonstrar na academia, através do rigoroso método dedutivo, não estabelece diálogo com a Escola Básica, lugar onde irá atuar o professor. Desse modo, Knuth (2002) afirma que, ao se avaliar as concepções de prova dos professores, deve-se levar em conta o currículo e o nível de ensino do curso. Em seu trabalho, o autor relata estudo realizado com 17 professores atuantes no ensino médio, nos Estados Unidos. Na visão desses professores, a reforma curricular daquele país, que previa o ensino-aprendizagem de prova matemática para todos os alunos da rede de ensino, não seria uma tarefa simples de ser implementada. Os resultados de sua intervenção junto a estes indivíduos sugerem, ainda, que a visão do tema "prova matemática" é a de um assunto/matéria da grade curricular a ser ensinado, e não como uma forma de comunicar e estudar Matemática.

3. Modelo metodológico aplicado

Esta pesquisa adotou uma metodologia de caráter qualitativo, através da análise de dados coletados a partir de formulários respondidos por professores. Neste sentido, esta investigação se inspira nos trabalhos desenvolvidos por Hoyles (1997) e também pelo Projeto de Pesquisa AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), com professores de Ensino Básico. Era objetivo desse projeto a exploração de situações didáticas que possibilitassem construir a habilidade de argumentação e prova matemática dos alunos. Alguns dos numerosos trabalhos desenvolvidos no âmbito do Projeto AprovaME são: Pietropaolo (2005), Grinkraut (2009), Gouvêa (1998), Almeida (2007) e Ferreira (2008).

Foram aplicadas questões/problemas acompanhados das argumentações e provas de alunos, onde o professor participante deveria emitir uma avaliação a respeito das respostas discentes dadas. Esta metodologia de trabalho – construção do formulário com respostas dadas por alunos – foi inspirada na pesquisa realizada por Hoyles (1997). Em seu estudo, a pesquisadora britânica procurou investigar na formação escolar dos alunos do Reino Unido a presença dos elementos constantes do Currículo, especificamente em relação ao ensino-aprendizagem de prova matemática.

Além das questões sobre argumentação e prova, este formulário foi preparado de modo a apurar a formação acadêmica do docente e suas concepções sobre currículo e o trabalho pedagógico pautado também no desenvolvimento da habilidade de argumentação e prova. Neste trabalho relatamos como se deu a avaliação dos professores sobre as respostas dos alunos.

A coleta de dados consistiu na aplicação de um formulário a 59 professores, sendo 33 do Rio de Janeiro – alunos da Especialização em Educação Matemática e dos Mestrados Acadêmico e Profissional (PROFMAT), todos em realização na UFRJ – e 26 professores que participaram de oficina ministrada no âmbito do 3º SIPEMAT – 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – realizado em Fortaleza-CE, entre os dias 26 e 29 de junho de 2012.

4. Descrição dos formulários

Nosso formulário se estrutura em quatro páginas. Na primeira, o docente se identifica, relata sua experiência docente nas redes pública e privada, além de cursos de qualificação profissional, e responde, de forma livre, a pergunta: “Como você definiria uma ‘prova matemática’?” Ainda na primeira página do formulário de coleta de dados há uma tabela, que deve ser preenchida segundo uma escala. Nela, pedimos que o professor registre suas impressões sobre a sua própria formação, em termos de prova matemática, e sobre sua prática docente ligada ao ensino-aprendizagem deste assunto.

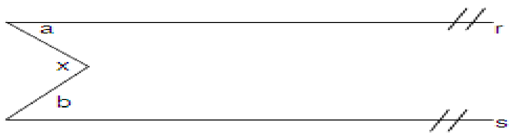
Para a segunda parte do formulário, foram coletadas respostas de alunos de 8º e 9º anos a problemas que exigiam raciocínio dedutivo e justificativas. As três últimas páginas do formulário trazem cinco dessas resoluções a cada um dos dois exercícios propostos. Estas respostas são tratadas em Aguilar Junior e Nasser (2012).

A seguir, apresentamos estas questões:

1) "**Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta:** "**A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3**".

Figura 1: questão do formulário dos professores, com respostas de alunos

2) "Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:



Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a e b, justificando sua resposta**."

Figura 2: questão do formulário dos professores, com respostas de alunos

Junto a estas perguntas, apresentamos as respostas dadas por cinco alunos do Ensino Básico a cada umas delas. O objetivo consistiu em o professor analisar as respostas dos alunos às duas questões postas e responder aos seguintes questionamentos:

a) Atribua uma nota (de zero a dez) a **cada uma das respostas** acima. Justifique suas notas A qual destas respostas você daria a maior nota? Por quê?

b) Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?

