FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS A PARTIR DE QUESTÕES EXAMES NACIONAIS

Vilmar Gomes da Fonseca
IFRJ
vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Angela Rocha dos Santos
UFRJ
angela@im.ufrj.br

Wallace Vallory Nunes
IFRJ
wallace.nunes@ifrj.edu.br

André Luiz Souza Silva
IFRJ
andrelssilva@globo.com

Resumo:
Este trabalho estuda alguns dos obstáculos epistemológicos relativos ao conceito de função Afim, presentes em questões extraídas de exames nacionais. Esta pesquisa objetiva analisar se, ao se trabalhar de forma diferente com duas turmas distintas, é possível contribuirmos para minimizar ou maximizar o volume de obstáculos epistemológicos presentes em respostas de alunos a questões extraídas de exames nacionais sobre conceito de função Afim. Como metodologia optou-se pelo estudo de caso qualitativo. Os resultados obtidos apresentaram uma relevante diferenciação entre as turmas pesquisadas. Pôde-se perceber que a turma que utilizou o laboratório de informática na construção do conceito de função desenvolveu menos obstáculos epistemológicos do que a turma que construiu este conceito de forma expositiva.
Palavras-chave: Função Afim, Obstáculos Epistemológicos, Exames Nacionais.

1. Introdução

Em diversas pesquisas, como em Palis (2006, 2007, 2008), Paixão (2010) entre outros, nota-se que o ensino de conteúdos matemáticos por meio do uso de softwares educacionais, quando bem planejado e executado, proporciona resultados muito satisfatórios.

A partir de análises preliminares desta pesquisa, verificou-se que os alunos, em geral, tinham muitas dificuldades em estabelecer uma relação de dependência entre as variáveis do problema, e também de generalização dos resultados. Para muitos deles, trabalhar com funções era apenas realizar operações algébricas, substituindo o valor de uma incógnita, na lei da função e encontrando o valor da outra, por meio da resolução de uma equação.

Em muitos casos, a construção da expressão (lei) matemática referente a um fenômeno abordado gera um grande problema. Muitos alunos não conseguem compreender as relações das dependências entre as variáveis de uma função, e nem quais os fenômenos que ocorrem com regularidade podem ser generalizados e representados por meio de uma expressão algébrica. Essa expressão algébrica seria a lei matemática correspondente à função que modela a situação problema.

Apoiado nos estudos de Tinoco (1998) percebe-se que a relação de dependência entre grandezas variáveis deve ser salientada sempre que possível. No entanto, é bom lembrar que, numa relação funcional, uma das grandezas (a variável dependente) é perfeita e univocamente determinada pela variação da outra (variável independente). Esta característica das funções deve surgir lentamente ao longo do processo, para que durante este processo de construção, a imagem de conceito dos alunos seja enriquecida. É preciso também que os alunos desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, que justifiquem a validade da lei matemática, registrando-os. Porém, durante esse processo podem surgir obstáculos epistemológicos que impedem a construção sadia desse conceito. Assim, este trabalho objetiva perceber se no trabalho com duas turmas diferentes, após aplicação de uma sequência de atividades expositivas ou em laboratório de informática, ainda encontram-se obstáculos epistemológicos da construção do conceito de Função Afim. Além disso, procurou-se verificar se existe alguma relação discrepante ou não entre as duas turmas.

2. Obstáculos Epistemológicos.

Inicialmente faz-se necessário discutirmos algumas noções de obstáculo. Segundo Brousseau (1986), o obstáculo é caracterizado por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento pode ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento.

Neste trabalho serão analisados os obstáculos presentes em respostas de alunos às questões extraídas de exames nacionais sobre conceito de função Afim. Para tanto, foram observados como base os trabalhos de Sierpinska (1992). Em seu artigo, a autora, apresenta um estudo dos obstáculos epistemológicos da evolução histórica do conceito de função e discute a compreensão do conceito de função dos estudantes e as suas dificuldades.

Sierpinska (1992) infere que uma das implicações pedagógicas dos obstáculos epistemológicos, no ensino de funções, é que o conceito de função não aparece para os alunos como uma das possíveis ferramentas, para resolver problemas do cotidiano e, assim, esse conceito não tem sentido para eles fora da sala de aula. Para a autora é preciso dar oportunidades aos alunos de usarem o conhecimento sobre funções na explicação de fenômenos de seu dia-a-dia ou de outras ciências a partir de modelos de relacionamentos de variáveis que observam.

Sierpinska sugere que o estudo das funções deve ser introduzido como modelos de relações com situações da vida real e como instrumentos para representar um sistema em outro sistema. As funções podem ser modelos de situações da vida real, explicações de fenômenos físicos, etc. Para Sierpinska (1992, p. 32) é dessa forma como, historicamente, o conceito de função foi se desenvolvendo, vindo a ser “como instrumentos de descrição e previsão”.

Segundo Biaggi (2000),

> Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro. Tão pouco podemos esperar que nossos alunos criem afeto por uma matéria que nem ao menos sabe utilizar. (p.103)

Assim, dentre os conhecimentos fundamentais da matemática, encontra-se na álgebra, mais especificamente no conteúdo de função Afim, um maior comprometimento em tentar compreender como as formas de linguagens e códigos, que são utilizadas para expressar esse conhecimento matemático, são entendidas e mobilizadas por alunos na 1ª série do Ensino Médio em sua estrutura cognitiva e, de que maneira a apreensão desse conteúdo tem proporcionado aos alunos um instrumento eficaz no seu processo de aprendizagem.

Torna-se evidente, portanto, que um dos objetivos deste trabalho é contribuir para que a abordagem dos conteúdos de funções se torne mais dinâmica, possibilitando aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. De fato, a aquisição de um bom conhecimento de funções é uma condição necessária não só para se seguir várias carreiras, como Economia, Física, Química, Matemática, mas também para a formação cidadã.

Por meio dessas ideias foi estruturada uma sequência de atividades que levassem os alunos a refletirem sobre o conceito da Função Afim que, por restrição do número páginas, não serão apresentadas neste trabalho. Em seguida, foi aplicado um Teste demonstrando sua utilidade na resolução de problemas do nosso cotidiano, de modo a superar os obstáculos relacionados às suas múltiplas representações e contribuindo para o enriquecimento da imagem desse conceito.

3. Metodologia.

Esta pesquisa é qualitativa e caracteriza-se como um estudo de caso da aplicação de um teste, com questões retiradas de exames nacionais, em duas turmas da 1ª. Série do ensino Médio de um colégio estadual da Baixada Fluminense.

O referido Teste foi aplicado em duas turmas do 1ª. Série, pois os alunos ainda não estavam preocupados com o exame vestibular e cujo currículo escolar sugere o seu estudo nesse momento. A faixa etária das duas turmas compreendeu aqueles 14 e 16 anos.

É importante ressaltar que os testes foram aplicados em duas turmas distintas e com a sequência de atividades propostas assumindo metodologias diferenciadas. Ou seja, turma A participou da realização das atividades no laboratório de informática do colégio. Já a turma B não realizou nenhuma atividade integrada a alguma ferramenta computacional.

Em cada turma os alunos receberam uma folha com o enunciado das questões e uma folha em branco para realizarem os cálculos. Não seria permitida nenhuma consulta ou uso de calculadoras ou qualquer aparelho eletrônico. Apesar da maioria das questões apresentarem múltiplas escolhas, foi solicitado aos alunos que registrassem os cálculos ou justificativas, pois caso contrário a questão, mesmo assinalada corretamente, não seria validada.

Usou-se esse tipo de estratégia com o objetivo de que os alunos resolvessem com seriedade o Teste, dificultando a escolha aleatória nas opções de resposta das questões de múltipla escolha. Foi ressaltado aos alunos que esse tipo de procedimento era necessário a fim verificar o aprendizado deles em relação ao conteúdo abordado em sala de aula.

A seguir descreveremos algumas situações didáticas que ocorreram na aplicação do referido Teste.

4. Caracterização do Teste.

O Teste foi composto de quatro questões, sendo duas de múltiplas escolhas e duas discursivas com dois itens a serem respondidos, cada uma. No Quadro 1, a seguir, apresentamos as questões do Teste que foi aplicado nas turmas A e B.

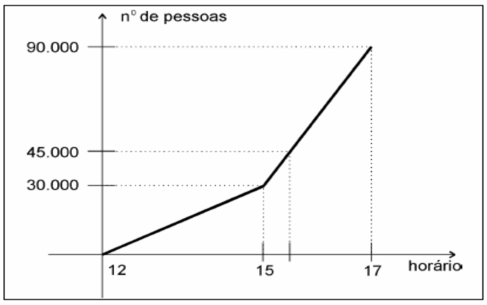
1 – **(UFRN)** A academia "Fique em Forma" cobra uma taxa de inscrição de R$ 80,00 e uma mensalidade de R$ 50,00. A academia "Corpo e Saúde" cobra uma taxa de inscrição de R$ 60,00 e uma mensalidade de R$ 55,00.

a) Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aulas, em cada academia.

b) Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende "malhar" durante um ano? Justifique, explicitando seu raciocínio.

2 – (UERJ) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos as 12 horas e ate as 15 horas entrou um numero constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.

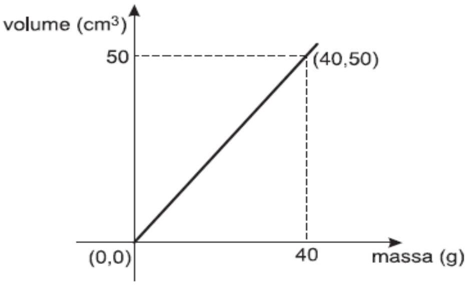
Os pontos que definem o numero de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o numero de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

(A) 20 min (B) 30 min (C) 40 min (D) 50 min

3 – (VUNESP-SP) Apresentamos abaixo o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0º C.

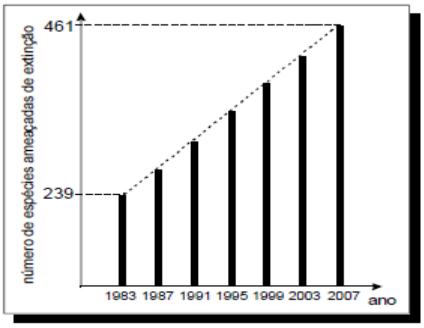


Baseado nos dados do gráfico determine:

a) A lei da função apresentada no gráfico;

b) Qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool?

4 – (ENEM) O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

a) 465 b) 493 c) 498 d) 538 e) 699

Quadro 1 – Apresentação do Teste aplicado nas turmas A e B

Neste estudo, deseja-se perceber se os alunos compreenderam o conceito da função Afim e sabem aplicar esse conceito na resolução de situações problemas, justificando suas respostas.

5. Análise do Teste

A primeira questão é composta de dois itens. No item **a)** espera-se que os alunos sejam capazes de identificar qual é a parte fixa e qual é a parte variável dos gastos acumulados em relação aos meses de aula em cada academia, exibindo a lei matemática que representa a função gastos em cada uma delas. No item **b)**, a partir de uma análise crítica dos alunos, espera-se que eles consigam descobrir qual das academias oferece o menor custo para quem quiser malhar durante um ano. Este tipo de raciocínio precisa ser bastante trabalhado com os alunos, a fim de que eles possam decidir sobre as vantagens ou desvantagens da compra de um produto, avaliar o custo de um produto em função da quantidade, calcular impostos e contribuições previdenciárias, avaliar modalidades de juros bancários, etc.

A partir da produção dos alunos verificou-se pouca dificuldade na realização dessa questão. A maioria dos alunos resolveu de forma satisfatória os dois itens dessa questão. Aqueles que erraram, em sua maioria, apresentaram soluções que continham inversões da parte fixa com parte variável no item a. Por exemplo, para a academia “Fique em Forma” ao invés de apresentarem a solução $y = 50x + 80$, ou equivalente, apresentavam como solução $y = 80x + 50$ ou equivalente, para o item a). Consequentemente o item b) seria respondido de maneira errada.

Observe na Figura 1 a resposta da aluna L, da turma A, para essa questão.

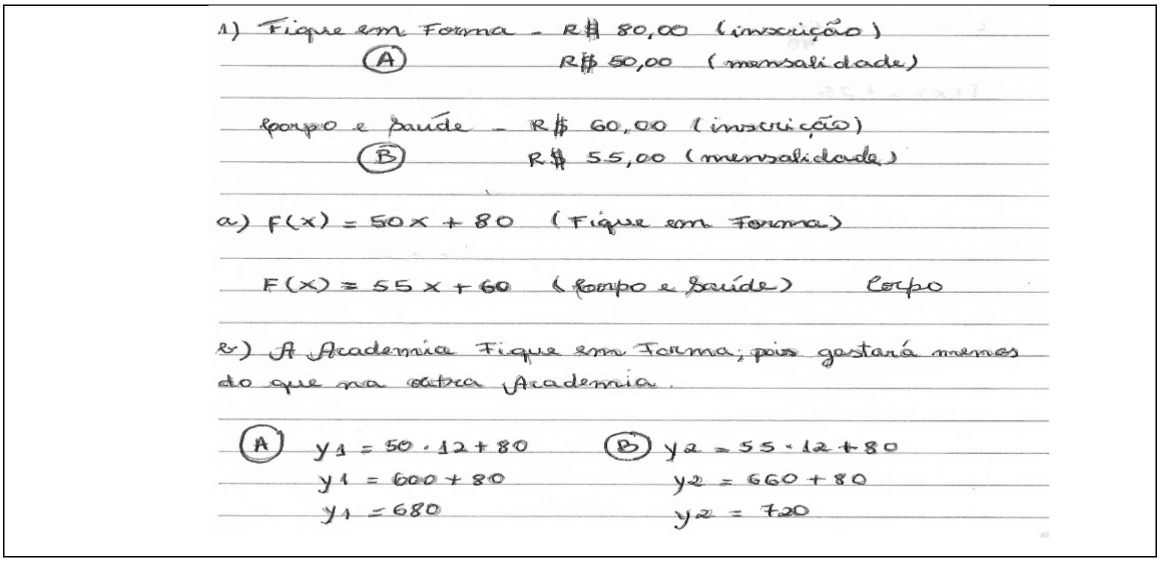

1) Fique em Forma - R$ 80,00 (inscrição)
(A) R$ 50,00 (mensalidade)
Corpo e Saúde - R$ 60,00 (inscrição)
(B) R$ 55,00 (mensalidade)
a) F(x) = 50x + 80 (Fique em Forma)
F(x) = 55x + 60 (Corpo e Saúde) Corpo
b) A Academia Fique em Forma; pois gastará menos do que na outra Academia.
(A) $y_1 = 50 \cdot 12 + 80$ (B) $y_2 = 55 \cdot 12 + 80$
$y_1 = 600 + 80$ $y_2 = 660 + 80$
$y_1 = 680$ $y_2 = 720$

Figura 1- Resposta da aluna L, turma A, para a Questão 1

Verifica-se que a aluna fez, de forma correta, a distinção entre parte fixa, que neste caso é a inscrição, e a parte variável, que neste caso é a mensalidade.

Observe na Figura 2 a resposta da aluna B da turma B, para essa questão.

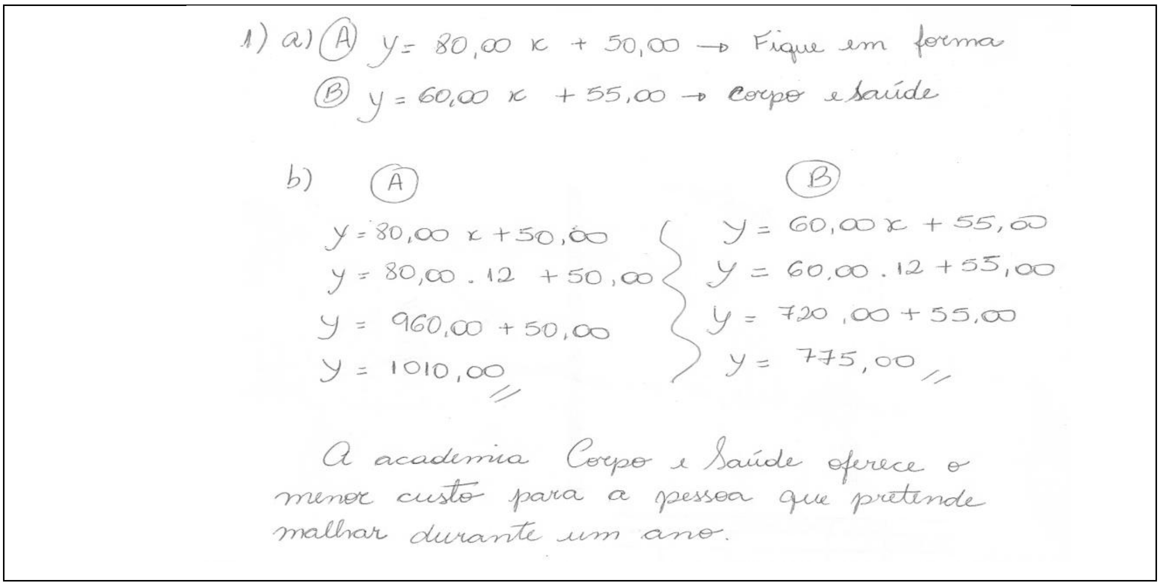


Figura 2- Resposta da aluna B, turma B para a Questão 1

Observa-se que para essa aluna não ficou claro qual era a parte fixa e a parte variável do problema. Em geral, o aluno que não consegue fazer essa diferenciação é porque ainda existe um obstáculo que não conseguiu superar. De acordo com Sierpinska (1992):

> Muito frequentemente, ao observar variações, os estudantes têm dificuldades de identificar o que estar variando ou o que são os objetos sendo modificados que eles processam. Eles não analisam a situação, mas a tornam como um todo, como um fenômeno como a chuva ou a neve.(p. 9).

Na segunda questão, percebem-se dois tipos de estratégias muito comuns presentes nas respostas dos alunos. Um grande número deles que acertou essa questão resolveu-a usando regra de três. Outra parte usou o modelo algébrico da Função Afim, dado por $f(x) = ax + b$, achando os coeficientes a e b, resolvendo corretamente a questão. Verificou-se também, na turma B, um alto índice de alunos, cerca de 48%, que não resolveram a questão, deixando-a em branco.

A resolução do aluno V da turma A é muito interessante e está destacada na Figura 3.

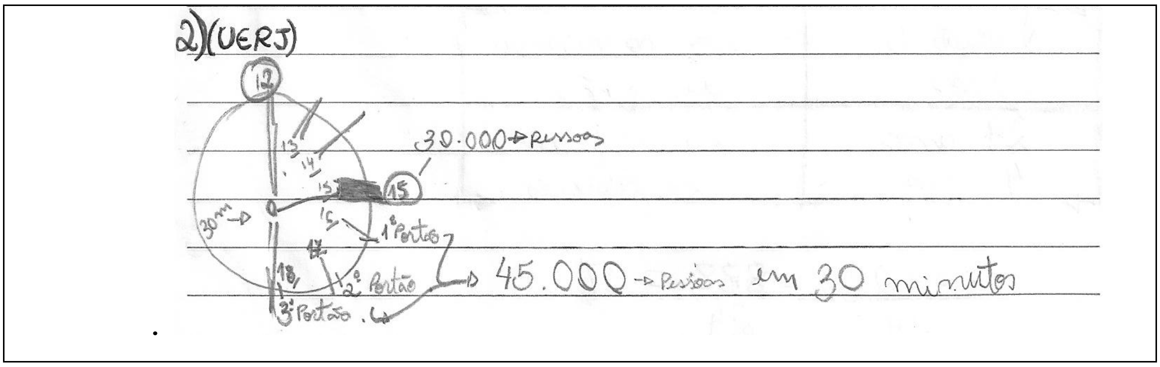


Figura 3 - Resolução do aluno V, turma A, para a Questão 2

É fácil observar que esse aluno atingiu o objetivo para essa questão. Ao invés de reproduzir um modelo de resolução, semelhante ao usado em questões anteriores ele realizou uma conversão da propriedade fundamental das Funções Afins, para uma representação por meio de um “relógio”, conseguindo assim êxito na sua resposta.

De acordo com Duval (2003) realizar uma conversão, não é só mudar o modo de tratamento é, também, explicar as variáveis pertinentes aos registros mobilizados numa dada conversão.

Esse aluno fez uma associação entre o tempo e o número de torcedores representando o gráfico da função por meio de um relógio, fazendo as devidas adaptações.

Observe na Figura 4 outra forma de resolução apresentada pela aluna C da turma B.

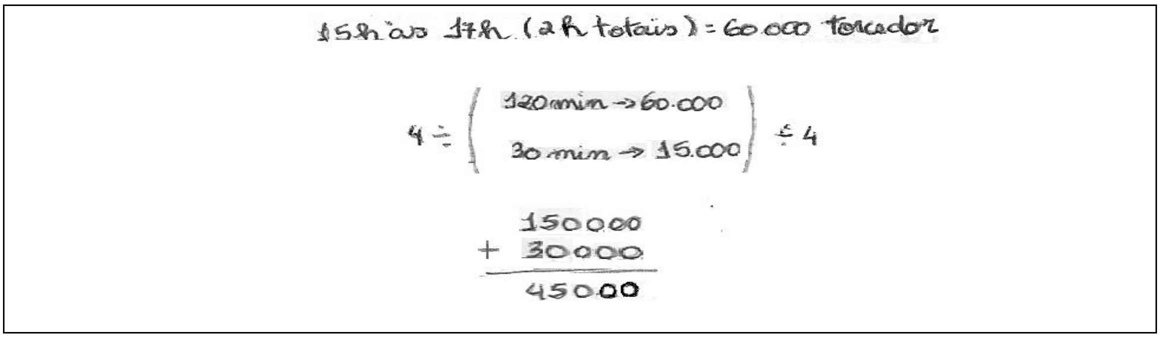


Figura 4 - Resolução da aluna C, turma B para a Questão 2.

Na resolução dessa aluna, percebe-se a imagem de conceito que ela desenvolveu sobre proporcionalidade. A partir desse método de resolução, ela achou a taxa de crescimento do número de torcedores a cada 30 minutos, obtendo o tempo necessário para atingir o número dos torcedores pedido na questão, que era de 45.000 torcedores.

A Questão 3 é composta de dois itens. No item **a)** espera-se que os alunos sejam capazes de identificar um problema de proporcionalidade, exibindo a lei de uma Função Linear. No item **b)**, espera-se que eles, a partir de uma exploração qualitativa das relações entre as duas grandezas envolvidas no problema, cheguem a resposta correta da questão.

Após a análise das produções dos alunos percebe-se que, em sua maioria, conseguiram atingir o objetivo. A estratégia utilizada por eles, na resolução dessa questão foi a regra de três. Não é por acaso que eles usaram esse tipo de procedimento, pois se tratava de um problema de proporcionalidade.

Observe um exemplo de resposta da aluna T, turma A, para essa questão, na Figura 5.

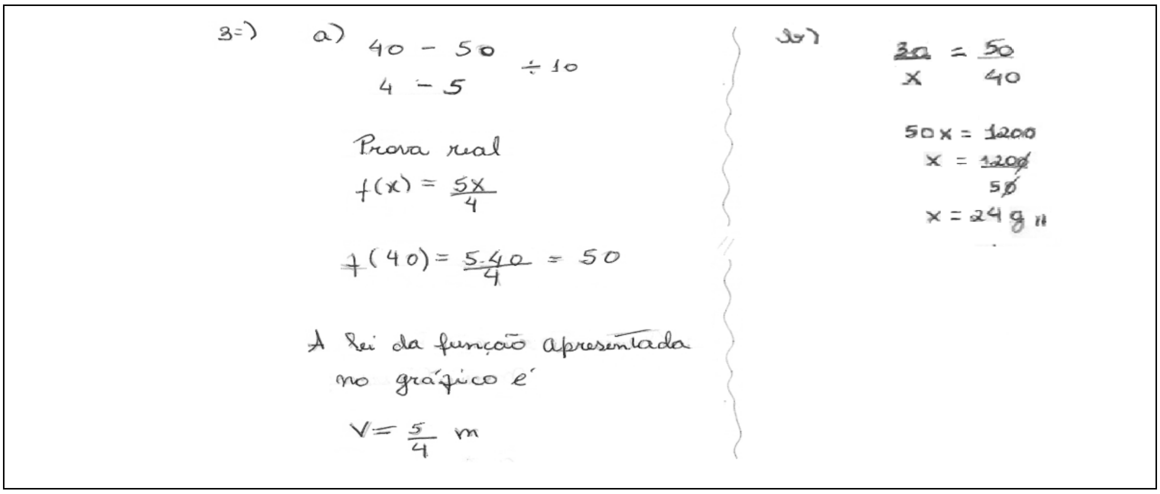


Figura 5 - Resposta da aluna T, turma A, para a Questão 3.

É possível notar que após chegar ao resultado da lei de uma função Linear, através de propriedades das proporções, a aluna "tirou a prova real", verificando assim se aquilo que tinha achado era válido. Essa aluna está adquirindo o que chamamos de "maturidade matemática", que é a capacidade argumentar sobre a veracidade ou não da solução de uma questão, através de demonstrações ou provas reais. Isso deve ser sempre incentivado pelo professor de matemática a fim de criar um aluno critico capaz de avaliar suas próprias resoluções.

Agora, observe na Figura 6 a resolução da aluna B da turma B, para essa questão.

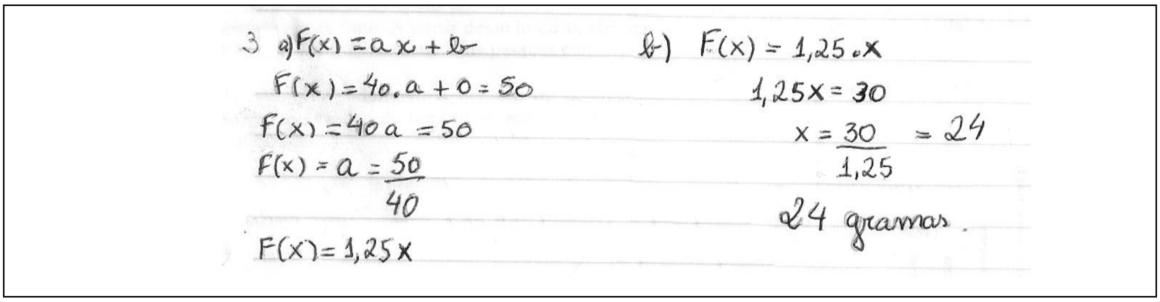


Figura 6 - Resolução da aluna B, turma B, para a Questão 3.

Percebe-se pelo registro da aluna que, apesar dela ter usado uma forma de resolução puramente centrada na expressão $f(x) = ax + b$, ela identificou que esse problema trata-se de uma função linear, pois substituiu $b = 0$, achando a lei da função representada pelo gráfico.

A Questão 4 trata-se de uma questão do ENEM. Nesta questão, os alunos deveriam analisar a variação de tempo e a variação do número de espécies ameaçadas descrita pelo gráfico. A partir daí, usando a propriedade fundamental da função Afim, ou mesmo a expressão geral da função Afim, dada por $f(x) = ax + b$, ou equivalente, devem chegar ao resultado pedido. A maioria dos alunos da turma A não teve grandes dificuldades em resolver essa questão, porém um grande número, cerca de 48% dos alunos da turma B, assim como aconteceu na questão 2, não resolveu essa questão. Percebe-se que questões contextualizadas, baseadas nas resoluções de problemas, precisam ser mais trabalhadas com a turma B, pois pelas questões analisadas até aqui, é possível observar que a imagem conceitual da maioria dos alunos ainda está deficitária.

Observe na Figura 7 a resposta do aluno V da turma A.

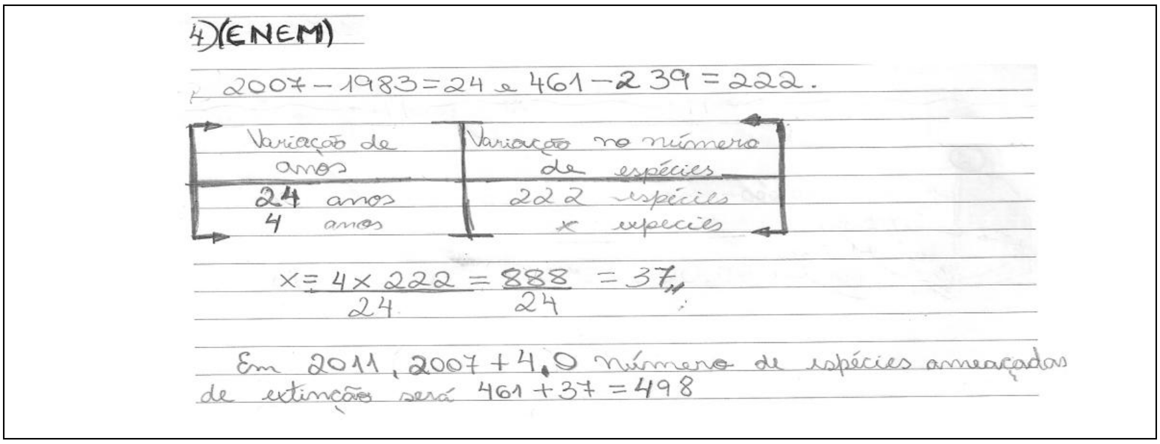


Figura 7 - Resposta do aluno V da turma A para a Questão 4

Através desta resolução é possível perceber que esse aluno atingiu o objetivo traçado para essa questão. Além de conseguir identificar a variação das grandezas descrita no gráfico, por meio de uma regra de três, determinou a taxa de crescimento do gráfico, respondendo, em seguida, de maneira correta a pergunta da questão.

A aluna J da turma B foi uma das poucas que expressaram de maneira correta sua resposta. Observe sua resolução na Figura 8.

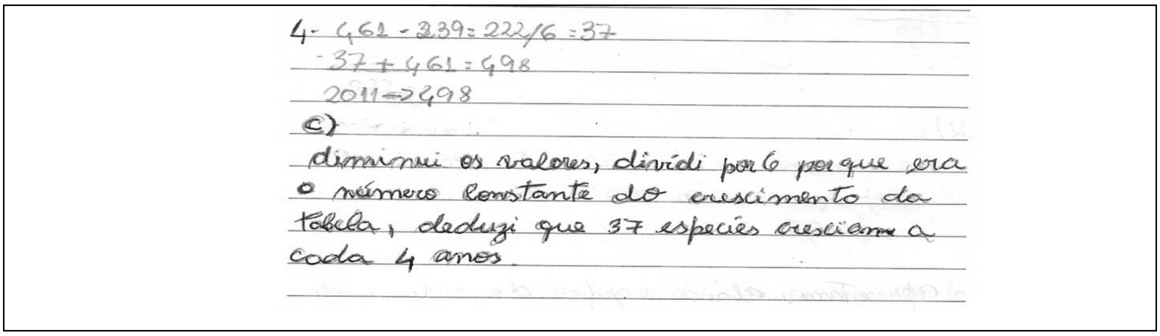

4- 461 - 239 = 222/6 = 37
-37 + 461 = 498
2011 => 498
c)
diminui os valores, dividi por 6 porque era o número constante do crescimento da tabela, deduzi que 37 espécies cresciam a cada 4 anos

Figura 8 – Resolução da aluna J da turma B para a Questão 4

Percebemos na análise da resolução da aluna J que assim como o aluno V, ela atingiu o objetivo traçado para essa questão. Foi notória a forma como a aluna, através de operações aritméticas, resolveu essa questão identificando o conceito de taxa de crescimento, presente no estudo da Função Afim.

Nas Tabelas 1 e 2 apresentamos o desempenho das turmas A e B, respectivamente, na resolução do teste proposto.

QUESTÕES	PERCENTUAL DE ACERTO
Questão 1 – item a)	**93%**
Questão 1 – item b)	**93%**
Questão 2	**75%**
Questão 3 – item a)	**81%**
Questão 3 – item b)	**87%**
Questão 4	**78%**

Tabela 1 – Percentual de acerto por questão referente a Turma A.

QUESTÕES	PERCENTUAL DE ACERTO
Questão 1 – item a)	**64%**
Questão 1 – item b)	**64%**
Questão 2	**40%**
Questão 3 – item a)	**48%**
Questão 3 – item b)	**50%**
Questão 4	**32%**

Tabela 2 – Percentual de acerto por questão referente a Turma B.

A partir da análise de ambos os quadros é possível observar que o índice de acertos dos alunos da turma A, foi muito bom. A maioria dos alunos desenvolveu uma rica imagem conceitual do conceito de proporcionalidade e Função Afim, que foi evidenciada na resolução das questões. Essa evolução pode ser caracterizada pela postura metodológica utilizada pelo professor regente da turma A durante as atividades realizadas no laboratório de informática, e que favoreceu ao enriquecimento da imagem conceitual desses alunos.

Quanto à turma B, percebe-se que muitos alunos apresentavam soluções confusas, outras incompletas e outros em branco para algumas questões. Em sua maioria, apresentavam uma fraca imagem conceitual.

6. Considerações finais

Ao finalizar este trabalho vemos que o ensino de conteúdos matemáticos com auxilio do uso de software educacionais, quando bem planejado e executado, proporciona resultados muito satisfatórios. Os resultados apresentados neste trabalho indicam que mesmo após algumas intervenções pedagógicas, alguns dos obstáculos epistemológicos ainda se mantêm presentes.

A partir das análises feitas é possível observar que a turma B apresentou um volume maior de obstáculos epistemológico, do conceito de função afim, em comparação aos da turma A.

Podemos atribuir essa diferença a forma como os alunos tiveram contato com o conteúdo e as atividades de função Afim. Enquanto que na turma B, o conteúdo e as atividades sobre função Afim foram trabalhados de forma expositiva, na turma A eles foram trabalhados com auxilio de cenas interativas, desenvolvidas a partir de um software educacional, favorecendo as análises de gráficos, a relação de dependência entre grandezas variáveis, ao uso correto da propriedade fundamental das grandezas proporcionais e da função Afim.

Embora esse trabalho tenha sido elaborado com vistas ao ensino de função Afim, considera-se imprescindível desenvolver um trabalho semelhante, com alunos de outras séries ou até mesmo com outros conteúdos, tais como, estudo das funções Quadráticas, Exponencial, Logarítmicas, das funções Trigonométricas, da Geometria Analítica, Geometria Espacial, etc.

7. Referências

BIAGGI, G. V. **Uma nova forma de ensinar matemática para futuros administradores: uma experiência que vem dando certo.** Ciências da Educação. Lorena-SP, v. 2, n.2. p.103-113, 2000.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**, RDM, vol.7, nº 2, 1986.

DUVAL, R. **Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: Machado, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: registros em representação semiótica. São Paulo: Papirus, p. 11-33, 2003.

PAIXÃO, V. **Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2008. Disponível em http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/02%20Victor%20Paixao.pdf

PALIS, G. L. R. **Introduction to Calculus: Integrating Maple in regular classes and examinations.** In: 11th International Conference on Mathematics Education (ICME 11), 2008, Monterrey. Proceedings do Topic Study Group 5: New developments and trends in mathematics education at tertiary level.

PALIS, G. L. R. **Relato de uma implementação de uma disciplina de Cálculo na Arquitetura**. Boletim GEPEM (USU), v. 52, p. 85-104, 2008.

PALIS, G. L. R. **O potencial de atividades centradas em produções de alunos no desenvolvimento profissional de professores de Matemática.** In: VIII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste. Vitória, 2007.

PALIS, G. L. R. **Uma aproximação à questão da integração curricular de matemática com arquitetura.** Anais do III SIPEM, 2006.

SIERPINSKA, A. **Theoretical perspectives for development of the function concept.** In G. Harel e E. Dubinsky, eds., *The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes and Report Series. Mathematical Association of America, 1992.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o Conceito de Função no 1º Grau.** IM – UFRJ. Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES, 1998.