ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES SOBRE NÚMEROS RACIONAIS NA PROVA DO SAEPE/SISTEMA DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO.

Autor: Rosivaldo Severino dos Santos
Instituição: Universidade dos Bandeirantes/UNIBAN-SP
E-mail: rosivaldo100@ig.com.br

Co autor 1: Marcelo Câmara dos Santos
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco/UFPE
E-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Co autor 2: Tânia Maria Mendonça Campos
Instituição: Universidade dos Bandeirantes/UNIBAN-SP
E-mail: taniammcampos@hotmail.com

Resumo
Este trabalho teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas por alunos da Rede Municipal de ensino do Recife ao responderem questões do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco sobre números racionais. A partir dos descritores da matriz de referência do SAEPE referentes aos números racionais, elaboramos um instrumento com oito itens espelho e aplicamos em oito turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. Posteriormente realizamos entrevistas com 26 alunos, em função de suas respostas ao instrumento de pesquisa. Para alcançarmos o nosso objetivo, utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2001) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995). Com relação aos resultados, em nenhum dos itens o percentual de acerto chegou a 50%. Sobre as estratégias utilizadas pelos alunos, os mesmos utilizam estratégias totalmente descontextualizadas dos problemas para responder o item que lhe é proposto.

Palavras-chave: Avaliação Educacional; Números Racionais; Estratégias.

1. Introdução

A avaliação educacional tem ocupado um lugar de grande importância nos sistemas de ensino atualmente, na medida em que se observa a importância de verificar o que os alunos aprenderam ao longo dos anos em que estiveram estudando.

Esse tipo de avaliação é um dos principais instrumentos para a elaboração de políticas educacionais dos sistemas de ensino e redirecionamento das metas das unidades escolares. Seu foco é o desempenho da escola e o seu resultado é uma medida de proficiência que possibilita aos gestores a implementação de políticas públicas, e às unidades escolares um retrato de seu desempenho.

A avaliação em larga escala é hoje uma política pública institucionalizada que foi iniciada no Brasil na década de 80, quando o Ministério da Educação iniciou o desenvolvimento de estudos sobre avaliação educacional, movido pelo incentivo proveniente das agências financiadoras internacionais. Nessa época, foram lançados os pressupostos para a construção do que veio a se tornar mais tarde o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

O SAEB foi implementado em 1990 com o objetivo de aperfeiçoar normas e procedimentos específicos e assegurar cientificidade, confiabilidade e comparabilidade a seus resultados.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica é composto por dois exames complementares, que são a ANEB/Avaliação Nacional da Educação Básica e a ANRESC/Avaliação Nacional do Rendimento Escolar. A ANEB é realizada de forma amostral com alunos de escolas públicas e privadas, localizadas em áreas urbana e rural matriculados no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e no 3º ano do Ensino Médio. Já a ANRESC, que recebe o nome de prova Brasil, é aplicada censitariamente a alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental Público de áreas urbana e rural, nas escolas que tenham no mínimo 20 alunos matriculados na série avaliada.

O SAEPE/Sistema de Avaliação de Pernambuco avalia de forma censitária, os alunos das redes de ensino estadual e municipal sendo, no 3º ano, apenas em Língua Portuguesa, e no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, incluindo os projetos de correção de fluxo escolar, nas áreas curriculares de Língua Portuguesa e Matemática.

Analisando os resultados do SAEPE, comprovamos as dificuldades dos alunos em compreender os números racionais e suas operações, assim como a ideia de fração e a relação que se tem entre numerador e denominador. Por exemplo, na avaliação do SAEPE realizada no ano de 2008, nos resultados dos quinze itens relacionados aos descritores que tratam de números racionais o percentual de acerto variou entre 6,4% e 42%.

Diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática (Campos e cols., 1995; Merlini, 2005; Santos, 2005; Vasconcelos, 2007), sobre os números racionais na representação fracionária, têm indicado que a forma como esses números são apresentados às crianças, normalmente com o significado parte-todo com quantidades contínuas e de forma descontextualizada, contribui para que os alunos não superem as dificuldades apresentadas em lidar com problemas envolvendo números fracionários.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que uma forma comum de apresentar as frações às crianças é por meio de um todo dividido em partes, destacando algumas pintadas e informando às crianças que as partes pintadas representam o numerador e o total de partes é o denominador.

Campos e cols. (1995) demonstraram que a introdução de frações por meio do modelo parte-todo leva os alunos a aplicar um procedimento de dupla contagem, em que o denominador é o número de partes em que o todo foi dividido e o numerador é o número de partes que foram pintadas, sem entender o significado da fração.

Merlini (2005) investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de fração com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e verificou que, em ambas as séries, o índice de acertos às questões aplicadas foi de 21,16%, demonstrando certa homogeneidade entre os desempenhos das séries e indicando um resultado insatisfatório.

Com base nos dados acima descritos, realizamos a investigação com as questões referentes ao conteúdo de Números Racionais, com o objetivo de identificar as estratégias que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental mobilizam ao responderem a essas questões. A pesquisa foi desenvolvida em três escolas pertencentes à Rede Municipal do Recife, localizadas na periferia da zona norte da cidade, no turno vespertino, e a escolha em realizar a pesquisa nessas três escolas se deu em virtude do baixo desempenho das mesmas na avaliação do SAEPE/2008.

2. Fundamentação Teórica

A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1991) oferece uma estrutura que possibilita estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos e as relações existentes entre os conceitos.

Vergnaud considera um conceito como sendo formado por uma terna de três conjuntos (S, I, R), em que S é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; I é um conjunto de invariantes (objeto, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar essas situações e R é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos, e que o conhecimento conceitual deve existir dentro de situações-problema.

No processo de aquisição do conhecimento, os conceitos matemáticos expressam seus sentidos a partir de uma variedade de situações que podem ser analisados com a ajuda de um conjunto de conceitos.

Para Vergnaud, é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações:

- em uma dessas classes, o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- na outra classe, o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas frustradas que o leva, eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud esclarece que as competências e concepções são adquiridas pela criança por meio da formação de esquemas. Para entendermos o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário primeiro entender o conceito de esquema.

Os esquemas são os procedimentos, os invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural de atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é um invariante operatório com suas propriedades e definições; quando são manifestados, geralmente são explícitos.

Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que ele consiga explicitá-los ou justificá-lo.

Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Para Vergnaud, as competências e as concepções dos alunos vão se desenvolvendo ao longo do tempo, por meio de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando se defronta com uma nova situação, o aluno usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tenta adaptá-los à nova situação. Esse conhecimento tanto pode ser explícito, no sentido de que pode ser expresso de forma simbólica, quanto pode ser implícito, no sentido de que pode ser usado na ação, durante a qual o aluno escolhe as operações adequadas, sem, contudo, conseguir expressar as razões dessa escolha.

Segundo Vergnaud, dois grandes campos conceituais nos quais o conhecimento matemático está organizado são as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas. As estruturas aditivas são o conjunto de situações que implicam uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas abrange os conceitos de multiplicação e divisão e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporção, função, quociente e produto de dimensões, combinação linear, fração, relação, número racional, múltiplo, divisor, etc.

Vergnaud afirma que a divisão envolve regras operatórias complexas (utilização de divisões sucessivas; multiplicação; subtração; busca de um quociente, que pode envolver um resto e resultar em números fracionários) e requer o estabelecimento de relações diversas (considerar o tamanho do todo; o número de partes; o tamanho das partes, que deve ser o mesmo; a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes; a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes).

Como parte do nosso aporte teórico, trataremos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma vez que, segundo Duval (1999), a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem dos números racionais confrontam-se com a existência de diversos registros de representação semiótica, a diferença entre o objeto representado e seus diferentes registros de representação semiótica e a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

Para Duval (2003), é importante distinguir o objeto matemático e a sua representação. Aprender matemática é diferente de aprender outras disciplinas, pois requer uma atividade cognitiva diversa das requeridas em outros domínios do conhecimento. A diferença entre essas atividades não deve ser procurada nos conceitos, pois não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo.

