PARADOXOS DO INFINITO E TEORIA DE CANTOR: DESDOBRAMENTOS PARA FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Denise Silva Vilela
Universidade Federal de São Carlos -UFSCar
denisevilela@ufscar.br

Alexandrina Monteiro
Universidade São Francisco- USF
math_ale@uol.com.br

Resumo:
Este minicurso tem como objeto central a teoria dos números transfinitos de Georg Cantor. Por meio dela serão discutidas: as concepções filosóficas platonistas, formalista e empiristas; e os paradoxos do infinito. Será enfatizado o caráter intuitivo da noção de conjunto nas publicações de Cantor para ilustrar uma cisão entre aspectos intuitivos e formais da matemática, o que, por sua vez, provoca desdobramentos na relação na matemática escolar com a matemática acadêmica. Mediante este cenário, que coloca a matemática formal delimitada em relação a uma matemática escolar múltipla em seus condicionantes e componentes, serão trazidas pesquisas que se pautam em abordagens específicas da Filosofia da Educação Matemática.

Palavras-chave: filosofia da matemática; filosofia da educação matemática; teoria dos conjuntos; paradoxos do infinito.

1. Introdução

O ensino de matemática no Brasil ampliou-se qualitativa e quantitativa a partir da ampla reforma promulgada pela lei 5692/71 durante o governo militar. Destaca-se que, nesta ocasião, se tornou um parâmetro central para o ensino de matemática um movimento de renovação que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM) o qual elege a Teoria dos Conjuntos como um de seus destaques. Essa teoria privilegiada pelo MMM, foi formalmente elaborada a partir das formulações de Georg Cantor (1845-1912) que, por sua vez, trabalhou com conjuntos de números, ou seja, seu foco era, assim como outros matemáticos de sua época: resolver problemas relacionados com a incomensurabilidade ou, especificamente, a definição formal de números reais.

A Educação Matemática como campo profissional e de pesquisa que, segundo Fiorentini & Lorenzato (2006), se constituiu por volta dos anos 1920 no Brasil, foi favorecida por ações em torno deste movimento de renovação curricular proposto pela MMM, a partir da formação de grupos de estudos, pelo intercâmbio de educadores, pela tradução e elaboração de LD , assim como pela incorporação de temas relacionados a teoria dos conjuntos no ensino de matemática o que provocou, dificuldades no contexto escolar daquele momento, por enfatizar uma lógica, pouco intuitiva e abstrata. A proposta de modernização do ensino alcançou todos os níveis e estava presente mesmo antes da referida lei, num quadro amplo de valorização das ciências e que pretendeu aproximar a matemática do ensino médio a do superior, a qual já havia incorporado as formulações estruturalistas e da teoria dos conjuntos.

Mesmo com falência deste movimento educacional, a abordagem matemática formal no ensino, fortemente valorizada nesta ocasião, deixou heranças em que se destaca um distanciamento de noções intuitivas. Este é um aspecto importante para o campo educacional que ajuda a evidenciar a direção formal interna à um sistema dedutivo que se incorpora ao ensino da matemática.

Para abordar essa temática, tomaremos como referência as publicações de Cantor com o objetivo de ilustrar e discutir tanto as concepções filosóficas (platônica, formalista e empírica), quanto para evidenciar a cisão entre o intuitivo e formal na elaboração na noção de conjunto. Neste sentido pretendemos, também, evidenciar as limitações da matemática no plano epistemológico, redimensionando-a no plano social, mediante o qual se coloca a pergunta sobre a quem interessa este entendimento de uma matemática verdadeira, absoluta, universal e que está em tudo.

Após essas reflexões, retomaremos, no minicurso, as pesquisas da Educação Matemática no âmbito da filosofia para discutir as especificidades da Filosofia da Educação Matemática a partir de investigações que vêm sendo realizadas por Clareto (2010), Miguel, Vilela e Lanner (2010) entre outras.

2. A noção intuitiva de conjunto de Cantor e seus desdobramentos filosóficos

É mérito de Cantor a introdução da teoria de conjuntos na matemática. Por isso mesmo, é importante esclarecer que ele não teve a intenção de estudar conjuntos e produzir a partir daí algo parecido com o que conhecemos hoje na teoria axiomática de conjuntos, embora muito do que temos na atualidade possa ser visto como um prosseguimento de suas formulações. Quando passou a empregar conjunto em suas formulações, tinha como objetivo introduzir os números transfinitos, que foram concebidos a partir da constatação da existência de conjuntos infinitos comparáveis quando ele tentava resolver problemas relacionados com os números reais. A *análise matemática*, como diz Pollard (1990, p. 33), é inspiração e justificativa, para teoria dos números transfinitos de Cantor.