Nas seções seguintes, iremos apresentar a análise das avaliações das questões 1 e 2, tabulando as notas dadas, as justificativas a cada nota e a escolha da resposta discente (item b do questionário).

.5. Análise das respostas dadas ao problema 1

O problema número 1, como já citado acima, pedia que o aluno mostrasse se era verdadeiro ou falso o fato de a soma de três números consecutivos resultar num múltiplo de três. Foram apresentadas cinco respostas de alunos obtidas na primeira fase de desenvolvimento desta pesquisa. A seguir mostramos as respostas dos alunos que constaram do formulário:

Renata (14 anos): "Verdadeira, pois podemos representar 3 números consecutivos por x, 2x e 3x. Somando esses números, obtemos:
x + 2x + 3x = 6x, que é múltiplo de 3."

Talita (16 anos): "Verdadeira. Podemos representar três números consecutivos por: x, x+1 e x+2, com x € IN. Somando esses números, obtemos:
x + x+1 + x+2 = 3x+3 = 3(x+1), que é múltiplo de 3."

Marcos (17 anos): "Falsa, pois a soma de três números consecutivos pode ser ímpar, e nem todos os números ímpares são múltiplos de 3."

Estevan (14 anos): "Verdadeira, pois não importa o número que escolhermos, se o somarmos com nºs consecutivos o resultado é sempre múltiplo de 3
1 + 2 + 3 = 6 5 + 6 + 7 = 18
2 + 3 + 4 = 9 6 + 7 + 8 = 21
3 + 4 + 5 = 12 . . .
4 + 5 + 6 = 15 235 + 236 + 237 = 708"

Marcela (14 anos): "Verdadeira,
pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três
Ex.: 1, 2, 3

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} = \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{2} = 3 . 2$

+1 -1

Figura 3: respostas dos alunos ao problema 1

No mapeamento das respostas que os professores deram ao item b) do questionário, verificamos que todos os professores escolheram a resposta da aluna Talita, mas houve indicações para outras respostas: 13 professores afirmaram que também responderiam como Estevan e 10, como Marcela.

Verifica-se, também, que nenhum dos professores indicou a resposta da Renata ou do Marcos. Mas destacamos que a não escolha das respostas da Renata ou do Marcos não significa que todos atribuíram nota zero para estas respostas. Veremos mais à frente que alguns professores avaliaram as respostas levando em consideração a iniciativa de representação algébrica, por parte da resposta da Renata, e do argumento de Marcos, que está correto, se avaliado isoladamente do contexto de sua resposta ao problema 1, uma vez que a soma de três números consecutivos resultarem um número ímpar (Marcos afirmou que a afirmação era falsa, o que não está correto).

Do total dos professores que optaram por escolher a resposta da Tatila, destacam-se 17 participantes que escolheram mais de uma resposta discente: seis responderam que escolheriam as respostas de Talita, Estevan e Marcela; sete escolheriam as de Talita e Estevan; e quatro, as de Talita e Marcela. Sobre estas respostas, iremos fazer alguns comentários e discussões.

A escolha da Talita foi defendida por boa parte dos professores por que era a resposta mais técnica, próxima do "rigor matemático" defendido e praticado na Academia.

Passemos, a seguir, para a análise das notas relativas ao item (a) do problema 1. Comentaremos as notas e respostas apresentadas pelos professores. A tabela que segue mostra o comportamento das notas em termos de média, desvio padrão e moda.

Tabela 1: Média, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 1).

	RENATA	TALITA	ESTEVAN	MARCELA	MARCOS
MÉDIA	3,8	9,8	6,6	8,3	1,1
MODA	5,0	10,0	5,0	10,0	0,0
VARIÂNCIA	6,7	0,2	6,4	4,3	2,6
DESVIO PADRÃO	2,6	0,4	2,5	2,1	1,6

As respostas dadas pelos alunos Renata e Marcos estavam incorretas (figura 3). Mesmo assim, devido às variadas concepções que os professores trazem consigo a respeito de avaliação e de prova matemática, percebemos grande variação nas notas atribuídas a estes dois alunos. Verificamos na tabela acima, através da medida de variância, o afastamento que a média apresentou em relação às notas atribuídas aos alunos Renata e Marcos. Especialmente sobre a aluna Renata, a variância de suas notas é 6,7, o que indica uma grande variedade de notas dadas à sua resposta.