Para Duval (2003), essa diferença está na importância primordial das representações semióticas, e na grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Com relação à importância das representações semióticas, basta observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. A matemática envolve diferentes representações semióticas, tais como os símbolos numéricos, as figuras geométricas, as escritas algébricas, as representações gráficas e a língua natural.

Dependendo do caso, em uma resolução de problema, um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro, uma vez que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.

Existem dois tipos de transformação de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro (transformação interna). As conversões são transformações de representações nas quais ocorre a mudança de registros, mas conservando a mesma referência ao objeto. Por exemplo, a passagem para a escrita algébrica ou gráfica de uma função descrita em um texto na linguagem natural são exemplos de conversão.

Passamos a tratar dos subconstrutos dos números racionais, uma vez que, na representação fracionária e decimal, a compreensão do conceito desses números depende do entendimento de alguns subconstrutos.

Nunes *et al.* (2003) propõem uma classificação para os diferentes sentidos de fração, contemplando cinco significados: parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo.

<u>Significado parte-todo</u>

A ideia neste significado é da partição de um todo contínuo[1] ou discreto[2] em *n* partes iguais, onde cada parte pode ser representada como 1/n.

<u>Significado medida</u>

A fração assume um significado de medida em situações de quantidades intensivas[3] e extensivas[4]. A ideia de distribuição e de quanto é recebido por cada pessoa representa o aspecto da quantidade extensiva do número racional; a reconstrução do todo ou unidade

[1]Quantidade contínua refere-se àquelas quantidades passíveis de serem divididas exaustivamente sem que percam suas características.
[2]Quantidade discreta refere-se àquelas quantidades enumeráveis, contáveis, que dizem respeito a um conjunto de objetos.
[3]Quantidades intensivas baseiam-se na relação entre duas quantidades diferentes, portanto no raciocínio multiplicativo.
[4]Quantidades extensivas baseiam-se na comparação de duas quantidades de mesma natureza e na relação parte-todo, portanto no raciocínio aditivo.

em relação à parte representa os aspectos intensivos desses números. A ideia é de comparação de duas grandezas.

Significado número

Nesse caso, o aluno deverá reconhecer, a princípio, a fração 2/3 como um número (significado) e não como uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber ainda que todo número pode ser associado a um ponto na reta numérica, e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), ou seja, 1/3 é um número compreendido entre 0 e 1.

Significado quociente

Esse significado aparece em situações associadas à ideia da divisão como estratégia para resolver um determinado problema. Na ideia de quociente, ou divisão indicada, a fração é vista como uma divisão entre dois números inteiros; neste caso, o símbolo representa uma relação entre duas quantidades, *a* e *b* denotando uma operação.

Significado operador multiplicativo

Com esse significado a fração assume um papel de transformação, ou seja, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, tendo como produto final, o resultado de uma transformação.

3. Procedimentos Metodológicos

Inicialmente, procedemos a um levantamento dos itens do SAEPE no eixo de Números e Operações, referentes aos números racionais. Após isso, identificamos o percentual assinalado pelos alunos em cada distrator – que são as alternativas de respostas com exceção do gabarito – das questões referentes a esse componente curricular. Foram identificados quinze itens referentes a seis descritores, os quais indicam o domínio que o aluno deve ter acerca do conhecimento matemático. A partir desses itens, foi elaborado o instrumento para a pesquisa, com base nos descritores do SAEPE e da avaliação da Prova Brasil.

O instrumento foi elaborado com oito itens que contemplaram alguns subconstrutos dos números racionais, a saber: dois de reconhecimento de fração na ideia de parte de um todo, dois relativos à representação de números racionais na reta numérica, dois sobre equivalência de frações e dois sobre mudança de representação (forma fracionária ⇒ forma decimal). Apresentaremos neste artigo quatro itens referentes ao significado parte-todo e representação de números racionais na reta numérica.

