ÁLGEBRA É MAIS DO QUE ALGEBRISMO

Lucia A. de A. Tinoco
Projeto Fundão, IM, UFRJ
luciaatinoco@gmail.com

Gilda Maria Q. Portela
Projeto Fundão, IM, UFRJ
gilda@quiteteportela.com.br

M. Palmira da Costa Silva
Projeto Fundão, IM, UFRJ
mariapalmira@globo.com

Cassius T. Costa Mendes
Licenciando Projeto Fundão, IM, UFRJ
cassiustcmendes@hotmail.com

Lennon Aguilar
Licenciando Projeto Fundão, IM, UFRJ
lennon_021@hotmail.com

Resumo:
O minicurso pretende dar oportunidade a professores de matemática de vivenciar e debater atividades envolvendo aspectos do ensino de álgebra, desenvolvidas em estudo realizado pela equipe do Projeto Fundão no Rio de Janeiro. Essas atividades, testadas em sala de aula, propiciam um fazer matemática de forma significativa e reflexiva, por parte dos alunos, possibilitando tornar o ensino de álgebra na escola básica um instrumento para a valorização do raciocínio dos mesmos e buscando prepará-los para pensar matematicamente em situações diversas. Elas se contrapõem assim ao ensino mecanizado de álgebra, com ênfase em regras e procedimentos, sem preocupação com a compreensão por parte dos alunos. Por meio dessas atividades, serão exploradas primeiramente noções relativas à transição entre aritmética e álgebra, como o sinal de igualdade e a propriedade distributiva. Seguem-se atividades envolvendo aspectos do simbolismo e linguagem algébricos e de observação e generalização de regularidades.

Palavras-chave: Aprendizagem significativa; simbologia algébrica; pensamento algébrico.

1. Introdução

O ensino de álgebra na escola básica é, sem dúvida, um desafio para o professor. É certo que, numa escola que busca o fazer matemática de forma significativa e reflexiva, não cabe um trabalho em que o ensino de álgebra se caracteriza fundamentalmente por procedimentos de manipulação de símbolos sem qualquer significado, ou em aplicações artificiais sem conexão com a realidade. Espera-se um ensino que valorize o desenvolvimento do raciocínio do aluno, buscando prepará-lo para pensar matematicamente em situações diversas.

O pensamento algébrico é amplo em possibilidades, envolvendo desde a generalização de padrões aritméticos e geométricos mais simples até a formalização de conceitos mais complexos como a expressão de funções, nas suas diversas formas de representação. Tais vertentes do pensamento algébrico são essenciais à formação de um indivíduo pensante e autônomo. De fato, é difícil identificar uma área da matemática ou de outros campos de conhecimento que não exija a capacidade de expressar relações, generalizar modelos, resolver equações ou de, simplesmente, manipular com autonomia e propriedade símbolos matemáticos.

Essa importância da álgebra não vem sendo reconhecida pelos alunos e professores em geral, que chegam a se perguntar por que dedicar tanto tempo ao ensino desse tópico na escola básica.

Foi então realizado pelo grupo de álgebra do Projeto Fundão estudo cujos objetivos incluíam incentivar a reflexão dos professores deste nível escolar sobre os prejuízos de um ensino mecanizado da álgebra e oferecer a esses professores subsídios para realizar um ensino significativo desse tópico.

Havia no grupo a convicção de que esses dois objetivos teriam que ser atingidos conjuntamente, ou seja, não seria conveniente mostrar os prejuízos de um ensino mecanizado de álgebra, sem fornecer subsídios para a mudança da prática pedagógica em relação a esse assunto. Por outro lado, os professores não teriam porque aderir às propostas oferecidas, visando à aprendizagem significativa de álgebra, se não vivenciassem um processo de reflexão a respeito dos efeitos do ensino mecanicista desse tópico.

Do mesmo modo este minicurso, como produto do referido estudo, tem como objetivo propor atividades que permitam ao professor refletir sobre a prática pedagógica no ensino de álgebra, perceber a diversidade de suas possibilidades e experimentar novas abordagens do tema, sendo assim estimulado a realizar um ensino significativo do mesmo.

Elegemos para a reflexão aqui proposta quatro aspectos da álgebra presentes no trabalho em nível fundamental e que, entendemos, são particularmente importantes. Iniciamos com um assunto aparentemente simples, que muitas vezes escapa à nossa reflexão, mas presente em todos os campos da matemática e amplo em significado: a igualdade. Ainda nessa primeira parte, dedicada à transição entre a aritmética e a álgebra, exploraremos a compreensão, em geral ausente em sala de aula, da propriedade distributiva da multiplicação e da divisão em relação à adição e à subtração. Para a segunda parte do trabalho, apresentamos atividades que enfocam simbologia e linguagem algébrica, buscando caminhos para que os alunos atribuam sentido a essa linguagem. Finalizamos propondo atividades que abordam a álgebra na generalização de fenômenos que apresentam regularidade, indicando mais uma vez formas de possibilitar aos alunos leitura e escrita de expressões algébricas e equações, com compreensão.