A partir da caracterização de números reais por Cantor, que será detalhada por ocasião do minicurso que se propõe[1], será enfatizado que a noção de conjunto foi empregada por Cantor, mas o centro de suas investigações era os números. Este matemático emprega conjuntos de números para alcançar os números transfinitos. Somente nas formulações contemporâneas, como a difunda de Zermelo e Frankel, é que a noção de conjunto passa a ser fundamental e anterior à de número,

[1] Partes matemáticas e filosóficas específicas que serão tratadas no minicurso serão apenas mencionadas neste texto e serão abordadas, sobretudo a partir de Vilela (1996).

especificamente, uma noção *primitiva*, isto é, sem definição, num sistema que define números. Além disso, conjunto é uma noção especial, no sentido que não é a mesma do senso comum e que só adquire seu sentido ao longo da teoria quando passa a descrever o que se pode fazer com esses objetos: "A característica central e distintiva [da noção de conjuntos] brota da resposta matemática aos problemas matemáticos" (POLLARD, 1990, p. 39). Cantor associa conjunto a números distanciando, gradualmente, a noção de conjunto do seu sentido mundano e trazendo-o para o interior da matemática mais abstrata.

Estas versões posteriores à de Cantor se estruturaram para resolver alguns dos paradoxos encontrados, entre outros, na teoria de Cantor.

De fato o infinito atual- noção de fronteira da matemática, filosofia, teologia - possui um potencial para paradoxos como os de Zenão, de Galileo, de Russell, assim como a hipótese do continuo, que discutiremos por ocasião do minicurso (ver Vilela, s/d). Pretendemos evidenciar aspectos da teoria de Cantor que geraram problemas do ponto vista axiomático dedutivo, tais como: ele não distinguia conjunto de números e conjunto de conjuntos; inicialmente a noção era imbricada com a do senso comum e cria uma imagem intuitiva que, nas formalizações filosóficas e matemáticas, geram paradoxos.

Sobre a noção ingênua de conjunto de Cantor, também pode ser identificado a possibilidade da confusão entre conjunto na matemática e grupo 'material de objetos' (IMBERT, 1969). Em relação a isso, observamos que para Cantor os elementos de um conjunto podem ser: números, conjunto de números como também, objetos materiais. Vejamos, para ilustrar a ideia de objetos materiais como elementos de conjunto, os exemplos de equivalência apresentados por Cantor:

> O conjunto das cores do arco-íris (vermelho, laranja, amarelo, verde azul, anil, violeta) e o conjunto das notas musicais (dó, ré, mi, fá sol, lá si) são conjuntos equivalentes e ambos sob o conceito geral sete (CANTOR, 1887, p. 412).

Muito pode ser dito sobre a referência a conjuntos concretos, mas, neste momento queremos enfatizar dois aspectos: a noção de abstração, sobre a qual recaiu a critica de Frege que associou este processo ao pressuposto empirista, e o empirismo propriamente. Iniciaremos essa discussão apresentando alguns traços de platonismo, formalismo e o percurso dessa teoria na direção de uma formalização não intuitiva, em que explicações e justificativas pouco a pouco foram abandonadas.

2. 1 Aspectos Platonista-formalista nas definições de Cantor

Os artigos de Cantor de 1883 e a publicação de 1887 reúnem a maior parte da sua discussão filosófica. Por exemplo, as definições de Cantor no artigo de 1883 são entremeadas por justificativas do autor que pretendem ser, segundo ele, o suporte filosófico de sua teoria. O apoio filosófico utilizado por Cantor o ajuda a justificar a definição de número através de conjuntos e o estabelecimento do infinito atual que, ao longo da história da filosofia, encontra muita resistência.

Para ilustrar o que será abordado no minicurso, mencionamos que Cantor concilia duas características principais em sua filosofia: "elementos formalistas", que diz respeito à consistência dos procedimentos construtivos, e "elementos platônicos", que afirmam a existência de entidades matemáticas independentes do conhecimento humano acerca delas:

> A matemática é completamente livre em seu desenvolvimento e limitada apenas pela auto-evidência acerca de seus conceitos que devem, ao mesmo tempo, não ter contradições internas e estar dispostos dentro de relações definidas organizadas pelo significado de definições de conceitos já previamente formados, existentes e provados (CANTOR, 1883, s. 8, p. 79).