A coleta de dados foi realizada com 276 alunos pertencentes a três escolas municipais do Recife, e a aplicação dos instrumentos aconteceu no horário e na sala de aula dos alunos. O professor da turma cedeu o horário para a realização da coleta, a qual foi realizada pelo pesquisador, de forma individual e sem consulta.

Após a aplicação do instrumento, foram selecionados 26 alunos para a realização de entrevistas em função de suas respostas ao instrumento de pesquisa, com o objetivo de identificar as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução das questões constantes no protocolo.

Usamos a entrevista de explicitação com o objetivo de levar os alunos a explicarem as suas respostas ao protocolo, para identificarmos as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução dos itens sobre números racionais.

4. Análise dos Resultados

Podemos observar que, tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE, em nenhum dos itens, o percentual de acerto chegou a 50%, o que é um dado preocupante, do ponto de vista do ensino. Isso porque o ensino dos números racionais, na sua representação fracionária, inicia-se a partir do terceiro ano do Ensino Fundamental, e os alunos que participaram desta pesquisa e da avaliação do SAEPE estão no último ano do Ensino Fundamental. No tocante às estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa, observamos que, para um mesmo significado dos números racionais, os alunos utilizam estratégias diferentes na resolução dessas questões, assim como verificamos, também, o uso de uma mesma estratégia em questões com significados diferentes dos números racionais.

Apresentamos a seguir, quatro itens do instrumento de pesquisa – dois do significado parte-todo e dois de representação de números fracionários na reta numérica – com as estratégias identificadas em cada um desses itens.

Item 01 – Em qual das figuras abaixo o número de quadradinhos pintados representa $\frac{2}{3}$ do total de quadradinhos?

a) ■ ■ □ □ □ □

b) ■ ■ ■ □ □ □

c) ■ ■ ■ ■ □ □

d) ■ ■ ■ ■ ■ □

Esse item aborda o significado parte-todo com quantidade discreta e nele identificamos o uso do número racional como números sobrepostos. A principal característica do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos, os quais são apenas separados por um traço. Silva (1997), em seu trabalho, cita que Hart (1981), em sua pesquisa, levantou algumas dificuldades com interpretações das frações e constatou que a maioria dos alunos considera a fração como dois números naturais, em que podem somar os numeradores e os denominadores, principalmente na adição de fração com denominadores diferentes.

O gráfico 01 mostra que, em nossa pesquisa, 22,1% dos alunos acertaram a questão, enquanto na avaliação do SAEPE/2008 o percentual de acerto foi de 14,6%.