Pela tabela acima, apesar de a moda das notas atribuídas ao aluno Marcos ser zero, a média das 59 notas aferidas é 1,1, com desvio de 1,6, o 2º menor verificado nesta série de dados. Esta variedade de notas nos indica os vários olhares docentes sobre a prova: alguns, mais exigentes, imbuídos do rigor matemático requerido pela Academia, indicaram nota zero, para os dois alunos; por outro lado, houve professores que atribuíram nota 10,0 à resposta de Renata.

6. Análise das respostas dadas ao problema 2

O problema 2 era uma questão de Geometria, referente ao Teorema das Paralelas. No problema, o aluno deveria concluir que a medida do ângulo x era igual à soma das medidas dos ângulos a e b, apresentando argumentos que validassem este resultado. A estrutura dos itens (a e b) no problema 2 foi idêntica àquela apresentada no problema 1.

Antes de passarmos à análise das respostas dos participantes a este item, apresentamos as respostas selecionadas para avaliação dos professores participantes.

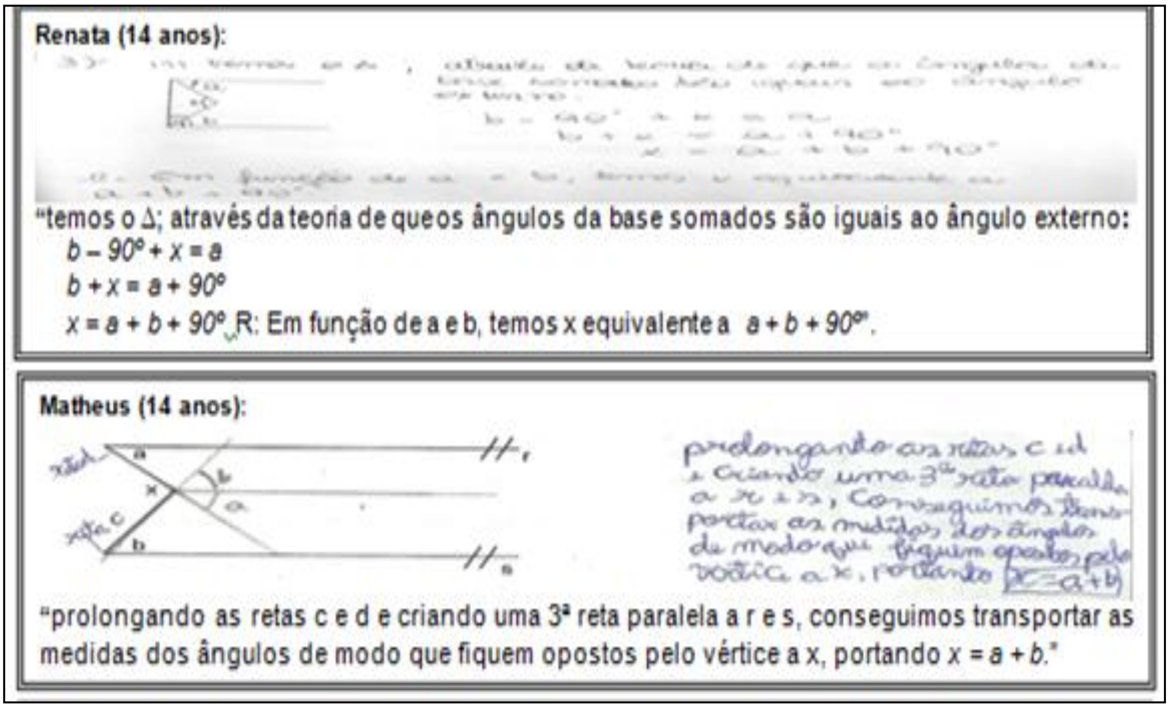


Figura 4.1: respostas dos alunos ao problema 2.