Ao empregar os mesmos princípios para definir os números finitos e os transfinitos, e argumentando sobre a consistência desse procedimento que não encontrava contradição no caminho (pelo menos até aquele momento), transparece os "elementos formalistas". O interesse de Cantor é inserir um novo conceito que deve se instalar no meio do conhecimento já admitido. Ele compara diversas vezes os números transfinitos com o irracional apoiando-se ao método de introduzi-los por limite de seqüência. Naquela época já se admitia muitas categorias diferentes de números, como os dos naturais, racionais, inteiros, os transcendentes, os racionais algébricos.

Além disso, a citação evidencia a sugestão da formalização quando esse matemático destaca *'(...)seus conceitos que devem, ao mesmo tempo, não ter contradições internas e estar dispostos dentro de relações definidas organizadas pelo significado de definições de conceitos já previamente formados, existentes e provados'*. Além disso, a formalização remete a idéia de existência que se explicitaquando Cantor acrescenta enfatiza a realidade dos números, que acabariam revelando a existência última deles. Este aspécto platônico do formalismo de Cantor é peculiar nesta filosofia e podem parecer contraditórios se interpretados simplificadamente.

Sem aprofundar a ponto de especificar as propriedades 'do reino matemático', deve ser mencionado que este passa gradualmente a se identificar com intelecto divino[2]. A posição filosófica platônica de Cantor culmina num tipo 'teologia' o que torna sua posição muito complexa diante dos restritos objetivos deste texto. O apelo a Deus inicialmente tímido e obscuro em 1883 acaba se confirmando no tratamento futuro sobre a existência (HALLETT, 1984, p. 20).

2.2 AA noção de abstração e o pressuposto empirista

Seguindo nossa atenção em Cantor para abordar temas filosóficos, ressalta-se que G. Frege (1846-1925) e Cantor trocam correspondências e publicam comentários acadêmicos mútuos, dentre os quais aqui nos interessa mencionar os comentários de Frege sobre os artigos de Cantor em que critica, do que nos interessa destacar, as definições para obter o número cardinal por meio da

2 Sobre isso ver DAUBEN, J. Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite. Journal of the history of ideas, 38: 85-108, 1977.

abstração da ordem e da natureza dos elementos- assim como para obter o número ordinal -definido por abstração da natureza:

> Cantor demanda mais [além da abstração da natureza dos elementos]: para chegar ao número cardinal, nós somos requeridos a abstrair da ordem na qual eles estão. O que pode ser entendido por isso? (FREGE, 1890, p. 70).

O visível sarcasmo e a ironia de Frege ao comentar as teorias de Cantor, assim como, a relação entre abstração e empirismo, serão abordadas no minicurso com o intuito de enfatizar a conexão entre o procedimento da abstração e o empirismo e psicologismo, ressaltamos que Frege compõe os ataques a Cantor retomando os argumentos presentes nos FA contra o empirismo e o psicologismo[3.]

Para justificar a necessidade de encontrar os mais rigorosos fundamentos para a aritmética, e para a matemática em geral, Frege elabora uma crítica de abordagens filosóficas, como o empirismo e psicologismo nas seções 5 a 44 dos *Fundamentos da Aritmética*. Ele nega que os números sejam conceitos ou propriedades dos objetos ou das coisas; ele nega que sejam imagens mentais ou criações psicológicas argumentando contra a ideia de ser *"o número é algo subjetivo"* e, por último, Frege também vai negar que números são conjuntos. Nessa crítica Frege levanta questões básicas da filosofia da matemática como: *'o que é o número um?', 'o que é o número em geral?'* e, questiona as respostas que poderiam ser encontradas nos escritos de filosofia nessa área. Após essa elaboração crítica, que será discutida no minicurso, Frege passa a definir o que é o número em sua perspectiva.

A abstração, usada para obter o número a partir de conjuntos é, para Frege, um exemplo de procedimento empirista-psicologista porque significa 'negligenciar características das coisas'.
Frege apresentou contra-exemplos que refutam a afirmação de ser o número um conceito obtido das coisas através da percepção. Ele quer convencer o leitor de que o número não é um conceito obtido dos objetos. No caso de números muito grandes, por exemplo, eles ficariam, diz Frege, fora do alcance da percepção: "*Onde no mundo estaria o fato observado ou, como Mill também diz, o fato físico assertado na definição do número 777864?"* (FREGE, 1884, §7, p. 208).

Os empiristas poderiam responder a Frege que alguns números são definidos pela percepção e outros pelo acréscimo de 1. Isso Frege contestou dizendo que não haveria critério para determinar que os números pequenos são obtidos pelos sentidos e os maiores através desses outros:

> quais são os números pequenos?Até o 10? Mas se é possível formar o 11 a partir do 10 e do 1, não há razão pela qual não se possa também compor o 2 a partir do 1 e 1 da mesma maneira. (FREGE, 1884, §8, p. 210).

[3] Nos FA, Frege tece duras críticas a essas correntes, que já se alastravam pelas diversas ciências, alcançando até a aritmética, contra a qual Frege triunfaria ao estabelecer seus fundamentos lógicos. Mas nessa crítica, que ocupa pelo menos duas das cinco partes dos FA, não há referência a Cantor, que é abordado diretamente nas seções 85 e 86.

Também para refutar a afirmação de que um número é obtido por impressão sensível a partir dos objetos observados, Frege lembra que números são, também, aplicados às coisas não sensíveis e apresenta a impossibilidade de se ter impressão sensível de coisas não sensíveis, não empíricas (FREGE, 1884, §7, p. 209).

Contra a possibilidade de ser o número propriedade de coleções de objetos ou objetos, Frege esclarece um aspecto crucial. Diz ele que, dependendo do ponto de vista de quem os reconhece, ocorre que a um objeto podem ser atribuídos diversos números, como podemos notar em um dos exemplos apresentados por ele: *'podemos apreender Ilíada como um poema ou como 24 cantos ou como um grande número de versos'* (FREGE, 1884, §22, p. 220*)*. Uma interpretação descuidada poderia admitir que o argumento de Frege que está por trás dessa crítica é que o número não estaria unicamente determinado como propriedade das coisas externas. Mas, de fato, aqui está implícito um argumento fundamental da lógica de Frege, a saber, a impossibilidade de atribuir números às coisas, e com isso Frege caminha em direção a sua tese: o número é atribuído aos conceitos.

2.3 Paradoxos do infinito e desdobramentos na fundamentação da matemática

Alguns dos paradoxos do infinito pressupõem o infinito atual, isto é, o todo, tal como usado por Cantor para definir o número transfinito, ao considerar o 'tamanho' do conjunto dos números naturais, racionais e reais. O infinito potencial, por sua vez, que representa a possibilidade, a potência, de aumentar ou diminuir indefinidamente sem que o todo se complete, resolve alguns dos paradoxos de Zenão, por exemplo, mas não permite enfrentar outras dificuldades causadas pela ideia ou pressuposto do infinito atual. Por exemplo, o paradoxo Galileo que envolve a ideia de que o todo é maior que as partes se resolveu afirmando que esta propriedade só é válida para conjuntos finitos. De fato, ao colocar em correspondência biunívoca o conjunto dos números naturais com uma parte dele - o conjunto dos números pares, chega-se ao impasse.

Estes, entre outros paradoxos que serão abordados no minicurso, têm o infinito atual como pressuposto. O Paradoxo de Russel, que recai particularmente sob a teoria de Frege, pressupõe o conjunto de todos os conjuntos.

Estas dificuldades foram evitadas no interior da matemática por meio de formalizações. As formalizações implicaram também, no caso de Cantor, em abandonar as noções tais como "faculdade ativa do pensamento", "abstração", "natureza" e "intuição". Especificamente, os problemas relativos à noção de infinito reduziram-se à problemas sobre conjuntos (HALLETT, 1984). De fato, a noção de conjunto nas formulações contemporâneas da teoria de conjunto é uma noção primitiva e não guarda vínculo com a ideia de conjunto do senso comum.

Deve ser mencionado que a partir dos paradoxos a matemática e a lógica se desenvolveram muito, gerando versões consistentes da teoria de conjuntos e outras lógicas não clássicas. Entretanto, a tentativa de encontrar fundamentos últimos desta ciência foi formalmente refutada.

Sobre isso destaca-se a demonstração da impossibilidade de garantir a consistência da aritmética pelo teorema da incompletude de Gödel em 1944. Mesmo assim, salienta Guillen (1987), os matemáticos não incorporaram estas incertezas que culminaram com as pesquisas da lógica: eles retêm uma visão pré-godeliana de certeza, verdades e resultados exatos; e os paradoxos são vistos como divertidos e superados.

Do ponto de vista externo à matemática, os paradoxos podem ser evitados num jogo de fórmulas coerentes dentro de sistemas formais e distantes de reflexões filosóficas fundamentais. Para a educação matemática os paradoxos são importantes para desnaturalizar a ideia de verdade absoluta, certeza e superioridade de uma forma de pensamento. Neste sentido, são trazidas a tona por abordagens que vão além das fronteiras da filosofia matemática em favor de abordagens específicas voltadas para a matemática escolar.

3. Abordagens específicas da Filosofia da Educação Matemática

Diferentemente dos matemáticos que permanecem como se não houvesse incertezas, o educador matemático pode se valer disso para pensar por exemplo, dificuldades do ensino. Se num primeiro momento, a educação matemática abordava temáticas sobre como e em que sequência ensinar, atualmente coloca questões para além do interior da matemática e passa a discutir o valor simbólico deste conhecimento, as estratégias de valorização desse saber, a quem interessa esta ênfase no ensino, entre outras questões que fazem diferença no âmbito da educacional.

Diante disso, pretendemos finalizar o minicurso trazendo exemplos de pesquisas que buscam decodificar formas naturalizadas, tal como pensamento lógico propriamente. Especialmente será discutido um artigo de Clareto (2010) que transcreve um "evento observado" em uma sala de aula em que o conteúdo matemático é justamente as noções pouco intuitivas de conjuntos infinitos. A autora interpreta o estranhamento que surge em sala de aula na discussão acerca de seus "tamanhos": Qual é o tamanho do infinito? Qual infinito é maior? Com isso o estudo de Clareto dá visibilidade a uma noção de conhecer e aprender com "escape, fuga do controle" distinguindo-se daquela que se coloca no interior da matemática que preza a disciplina, a repetição e reafirmação de um modo de conhecimento:

> "Conhecer é inventar, abrir possibilidades outras de leituras e de compreensões do mundo, da vida. Inventar não é resolver problemas, criativamente. Inventar é, antes, problematizar: enfrentar o estranho, sem manobras de amenização das diferenças ou de igualação de desiguais, sem re-conhecimentos [...] Então, aprender é inventar sentidos novos e não repetir sentidos já dados (KASTRUP, 2005). Aprender não é reconhecer, mas enfrentar a condição de pertencimento ao mundo, de emaranhamento existencial, relacional com a vida. Aprender é produzir modos de existir no mundo, produzindo o próprio mundo o (CLARETO, 2010, p. 78).

Ao “cartografar” o evento, a autora evidencia “forças em agenciamento no campo” e mostra que resistir é um ato político, um ato de “vida como diferença, multiplicidade e não como repetição do mesmo”.

4. Considerações finais

Os argumentos articulados acima acentuam que a matemática voltou-se para o seu interior axiomático, para si, numa autoreferencia em que não são considerados aspectos intuitivos e do senso comum, distanciando-se explicitamente de relações com o mundo empírico. Ainda assim, a associação entre verdade e matemática permanece naturalizada. Particularmente concepções empiristas e platonistas da matemática, que se mostram filosoficamente fracas, ainda perduram e permeiam práticas escolares que visam reproduzir valores e acentuar a valorização de um modo de específico de fazer matemática.

Se as dificuldades com a introdução de conjuntos resolveram-se dentro da própria matemática, quando as justificativas filosóficas foram abandonadas, por meio de respostas matemáticas aos problemas matemáticos, aos interessados em questões educacionais a própria matemática não é o limite. Ao tomar um caminho formal e distante da intuição, a matemática acadêmica fortalece essa especificidade em relação à matemática escolar o que favorece, também, a ampliação da região de inquérito da educação matemática.

Ressaltamos que este é um olhar lançado de fora ao jogo de linguagem da matemática acadêmica, com um distanciamento necessário para enxergar alcances e limitações, contradições, regras e valores desta prática que podem, deste modo, ser estranhados, desnatualizados, bem como ter crenças evidenciadas, inclusive na lógica. É neste caminho que a presente abordagem se mantém, numa abordagem filosófica da educação matemática. Filosófica porque de aprofundamento, de questionamento e, sobretudo, de estranhamento e admiração. Assim, inserimos este estudo no campo da Filosofia da Educação Matemática.

5. Referências

CLARETO, S. O tamanho do infinito: educação matemática, inventividade e resistência. In: Clareto, S.; Detoni, A.; Paulo, R.. (Org.). *Filosofia, Matemática e Educação Matemática. Filosofia, Matemática e Educação Matemática*. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2010, p. 73-86.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

HALLETT, M. *Cantorian set theory and limitation of size*. Oxford: Oxford University Press, 1984.

MIGUEL, A.; VILELA, D.; LANNER de Moura, A. R. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké,* v. 18, p. 129-206, 2010.

POLLARD, S. *A Philosophical introduction to set theory,* London, University of Notre dame Press, 1990.

VILELA, D. *Análise das críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições*, IFCH/Unicamp, 1996 (Dissertação de Mestrado).