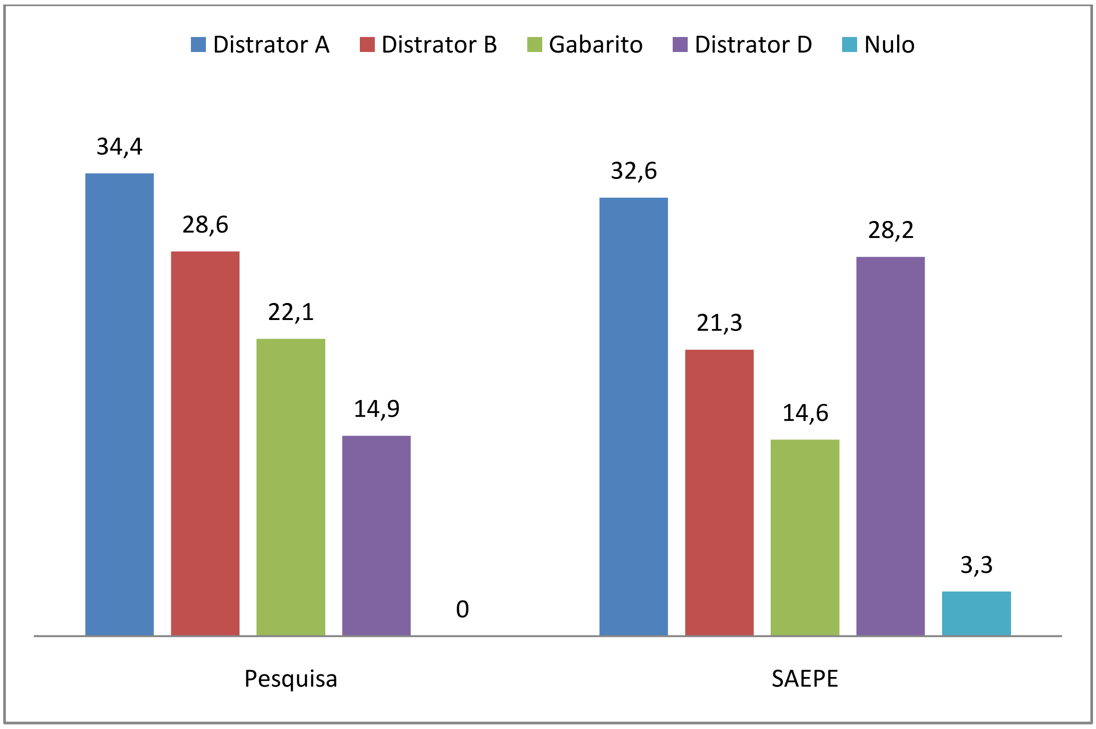
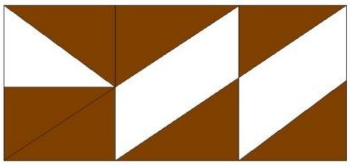


Gráfico 1 – Item 01: Significado parte-todo com quantidade discreta.

A ideia de fração como dois números sem relação entre eles pode ser ilustrada pela fala do aluno A5, quando, durante a entrevista, ele diz que assinalou a letra D dessa questão porque tinha cinco quadradinhos pintados e ele somou dois mais três, que eram respectivamente o numerador e o denominador da fração que constava no comando do item. Ainda com relação a esse item, identificamos também o uso da estratégia em que o aluno utiliza os dados contidos no problema sem construir um sentido para essa utilização. Essa estratégia consiste em o aluno elaborar sua resposta utilizando os dados contidos no enunciado do problema de maneira aleatória, sem se preocupar com a sua pertinência. Durante a entrevista, um aluno revela que marcou a alternativa A, assinalada por 34,4% dos alunos, por conta do numerador da fração.

Item 02 – Observe as partes em que está dividida a figura



O número que representa a parte do retângulo que está sombreada é:

a) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{12}{7}$

Nesse caso, o aluno necessita perceber previamente a identificação de uma unidade, a realização de divisões e ter ideia da conservação da área, já que se trata de quantidade contínua.

O retângulo não está explicitamente dividido em partes iguais e o número de partes precisa ser descoberto pelos alunos por meio de uma análise da relação parte-todo, para representar a fração indicada na figura.

O gráfico a seguir mostra que os resultados de nossa pesquisa estão muito próximos dos resultados do SAEPE.