Essas atividades permitirão um contato com aspectos considerados essenciais no ensino de álgebra em nível elementar pelo Grupo de Álgebra do Projeto Fundão/Matemática, na conclusão do trabalho de pesquisa mencionado anteriormente (Tinoco, 2011, p. 5).

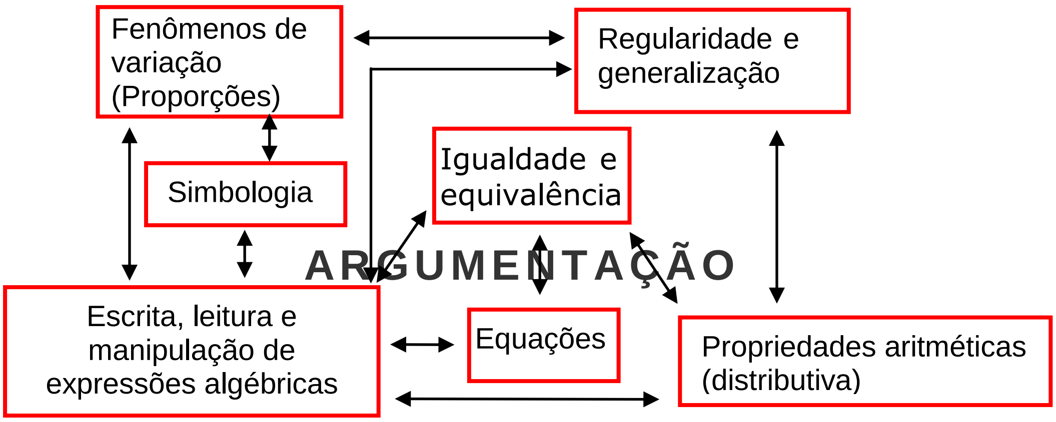


Figura 1. Aspectos Essenciais no Ensino de Álgebra

A maior parte das atividades aqui propostas foi então adaptada a partir das que compõem o livro ***Algebra: Pensar, calcular, comunicar, ...***, fruto do referido trabalho e cuja qualidade vem sendo reconhecida e respeitada em diversos ambientes da comunidade dos professores de matemática.

2. A Igualdade na Matemática

Nesta parte será explorado o **sinal de igualdade**, elemento fundamental na matemática. A esse respeito, Walle (2007) afirma: *"O sinal de igual é o mais importante* *sinal na aritmética elementar, na Álgebra e em toda matemática, usando números e operações".* (p. 260)

É muito comum que alunos, induzidos pela experiência com aritmética, percebam o sinal de igualdade de forma restrita, como um símbolo de sentido unilateral, que exige que "*se escreva do lado direito a resposta ao que está sendo solicitado do lado esquerdo".* Perceber a igualdade como a indicação de uma equivalência é fundamental para o aprendizado da álgebra, como ilustra o exemplo.

No ensino dos produtos notáveis, diz-se ao aluno que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e este pensa que $a^2 + 2ab + b^2$ é o resultado de $(a + b)^2$. Então, quando lhe é ensinado, na fatoração, que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, é natural que esse mesmo aluno se pergunte: afinal o que é resultado de quê?

Essa visão limitada do sinal de igualdade é uma das falsas noções herdadas da aritmética, consequência da falta de ênfase dada nos primeiros anos escolares a identidades numéricas. De fato, no estudo da aritmética, são poucas as ocasiões nas quais o aluno se depara com identidades como 4 + 5 = 8 + 1, 120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5, ou 45 = 5 + 8 x 5.

3. A Propriedade Distributiva

Muito da sintaxe que rege os procedimentos algébricos provém de propriedades importantes das operações aritméticas, entre elas a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Na aritmética, essa propriedade é muito usada na realização de cálculos mentais e, principalmente, no algoritmo da multiplicação. Ela abrange equivalências entre expressões numéricas que permitem a observação e a conclusão de fatos importantes. Por exemplo, possibilitar a um aluno concluir que 3a + 3 é múltiplo de 3. A familiarização com essa propriedade é também um caminho para que o aluno passe a admitir a igualdade no sentido de equivalência. As respostas à questão seguinte (Quadro 1), aplicada a alunos do Ensino Fundamental e Médio pela equipe do Projeto Fundão, sugere que tal familiarização não existe de fato.

Quadro 1. Exemplo de questão sobre a Propriedade Distributiva

A área do *retângulo ABCD pode* ser calculada por meio dessas duas expressões:

2 x 3 + 2 x 4 ou 2 x (3 + 4).

O resultado das expressões será o mesmo? Por que?

Nenhum desses alunos citou a propriedade em suas respostas. Os poucos que responderam à pergunta "*O resultado das expressões será o mesmo? Por quê?*" se referiram ao fato de que ambas representam a área da mesma figura. Quando o professor perguntou que propriedade estava envolvida nessa igualdade, a única resposta obtida foi incorreta: "*A ordem dos fatores não altera o produto*".

Isto indica que a contextualização da propriedade distributiva em situações reais ilustra bem essa propriedade, mas não leva o aluno a sistematizá-la do ponto de vista numérico nem simbólico, o que precisa ser feito pelo professor.

4. Simbologia e Linguagem Algébrica

A importância do uso da linguagem simbólica como meio de comunicação de idéias torna o desenvolvimento da habilidade desse uso, com compreensão, um objetivo essencial do ensino de álgebra. Neste processo, vale salientar aspectos importantes observados por Arcavi (1995), ao caracterizar o sentido do símbolo, que resumimos a seguir.

- Compreensão e sensibilidade sobre o poder dos símbolos, quando e como podem e devem ser usados; quando estes devem ser abandonados em favor de outras abordagens.

- Habilidade de manipular mecanicamente as expressões simbólicas, acoplada à de leitura compreensiva dessas expressões, estabelecendo conexões e verificando a razoabilidade de resultados.

- Habilidade de selecionar e construir representações simbólicas para problemas e a coragem de procurar expressões melhores para substituí-las.

- Percepção da necessidade de verificar os significados dos símbolos e de confrontá-los, ao resolver um problema.

- Consciência dos diferentes papéis que os símbolos podem assumir em diferentes contextos.

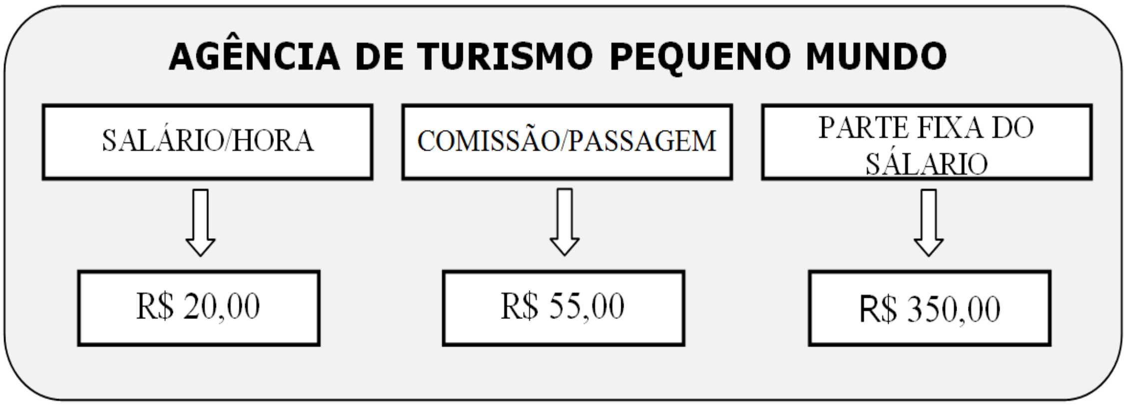
Entretanto, quando se inicia o ensino de álgebra no Ensino Fundamental, há, em geral, uma imposição rápida e precoce do uso de símbolos, desprezando-se, de repente, quase totalmente o uso da linguagem corrente. Este fato contradiz a evolução histórica da própria matemática, constituindo talvez, uma das principais causas das dificuldades dos alunos desse nível na compreensão da simbologia algébrica.

O grupo observou muitas vezes, entre os alunos iniciantes no estudo da álgebra, dificuldade até em admitir que números podem ser representados por símbolos. Mesmo estudantes que dominam as técnicas algébricas, frequentemente, não compreendem tais técnicas e pouco conseguem concluir e/ou comunicar por meio das expressões simbólicas.

Observamos também que, em geral, os alunos são pouco solicitados a escrever expressões algébricas, o que também faz parte da presente proposta; as expressões lhes são apresentadas para que as resolvam, fatorem, simplifiquem etc. A atividade a seguir exemplifica uma possibilidade de trabalho neste sentido.

Exemplo:

A agência de turismo Pequeno Mundo deixa claro como compõe o salário que paga a seus funcionários, como indica o quadro abaixo.



Responda às perguntas a seguir.

a) João, empregado dessa agência, trabalhou 80 horas e vendeu 22 bilhetes aéreos durante o mês de julho. Que total João recebeu como pagamento por esse mês?

b) Num certo mês, Marcus trabalhou 50 horas e Leo trabalhou 30 horas. Pode-se afirmar que, no final desse mês, Marcus recebeu como pagamento um valor maior do que o recebido por Leo?

c) Escreva uma expressão matemática que represente o salário total de um funcionário que trabalhe um total de *h* horas e venda *p* passagens.

d) Sabendo que, no último mês, Ana trabalhou 100 horas e recebeu R$ 3 450,00 de salário, indique uma expressão matemática que determine a quantidade de passagens aéreas vendidas por Ana.

Outro aspecto ressaltado por pesquisadores, que enfatizamos, é que a iniciativa de recorrer às letras para iniciar um raciocínio, ou expressá-lo, não se dá espontaneamente pelo estudante. Não é um fenômeno natural. Deve ser ensinado e estimulado, como parte da construção do conceito de variável. Para tal, podem ser aproveitadas atividades exploradas no estudo de proporções, geometria e outros tópicos.

5. Regularidade e Generalização

Pensar algebricamente é lidar com idéias, processos, resultados, leis gerais. A linguagem algébrica busca expressar o que é genérico. Exprime relações entre objetos, independentemente da natureza dos mesmos.

O desenvolvimento da capacidade de generalizar situações que apresentam regularidade deve ser estimulado nos alunos e exige, em geral, abstração. Para isso, e, a partir disso, é necessário que o aluno desenvolva também a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente e justificar a validade da lei para quaisquer casos.

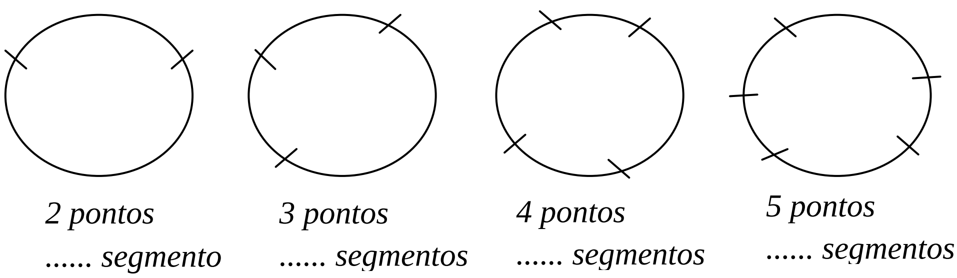
Encontram-se frequentemente, principalmente em níveis elementares, alunos que generalizam fatos verificando apenas a sua validade para casos particulares. É, portanto, necessário que tais alunos explorem situações que lhes permitam concluir que isso não é suficiente e os ajudem a desenvolver um pensamento genérico. Neste sentido também é adequado o trabalho com situações que não apresentem regularidade.

O exemplo a seguir apresenta regularidade e envolve aspectos geométricos.

Exemplo:

Nas circunferências da figura abaixo estão marcados pontos arbitrários.

a) Determine o número de segmentos que podem ser traçados em cada circunferência, ligando esses pontos dois a dois.



b) Escreva uma expressão que dá o número de segmentos formados para um número n qualquer de pontos marcados sobre a circunferência.

c) A expressão que você escreveu serviria para determinar os números pedidos no item a? Justifique.

d) Observando as figuras formadas, que significados geométricos podem ter esses segmentos?

O registro e a compreensão de leis gerais em linguagem corrente, aritmética, algébrica, geométrica e outras são passos decisivos para que os alunos dêem significado às expressões algébricas, familiarizando-se com este tipo de linguagem e desenvolvendo este tipo de pensamento. Segundo Ponte (2005): *"...]uma das vias privilegiadas para promover o pensamento algébrico é o estudo de padrões e regularidades."* (p. 37).

6. Considerações Finais

No minicurso serão discutidas atividades relacionadas aos aspectos apresentados no texto, incluindo as dos exemplos, à luz dos resultados da sua testagem em sala de aula da escola básica. A intenção, ao incluí-las na proposta, não é de oferecer formas fechadas de ensinar álgebra, mas sim, de dar oportunidade aos participantes de refletir sobre caminhos possíveis para um ensino desse tópico que contribua na formação de alunos pensantes e autônomos. O resgate do saber profissional dos professores nas discussões certamente tornará possível a eles enriquecer as ideias expostas e incentivará o grupo a buscar novos conhecimentos.

7. Referências

ARCAVI, Abraham - O sentido do símbolo, atribuindo um sentido informal à matemática formal, em: **Série Reflexões em Educação Matemática – Álgebra, História, Representação,** Rio de Janeiro, MEM/USU, 1995, p. 38-72.

PONTE, J. P. – Álgebra no currículo escolar. Revista **Educação e Matemática**, Lisboa, nº 85, p. 36-41, APM, 2005.

TINOCO, L. A. de A.(Coord.) – **Álgebra: pensar, calcular, comunicar,...**, Rio de Janeiro, IM/UFRJ, 2ª Ed., 2011.

WALLE, J. A. V. – **Elementary and middle school mathematics**, USA, Library of Congress Cataloging-in-publication data, 6ª ed., 2007.