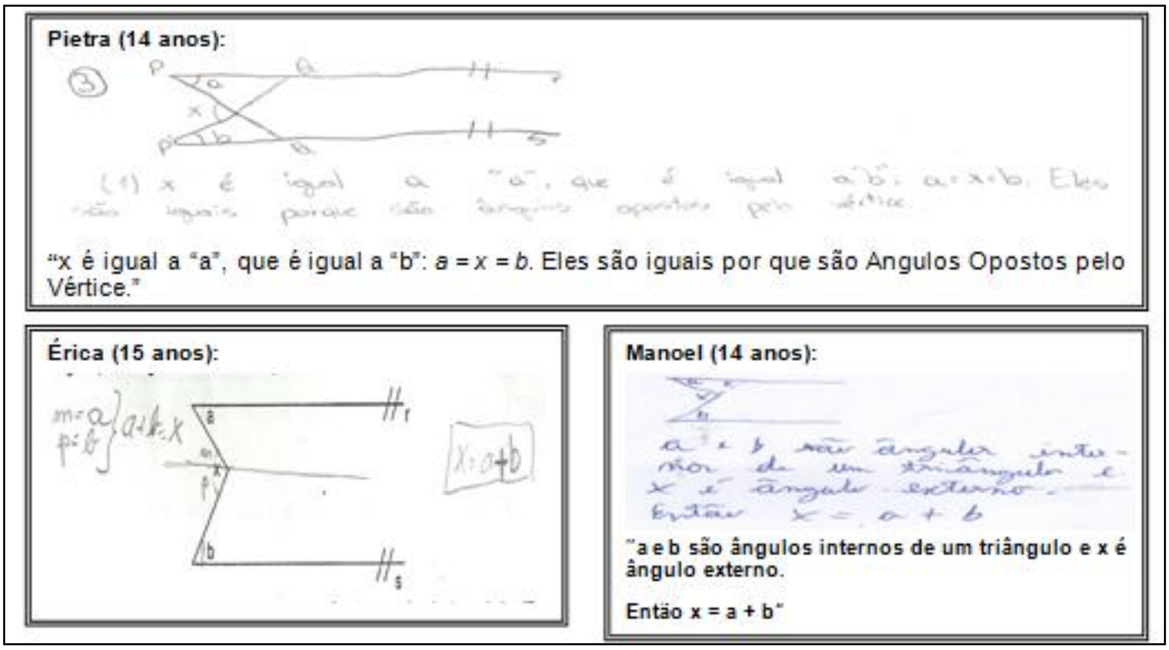


Figura 4.2: respostas dos alunos ao problema 2.

Verifica-se que nesta questão houve uma maior distribuição das escolhas do que no item (b) da questão 1. Ocorreu a predominância pela resposta de Matheus, tecnicamente válida e bem elaborada, com 36 dos 59 professores optando por esta resposta. Também houve outras escolhas: 3 para a da aluna Renata, 20 para aluna Erika e 17 para o aluno Manoel.

Como fizemos no item a) do problema 1, novamente solicitamos que os participantes verbalizassem suas opiniões a respeito das respostas apresentadas pelos alunos. Mais uma vez os professores tiveram que dar uma nota, de zero a dez, a cada afirmação discente e justificar a nota atribuída. A seguir, montamos uma tabela com as médias, modas, desvios-padrões e variâncias das notas atribuídas para cada resposta.

Tabela 2: Média, variância, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 2)

	RENATA	MATHEUS	PIETRA	ÉRICA	MANOEL
MÉDIA	2,0	9,8	1,3	8,3	8,1
MODA	0,0	10,0	0,0	10,0	10,0
VARIÂNCIA	5,6	0,5	4,9	5,4	9,3

DESVIO PADRÃO	2,4	0,7	2,2	2,3	3,0

A tabela 2 nos mostra como se comportaram as notas que os participantes atribuíram às respostas dos alunos. Como já discutido anteriormente, as respostas que estão mais próximas de uma prova matemática são as respostas de Matheus, Érica e Manoel. Dessa forma, esperávamos que as notas atribuídas a estes três alunos fossem altas, próximo a dez. Apesar de a moda das notas destes três discentes ser 10,0, podemos perceber que não houve uma unanimidade na escolha desta nota: o desvio padrão das notas de Érica e Manoel foram de 2,3 e 3,0, respectivamente, indicando que houve uma considerável variação das notas atribuídas a estes estudantes.

Na coleta dos dados que possibilitou a montagem desta tabela, podemos perceber a influência que a formação acadêmica exerce sobre as concepções dos professores: mais uma vez a variabilidade das notas reflete, de certa maneira, a diversidade de posturas que os professores assumem durante sua formação e sua atuação profissionais, o que gera as variadas opiniões sobre uma mesma questão educacional (no nosso caso, a prova matemática e sua avaliação).

7. Conclusões

Nos levantamentos realizados, ficou evidente, tanto na análise das respostas obtidas no problema 1 quanto no problema 2, que os professores possuem grande inclinação para as argumentações que se aproximaram da prova formal, como foi o caso das respostas dos alunos Talita (problema 1) e Matheus (problema 2). Apesar de outros alunos também terem empreendido argumentos convincentes e fortes, como foi o caso da aluna Marcela no problema 1 e do aluno Manoel no problema 2, a preferência pelos argumentos mais técnicos parece estar relacionada à influência da formação acadêmica (KNUTH, 2002, JONES, 1997, HANNA, 1990, 1995) pelo rigor na construção e encadeamento lógico dos argumentos.