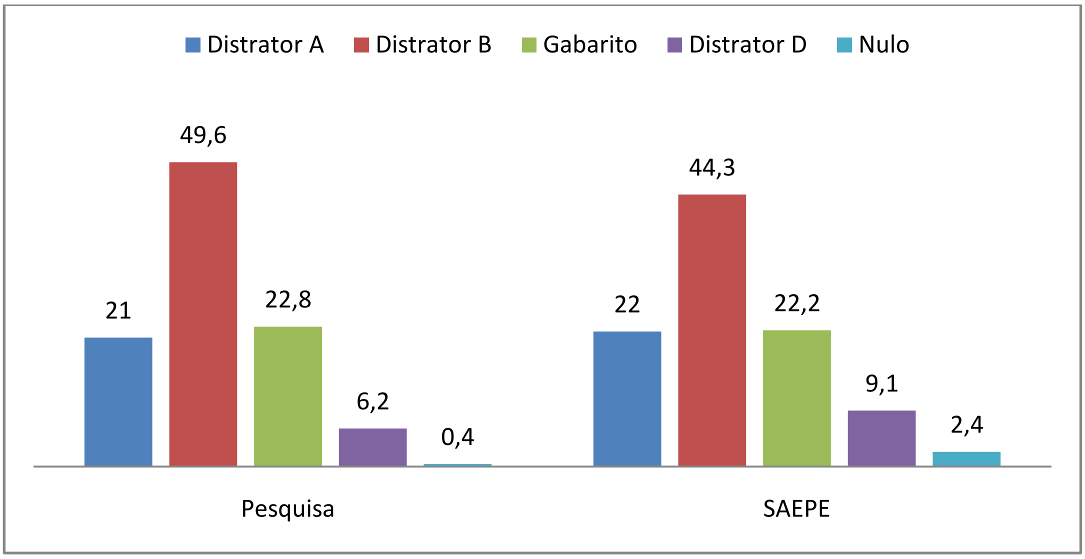
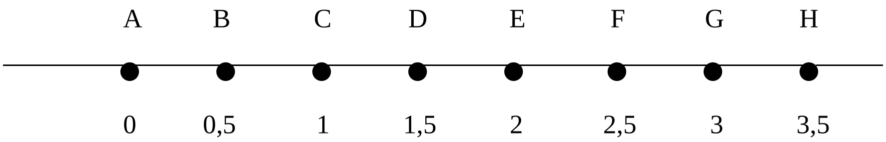


Gráfico 2 – Item 02: Significado parte-todo com quantidade contínua.

Nesse item a estratégia predominante foi o uso da contagem dupla parte-parte com 70,6% – O uso dessa estratégia acontece quando o aluno, ao observar que o retângulo foi dividido em partes desiguais, consegue perceber a diferença no tamanho das partes. Entretanto, ao responder sobre a questão das partes sombreadas, ele faz a relação das partes sombreadas com as partes não sombreadas, não considerando todas as partes em que o todo foi dividido.

Item 03 – Observe a reta numérica a seguir.



O número racional $\frac{53}{25}$ está localizado entre os pontos:

a) A e E. c) F e G.

b) E e F. d) G e H.

O gráfico a seguir mostra que, neste item, apenas 14,5% dos alunos acertaram a questão – alternativa “B”. Os outros fazem uso dos dados contidos no problema de forma descontextualizada do comando do item para responder.

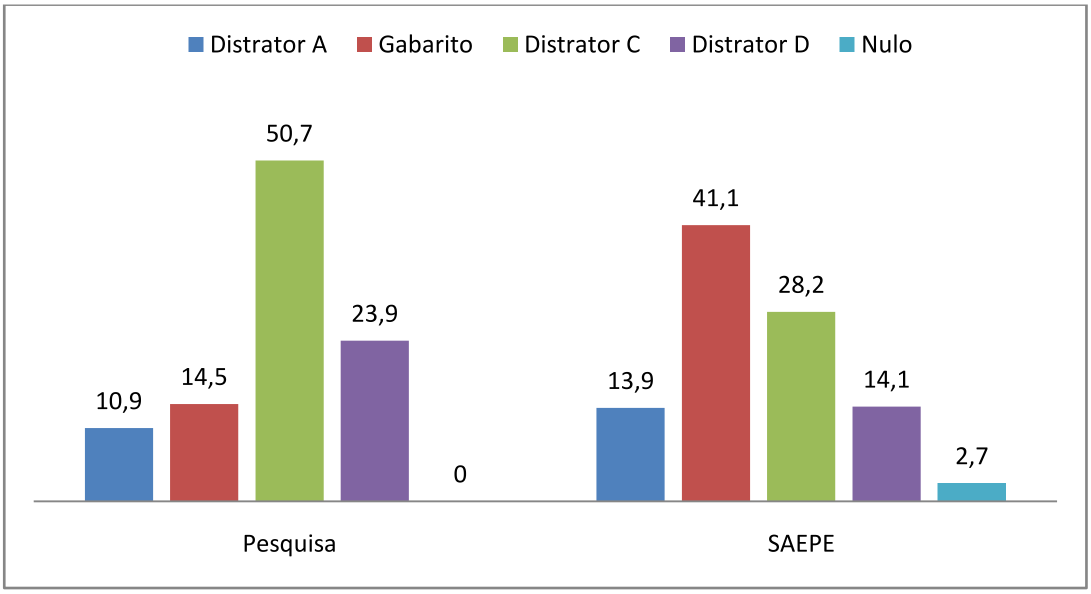
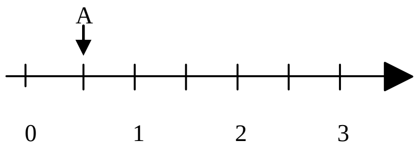


Gráfico 3 – Item 03: Representação de número racional na reta numérica.

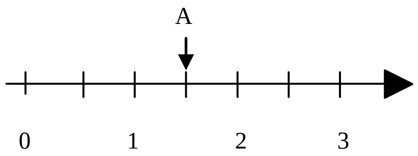
Durante as entrevistas, observamos que alguns alunos que marcaram a alternativa “A”, disseram ter escolhido essa alternativa pelo fato de o espaço entre os pontos A e E ser o maior e, portanto tinham mais possibilidade de acertar. Dos alunos que marcaram a alternativa "C", os que participaram das entrevistas, disseram ter marcado esta alternativa por relacionarem o ponto F com o denominador da fração.

Item 04 – O número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica:

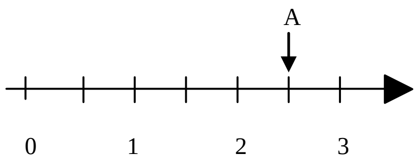
a)



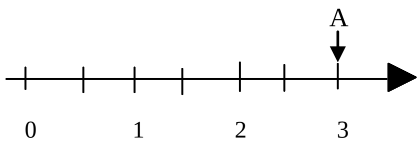
b)



c)



d)



O que nos chama atenção nesse item é o baixo número de alunos que acertou a questão, ou seja, tanto em nossa pesquisa quanto no resultado do SAEPE, apenas um em cada cinco alunos acerta o item. Por outro lado, poucos alunos deixam em branco, o que nos leva a supor que eles acreditam "saber" responder ao item.

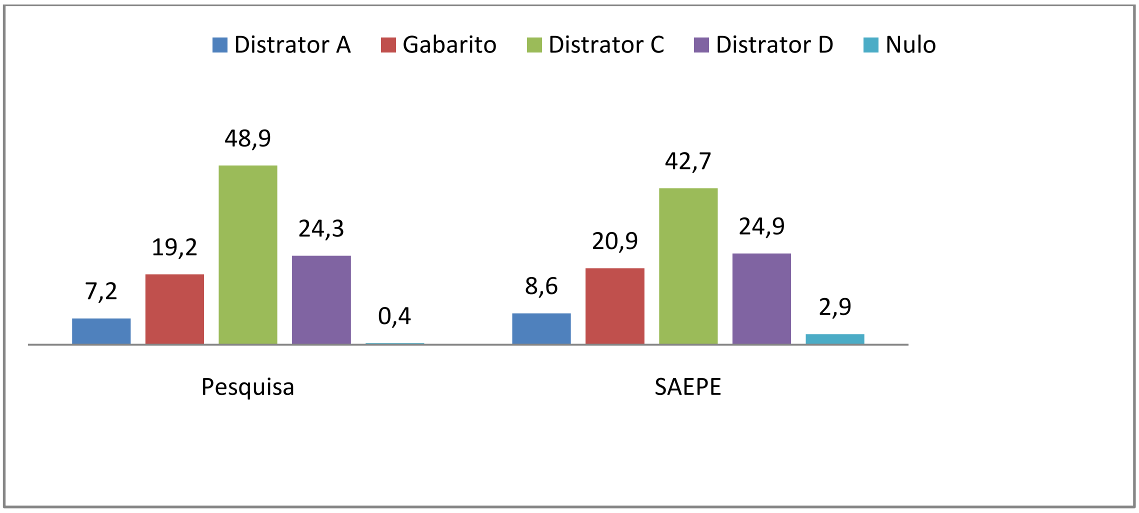


Gráfico 4 – Item 04: Representação de número racional na reta numérica.

Outro fato a ser observado é que a maioria dos alunos, 48,9% em nossa pesquisa, e 42,7% no resultado do SAEPE, optou pela alternativa C, e por meio das entrevistas identificamos que os alunos que participaram das entrevistas e fizeram esta opção, o fizeram porque o ponto A está representado na reta numérica entre os números 2 e 3, que são os dois termos da fração.

5. Considerações Finais

Com relação às estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa, verificamos que, mesmo sendo trabalhados ao longo de todo o Ensino Fundamental, os números fracionários continuam a ser um componente curricular no qual os alunos apresentam muita dificuldade.

Diante dessa dificuldade, percebemos a utilização de estratégias totalmente descontextualizadas dos problemas propostos para o encontro de respostas para as questões, mesmo que essas respostas nada tenham a ver com os comandos dos itens.

Entre as estratégias identificadas em nossa pesquisa, a situação mais recorrente é aquela na qual o aluno faz uso dos dados contidos no problema sem elaborar nenhum significado para essa ação. Nesse procedimento, os alunos permanecem ligados ao contexto do problema sem dominar as relações entre os conceitos envolvidos, e tentam resolver a questão utilizando as operações matemáticas com as quais estão familiarizados para operar esses dados, e, assim, encontrar a resposta.

Como o nosso objetivo foi analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife ao responderem questões na avaliação do SAEPE sobre números racionais, verificamos que, nas questões do tipo parte-todo, o uso da contagem dupla parte-parte apareceu de forma muito frequente. Dentre os alunos que fizeram uso dessa estratégia, alguns não conseguiram nem mesmo perceber que o todo estava dividido em partes explicitamente desiguais.

No âmbito geral, verificamos que não houve regularidade na utilização das estratégias por parte dos alunos, uma vez que identificamos o uso de estratégias diferentes para tentar resolver uma mesma questão, assim como o uso da mesma estratégia em questões com significados diferentes.

Por fim, ressaltamos a importância do papel do professor como educador matemático e a necessidade do mesmo ter acesso às estratégias utilizadas pelos alunos nas avaliações de larga escala, para que, a partir dessas informações, possa repensar a sua prática de sala de aula. De posse dessas informações, o professor poderá discutir essas estratégias com os alunos, para, como afirma Vergnaud, ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

6. Referências

CAMPOS, T. et al. **Lógica das Equivalências**. PUC, São Paulo: Relatório de Pesquisa não publicado, 1995.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berne: Peter Lang, 1995.

FRANCI, A. **Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais**. In: MACHADO, S. D. A (org.). Educação Matemática: uma introdução. 2ª edição. São Paulo: EDUC, 2002. P. 155-196

LIMA, J M. **Introdução ao conceito de fração:** uma experiência de ensino. Alfabetização e Cidadania, educação matemática. RAAAB. São Paulo. N. 6. dez 1997.

MACHADO, S. D. A (org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. 5ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, junho, 2003.

NUNES, T. et al. **Educação Matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação**: SAEPE – 2008 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1, Juiz de Fora, 2008.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação**: SAEPE – 2009 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 3, Juiz de Fora, 2009.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SANTOS, R. S. **Analisando as Estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números Fracionários**: A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais. Recherches em didactique dês mathématiques** 10(23), 133-170. In: Didáctica das matemáticas. Direção de Jean Brun. Horizontes Pedagógicos, 1991.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.