ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DO CONCEITO DE FUNÇÕES: UMA RETROSPECTIVA

Vilmar Gomes da Fonseca
IFRJ
vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Angela Rocha dos Santos
UFRJ
angela@im.ufrj.br

Wallace Vallory Nunes
IFRJ
wallace.nunes@ifrj.edu.br

Resumo: Este trabalho busca recuperar as ideias presentes no conceito de função a partir do estudo epistemológico desse conceito, seu desenvolvimento ao longo da história e das noções presentes em objetos matemáticos que tiveram alguma influência na sua formação. Nosso objetivo é oferecer um material didático, com o intuito de ajudar o professor a entender o contexto epistemológico desse objeto matemático e suas contribuições para o ensino-aprendizagem da matemática. Optamos neste estudo por desenvolver um modelo teórico-prático para a compreensão do conceito de função, seguindo como meta à investigação histórica da matemática. Para tanto, foi desenvolvida uma pesquisa bibliográfica nos diversos textos referentes ao assunto. O texto foi subdivido em três grandes eras: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno onde foram ressaltadas as principais contribuições de diversos matemáticos para a construção do conceito de função. Espera-se que este estudo do conceito de função ao longo do tempo favoreça a compreensão dessas ideias.
Palavras-chave: Conceito de função; História da Matemática; Epistemologia.

1. Introdução

Atualmente as funções constituem um conceito fundamental a ser estudado na disciplina de Matemática do Ensino Médio. Essa importância é ressaltada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002).

> O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (p.121)

Do ponto de vista da maioria dos matemáticos, a noção de função pode ser apresentada de muitas maneiras diferentes, cada uma com diversas implicações educacionais, por exemplo:

- A noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.
- Funções de uma, duas ou n variáveis, $n \in N$, estudando suas propriedades, e aplicações na resolução de problemas interdisciplinares.
- Na resolução de equações em que as incógnitas são variáveis de funções;
- Nos estudos da lógica matemática onde aparecem funções na forma recursiva.

O conceito de função nos livros de matemática do Ensino Médio é apresentado sob a forma de uma sentença que relaciona grandezas. Vejamos alguns exemplos:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (IEZZI, 2004, p.81)

> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. (DANTE, 2007, p.59)

Para que este conceito chegasse a tal estado de formalismo matemático, a noção de função foi sendo construída e aperfeiçoada ao longo de vários séculos (RORATTO, NOGUEIRA e KATO, 2010). A partir dessa ideia indagamos: quais foram as construções teóricas desenvolvidas ao longo da humanidade que contribuíram para a formulação do pensamento moderno a respeito de função?

O conceito de função é considerado como um dos mais importantes na matemática. Como o ponto, a linha e o plano são os elementos básicos para construção da teoria fundamental da Geometria Euclidiana, as noções dos diferentes tipos de funções constituem o fundamento da Análise Matemática, a teoria central, no desenvolvimento da matemática desde o fim do século XVI.

Segundo o pesquisador Youschkevitch (1981), da universidade de Moscou, o desenvolvimento do conceito de função ocorreu através de três etapas da nossa história até a metade do século XIX, a saber: a Antigüidade, a Idade Média, o Período Moderno. É sob esse ponto de vista que este trabalho está estruturado.

2. Antiguidade

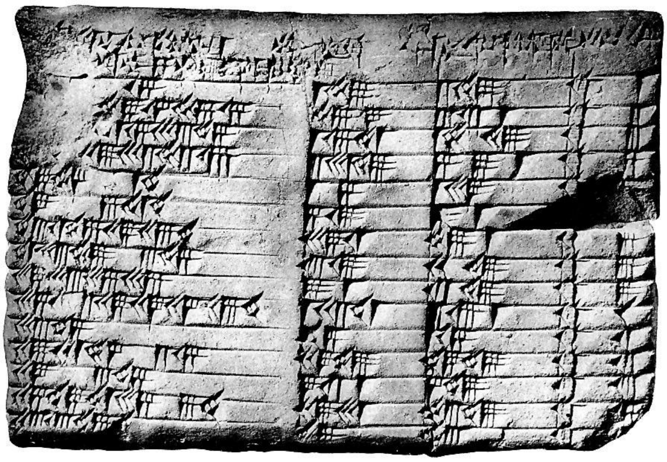
Noções primitivas de funções podem ser encontradas em relatos de povos antigos, como por exemplo, a contagem, implicando uma correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequencia de números naturais, as quatro operações aritméticas elementares, que são funções de duas variáveis, etc. No que segue faremos um resumo da evolução desse conceito na antiguidade.

2.1 - Babilônios

O conceito de função já era percebido nos registros da civilização Babilônica (ou simplesmente Babilônios[1]). É possível encontrar sinais de que os babilônios já teriam, por volta de 2000 a.C, uma ideia, ainda que primitiva, sobre função. São de fato, conhecidas tábuas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas utilizadas por esse povo, na antiguidade, revelando uma ideia de correspondência funcional.

Como exemplo, citamos a mais notável das tábuas matemáticas babilônicas já analisadas, conhecida por Plimptom 322. Essa tábua foi escrita por volta dos anos de 1900 a 1600 a.C. A seguir, na Figura 1, é apresentada uma imagem fotográfica desta placa.

[1] A civilização Babilônica, considerada uma das mais antigas da história, constituída por povos que habitavam na Mesopotâmia. Essa região localiza-se entre os rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, onde atualmente é o Iraque. Dentre os povos que habitavam essa região entre os séculos V e I a.C, destacamos os: babilônicos, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios. Usaremos o termo **babilônio,** assim como em EVES (p. 59), apenas por conveniência a fim de retratar as contribuições desses povos ao desenvolvimento da matemática.



Fonte: Universidade de Colúmbia

Figura 1 – Fotografia da Plimpton 322

De acordo com Eves (2004):

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrado, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). (p.61)

Várias foram as interpretações feitas do conteúdo da Plimpton 322. O fato de algumas das entradas da tabela se encontrarem danificadas o suficiente para se tornarem ilegíveis, permitiu-se obter um maior número de hipóteses a serem seguidas pelos matemáticos que resolveram estudá-la. Os primeiros historiadores a tentar perceber uma eventual interligação do conteúdo das suas várias colunas foram Neugebauer e Abraham Sachs em 1945. Segundo Eves (2004), interpretação de Neugebauer consiste em mostrar que cada linha da Plimpton refere-se a registro sobre os ternos pitagóricos, isto é, soluções inteiras da equação $a^2 = b^2 + c^2$.

2.2 – Egípcios

Segundo Eves (2004), antes de se decifrar tantas tábuas matemáticas babilônicas, o Egito foi por muito tempo o mais rico campo de pesquisas históricas, em particular, matemáticas, sobre antiguidade.

Muitos registros dos egípcios foram preservados por meio de papiros. Os mais importantes para o estudo dos registros matemáticos desse povo são: o papiro de Moscou, o papiro de Kahun, o papiro de Rhind, de cerca de dois milênios a.C. Eles possuíam problemas do cotidiano dos egípcios como o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado, a quantidade de grãos de trigo armazenados, entre outros. Muitos desses problemas eram resolvidos por uma equação do 1º grau e o método utilizado pelos egípcios para esse tipo de resolução ficou conhecido como Método da Falsa Posição *(*MEDEIROS, A. e MEDEIROS, C., 2004*)*. Percebemos através desse tipo de resolução que os egípcios já possuíam uma ideia da relação funcional entre duas grandezas. Vejamos por meio de um exemplo, como os egípcios aplicavam o método da falsa posição na resolução de problemas:

Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 13.

Digam-me: Qual é a quantidade?

Atualmente poderíamos modelar esse problema utilizando Álgebra, por meio da equação $x+\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=13$, onde x é a quantidade procurada.

Os egípcios, primeiramente, assumiam um valor conveniente para x (valor "falso"), de modo a eliminar os denominadores das frações. Neste caso, fazia-se $x=60$ e obtinha-se:

$$60+\frac{60}{2}+\frac{120}{3}=60+30+40=130$$

Os valores falsos (60 e 130) eram então usados para montar uma espécie de regra de três simples com os elementos do problema. Assim, pode-se apresentar o quadro a seguir:

Valor falso	Valor verdadeiro
60	Quantidade
130	13

Logo a quantidade procurada era obtida dividindo-se o valor real do problema pelo valor falso encontrado.

$$13 \div 130 = \frac{1}{10}.$$

Em seguida multiplicava-se o resultado obtido dessa divisão pelo valor falso assumido inicialmente, obtendo $\frac{1}{10} \times 60 = 6$, encontrando assim a quantidade procurada, que é 6.

Analisando-se esse método, percebemos que os egípcios já possuíam a noção de relação entre duas grandezas.

3. Idade Média

Uma contribuição importante no desenvolvimento da representação gráfica da noção de função foi dada pelo Bispo Nicolau de Oresme (1323-1382), na Universidade de Paris, que desenvolveu uma teoria geométrica das latitudes e longitudes das formas, que apresentam diferentes graus de intensidade e extensão.

Pode-se considerar essa teoria como a precursora na representação gráfica de uma função. Em sua teoria, algumas ideias gerais sobre a variável dependente e independente de certas quantidades parecem estar presentes. Oresme percebeu que poderia trabalhar com duas variações ao mesmo tempo (SOUZA, 2012). Para isso ele apresentou uma representação gráfica da velocidade em relação ao tempo, de um móvel que se move com aceleração constante.

Oresme representou por um ponto, cada instante de tempo (ou longitude) numa reta. A seguir, a cada instante de tempo, traçou um segmento vertical (latitude) cujo comprimento representava a velocidade nesse instante. As extremidades desses segmentos como podemos comprovar, estão alinhadas e formam um segmento de reta que representa a velocidade em função do tempo.

Pode-se observar o modelo descrito por Oresme na Figura 2, a seguir:

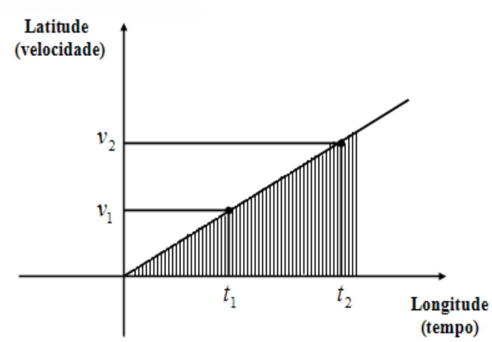


Figura 2 – Modelo descrito por Oresme

De acordo com Boyer (1992),

> Ao conectar as extremidades dessas perpendiculares ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo – num dos mais antigos exemplos na história da matemática do que hoje seria o gráfico de uma função (p.9).

Analisando-se a construção geométrica de Oresme percebe-se a representação do gráfico de uma função Afim, velocidade em relação ao tempo. Apesar das noções de coordenadas não terem sido formalmente definidas por Oresme, considera-se, de acordo com Baron (1985), que ele foi o primeiro a utilizar coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Mesmo que intuitivamente, essas ideias trouxeram contribuições importantes à representação gráfica de uma função.

4. Período Moderno

A noção de função está presente, embora que de forma implícita, em todas as teorias relacionadas ao desenvolvimento do calculo algébrico. Seu maior desenvolvimento ocorre, mais intensamente, a partir do final do século XVII, com a noção de expressão algébrica e segue com a noção de correspondência entre variáveis dependentes e independentes, aproximando da formalização que conhecemos atualmente.

Um salto importante no desenvolvimento da noção de função foi dado por François Viète (1540-1603). Considerado por muitos como o maior matemático francês do século XVI, em seu trabalho "In Artem analyticam isagoge" (1591) apresentou contribuições notáveis para o que, segundo Youschkevitch (1981), é considerado como a "Nova Álgebra". Viète estabeleceu como prática o uso de vogais para representar incógnita e consoantes para representar constantes.

Segundo Eves (2004):

> Antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por A, Aquadratum, A cubum; mais arde alguns escritores abreviaram essa noção para A, Aq, Ac.(p.309)

A notação de Viète possibilitou, pela primeira vez, a representação de uma equação algébrica e de expressões envolvendo números desconhecidos, por meio de símbolos algébricos. Todavia, de acordo com Youschkevitch (1981), "... o criador da nova Álgebra (Viète) não utiliza sua notável descoberta para 'fazer avançar' o conceito de função: pensar em termos de função não foi característica de seu espírito".(p.23)

A convenção moderna de se usar as primeiras letras do alfabeto para representar constantes e as últimas letras para representar as incógnitas foi introduzida por Descartes em 1637.

Descartes (1596-1650) filósofo e matemático francês propôs a utilização de um sistema de eixos para localizar pontos e representar graficamente as equações. Em seu trabalho "La Géométrie" ele afirmou que uma equação em duas variáveis, por exemplo, x e y, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre quantidades variáveis. A ideia da derivada surgiu como uma maneira de encontrar a tangente em qualquer ponto dessa curva.

Por meio da resolução, dada por Descartes, ao problema de Pappus, que consiste em reduzir o problema a duas retas graduadas, ele constrói um sistema de coordenadas, que é considerado como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Esse sistema de coordenadas é conhecido atualmente como plano cartesiano, em homenagem a Descartes.

Descartes, trabalhando sobre métodos geométricos mais gerais que os de Viète, exibiu ferramentas algébricas inovadoras. Seu objetivo era o mesmo de Viète, resolver problemas de construção. Porém seu método de representar algebricamente problemas geométricos que envolviam equações de qualquer grau ou equações indeterminadas foi a revolução da Geometria do século XVII. Descartes, aperfeiçoando o simbolismo de Viète no livro III da "La Géométrie", desenvolve uma notação equivalente à que usamos atualmente.

Outro matemático que trouxe contribuições importantes para o desenvolvimento da análise matemática e consequentemente ao estudo de funções foi Newton (1642-1727). Em seu trabalho publicado em 1736, sob o título "Method of fluxions" ele usa o termo "fluente" e "fluxo do fluente" o que hoje chama-se de variável dependente e independente.

Segundo Eves (2004):

> Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$ (p. 439).

Apesar de Newton não ter usado o termo função, percebe-se pelos seus trabalhos que ele já considerava a existência de uma relação entre variável dependente e independente. Os conceitos mecânicos e cinemáticos, usados por ele para expressar as variáveis, na linguagem atual, seria o mesmo que considerá-las em função do tempo.

Foi Leibniz (1646-1716) no trabalho intitulado "O método inverso das tangentes, ou em funções" (“Methodus tangentium inversa, de seu de fonctionibus”), quem primeiro usou o termo "função" em 1673. Em um artigo impresso no Journal des Scavans em 1694, Leibniz pela primeira vez apresenta a palavra “função” numa publicação.

Ele usou a palavra função para designar, em termos muito gerais, um segmento de reta (corda, abscissa, ordenada, etc) cujo comprimento depende da posição que ocupa um certo ponto sobre uma curva dada. Ele também introduziu o termo "constante", "variável", e "parâmetro". Segundo Boyer (1996): “Leibniz não é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje”(p.297).

Deve-se Johann Bernoulli (1667-1748) não somente o emprego do termo função em um sentido mais preciso, como também a definição, de maneira geral, das funções de uma grandeza variável. A definição de função no sentido de expressão analítica foi publicada em 1718 nas “Acta Eruditorum Lipsiae”. Nesse artigo, segundo Youschkevitch(1981), Johann Bernoulli define função da seguinte maneira: “Chamamos função de uma grandeza variável as quantidades compostas, de um modo qualquer, dessa grandeza variável e de constantes”. (p. 35).

Foi Leonhard Euler (1707-1783), descendente intelectual de Leibniz e influenciado pelos ensinamentos de Johann Bernoulli, que muito contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função.

Em sua "Introductio in analysin infinitorum", publicada em 1748, Euler definiu uma função de uma quantidade variável como sendo "qualquer expressão analítica composta formada de alguma maneira por essa quantidade variável e com números ou quantidades constantes". Boyer (1992, p.24)

Podemos destacar também outras grandes contribuições de Euler à matemática, como a implantação de algumas notações matemática, como as apresentadas por Eves (2004, p. 472) a saber:

$f(x)$	para funções
e	para a base dos logaritmos naturais
$a,\ b,\ c$	para os lados de um triângulo ABC
$\sum$	para somatórios
i	para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$

Em seus escritos, Euler também nos apresenta a distinção entre as funções explícitas das implícitas, as algébricas das transcendentes. Dessa época em diante a ideia de "função" tornou-se fundamental na análise matemática (SANTANA e OTTE, 2010).

Enquanto Euler, em seus trabalhos, se preocupava com detalhes e liberdade de intuição, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) se preocupava com o rigor matemático. Em sua obra "Theorie des Fonctions Analytiques Contenant lês Príncipes Du Calcul Différentiel", Lagrange propunha a representação de uma função $f(x)$ por uma série de Taylor. A notação $f`(x),\ f``(x),\ ...$ para derivadas de 1^a, 2^a , ... , n-ésima ordem, muito utilizada atualmente, foi introduzida por ele. Apesar de não ter alcançado seu objetivo por cometer erros em não atentar para a convergência e divergência, que se baseiam na ideia de limite, suas ideias produziram a "primeira teoria de funções de variável real".

O século XIX é conhecido como o "século do rigor". Esse título é dado, pois nesse período a busca pelo rigor matemático levou muitos matemáticos competentes como Cauchy (1789-1857), Lobatchevsky (1792-1856) Weierstrass

(1815-1897), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831–1916), Cantor (1845-1918) entre outros, a desenvolverem trabalhos muito produtivos no que se refere à formalização rigorosa de conceitos matemáticos antes abordados de maneira intuitiva.

Dentre todos, os trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier, merece-nos uma atenção especial, pois apresenta uma grande contribuição para formalização da definição de função.

Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França afirmando que toda função definida num intervalo finito, por um gráfico qualquer, pode ser representado por uma série de funções seno e cosseno (atualmente chamada de série de Fourier).

Em outras palavras se $f(x)$ é uma função definida no intervalo $(-\pi,\pi)$ ela pode ser representada pela expressão:

$$\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(nx) \ + \ b_n \cdot sen \ (nx)\right)$$

Apesar da afirmação de Fourier, que diz que qualquer função pode ser escrita por meio de uma série trigonométrica fosse exagerada, suas ideias contribuíram para o desenvolvimento de estudos em diversos campos como na acústica, óptica, termodinâmica e, também, dentre outros, na resolução de equações diferenciais.

Em busca de uma definição mais abrangente e rigorosa do conceito de função, Lejeune Dirichilet (1805-1859) chegou a seguinte definição:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui uma valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função(unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada **variável independente** e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada **variável dependente**. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o **campo de definição** da função e os valores assumidos por y constituem o **campo dos valores** da função. (EVES, 2004, p 661).

Foi a partir dos estudos de conjunto de pontos feito por Georg Cantor e consequentemente do desenvolvimento da teoria de conjuntos, que permitiu-se definir uma função em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente numéricos.

Já no século XX, a busca pela formalização dos conceitos matemáticos levou muitos pesquisadores matemáticos a publicarem textos científicos. Entre eles destaca-se um grupo de matemáticos da França, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Esse grupo acreditava que muitas definições da matemática moderna deveriam ser repensadas. Para isso, escreveram uma série de livros, que foram publicados a partir de 1935, apresentando ao mundo “a matemática moderna”, a partir de uma nova terminologia e novos conceitos.

De acordo com Mendes (1994) a definição de função apresentada pelo grupo Bourbaki é:

> Sejam **E** e **F** dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de **E** em **F**, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.(p.53)

As contribuições do movimento da matemática moderna proposto pelo grupo Bourbaki estão presentes até hoje e muito influenciaram a prática docente no final do século passado.

5. Considerações Finais

Este trabalho procurou situar o desenvolvimento do conceito de função, dentro de um breve panorama histórico, enfatizando que a sua construção e correto entendimento não é fruto do trabalho de uma pessoa, mas sim, dos esforços de muitos, tendo evoluído à medida que a própria civilização evoluiu.

Consideramos que, dentre os conteúdos da matemática do Ensino Médio, a formação de conceitos do campo de Funções desempenha um papel fundamental na formação básica do cidadão brasileiro. Falar em formação básica para a cidadania significa falar da inserção das pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, no âmbito da sociedade brasileira. Para isso, sem dúvida, metodologias que favoreçam um bom domínio do conceito de funções, precisam ser desenvolvidas e estudadas.

Nesse sentido, entendemos e procuramos mostrar nesse trabalho que o uso da história como metodologia de ensino, pode ser capaz de propiciar ambientes com novas propostas pedagógicas de aprendizagem no ensino de matemática.

Ressaltando mais uma vez, a importância do conceito de função na formação do estudante, concordamos com Eves (2004, p.661) quando afirma que "... é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para a sua formação matemática."

Como foi apresentado neste trabalho, na Antiguidade, embora haja registros de estudos sobre diferentes casos de dependência entre duas quantidades, esses registros não apresentam nenhuma noção geral de quantidades variáveis e nem de funções. Na Idade Média as noções de quantidades variáveis, são pela primeira vez apresentadas sob formas geométricas ou cinemáticas. Porém cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal ou por um gráfico, ao invés de uma fórmula. No Período Moderno, a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, as funções representadas por expressões analíticas, que em geral eram representadas por soma de séries infinitas, começaram a serem estudadas, tornando-se a principal classe utilizada.

Partindo das dificuldades apresentadas por muitos alunos na formalização e entendimento do conceito de função e, nos desafios do professor em conseguir com que esses alunos compreendam tal conceito e saibam aplicá-lo na resolução de problemas, representações e análise gráfica, esse estudo, ainda em fase de construção, pretende contribuir para a construção significativa deste conceito; tendo como objetivo, auxiliar o professor de matemática a desenvolver um trabalho dinâmico, buscando alcançar o aprendizado dos alunos.

6. Referências

BARON, M. E. **Curso de história da matemática: Origens e Desenvolvimento do Calculo.** Tradução de José Raimundo Braga – Brasília, DF: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1996.

BOYER, C. B. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula.** Tradução de Higino H. Domingues – São Paulo, SP: Editora ATUAL, 1992.

BRASIL. **Secretaria do Ensino Médio. Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEM, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações.** Rio de Janeiro – RJ. Editora Ática, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática,** Tradução de Higino H. Domingues – Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.

IEZZI, G. e MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjunto e Funções.** Ed. São Paulo-SP: Atual, 2004.

MEDEIROS, A. e MEDEIROS C. **O método da falsa posição na história e na educação matemática**. Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 545-557, 2004

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau**, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio de Janeiro, 1994.

RORATTO, C. ; NOGUEIRA, C.M.I. e KATO, L. A. **História da Matemática e aprendizagem significativa : Uma combinação posssível no ensino de Funções** – X ENEM – Salvador – BA, 2010**.** Disponível em : http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T6_CC192.pdf Acesso em 15 de Janeiro de 2013.

SANTANA, G. S. S. e OTTE, M. F. **As concepções de Euller e Cauchy para o conceito de função contínua na perspectiva de Pierre Boutroux** – X ENEM – Salvador – BA, 2010**.** Disponível em : http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/PT/T6_PT1373.pdf Acesso em 15 de Janeiro de 2013.

SOUZA, V. **Funções no Ensino Médio: História e Modelagem**. Dissertação de Mestrado- PUCSP, 2012.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle.In:Fragments d´historie des Mathématiques.** Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.