A influência da Academia se reflete nas concepções dos professores, que indicam a preferência por argumentos e provas discentes que se aproximem do modelo axiomático-dedutivo ou formal. É importante que o professor saiba identificar uma prova matemática no seu sentido acadêmico, mas também é igualmente importante que o professor valorize as iniciativas de argumentação informal, como foi o caso das respostas de Marcela e Estevan (problema 1) e Manoel e Érika (problema 2).

Apesar de não termos um currículo nacional e estruturado, tendo em vista o que dispõe a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que contempla a influência das culturas regionais e das políticas locais para a elaboração dos seus currículos, temos como documento oficial os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), que não são impositivos, mas norteadores na construção de nossos sistemas curriculares. Neste documento, que deve ser criticado e aprimorado por nós, pesquisadores e educadores matemáticos, existem orientações que, no nosso entendimento, podem contribuir para o desenvolvimento das múltiplas competências matemáticas, inclusive a de argumentar e provar. Numa perspectiva mais transdisciplinar, o desenvolvimento das competências matemáticas, principalmente a habilidade de argumentar e provar, é importante e fundamental para a formação do cidadão crítico, capaz de enxergar a realidade ao seu redor e interpretá-la criticamente, além de proporcionar o desenvolvimento das outras ciências, como a Física, Química e Engenharias.

Finalizamos destacando a importância deste estudo não só para o campo de pesquisa da Educação Matemática, mas também por permitir a divulgação dos aspectos da prova matemática depreendidos tanto na análise dos dados em si, como nas leituras realizadas.

Embora os 59 professores participantes desta intervenção tivessem demonstrado interesse pelo tema, seja pela simples cooperação em preencher os formulários, seja pela participação da oficina oferecida no III SIPEMAT, frisamos, mais uma vez, a importância de se dar atenção a este tema do ensino, que por vezes é negligenciado pelas instituições formadoras, como também por nós, professores.

8. Referências Bibliográficas

AGUILAR JÚNIOR, C. A. e NASSER, L. (2012): *Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental*. Revista Vydia, vol 32, n. 2, p.133-147. Santa Maria (RS), Brasil.

ALMEIDA, J. C. P. (2007): *Argumentação e prova na matemática escolar do Ensino Básico: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo*. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

BALACHEFF, N. (1988): *Aspects of proof in pupils' pratice of school mathematics*. In: PIMM, D. (ed.), Mathematics, teachers and children, pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra.

BOAVIDA, A. M. R. (2005) *A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor*. In: AMRB: XVI SIEM, Lisboa, Portugal.

BRASIL (1997): *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 88f. Secretaria de Ensino Fundamental – SEF/MEC – Brasília, Brasil.

CSIKOS, C.A. (1999): *Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder proof-categorization*. Proceedings of PME-23, v. 2, p. 233-240, Haifa, Israel.

FURINGHETTI, F. e PAOLA, D. (1997): *Shadows on Proof*. PME, v. 21, pp. 273-280, Lahit, Finlândia.

FERREIRA, L. D. (2008): *Provas Algébricas: uma investigação sobre as justificativas de estudantes da educação básica*. 133f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

FERREIRA JUNIOR, J. L. (2007): *Um Estudo sobre Argumentação e Prova envolvendo o Teorema de Pitágoras*. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

GOUVÊA, F. A. T. (1998): *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental*. 264f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

GRINKRAUT, M. L. (2009) *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional*. 349 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

HANNA, G. (1990): *Some Pedagogical Aspects of Proof*. Interchange (The Ontario Institute for Studies in Education), vol 21, nº 1, pp 6-13, Ontario, Canadá.

______________. (1995): *Challenges to the Importance of Proof*. For The Learning Mathematics (FLM Publishing Association), nº 15, vol. 3, pp. 42-49, British Columbia, Canadá.

SOWDER, L. e HAREL, G. (1998): *Types of Student's Justifications*. The Mathematics Teacher vol. 91, n. 8, pp. 670-675, NCTM, Estados Unidos.

HEALY, L., JAHN, A. P., PITTA COELHO, S. (2007) *Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa.* 24f, In: Anais da 30ª Reunião Anual da ANPEd: 30 anos de pesquisa e compromisso social, Caxambu, Brasil.

HOYLES, C. (1997): *The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof.* For the Learning of Mathematics 17, 1, pp. 7 – 15, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

KNUTH, E. J. (2002) *Teacher's conceptions of Proof in the context of secondary school mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61-88, Holanda.

MIYAKAWA, T. (2002): *Relation between Proof and Conception: the case of proof for the sumo f two even numbers.* PME, v. 26, pp. 353-360, Lahit, Finlândia

PIETROPAOLO, R. C. (2005): *"(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*". 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil.