

ENSINO DE ÁLGEBRA – EXPERIÊNCIA DE REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA

Lucia A. de A. Tinoco
Projeto Fundão, IM, UFRJ
luciaatinoco@gmail.com

Gilda Maria Q. Portela
Projeto Fundão, IM, UFRJ
gilda@quiteteportela.com.br

M. Palmira da Costa Silva
Projeto Fundão, IM, UFRJ
mariapalmira@globocom.com

Cassius T. Costa Mendes
Licenciando Projeto Fundão, IM, UFRJ
cassiustcmendes@hotmail.com

Lennon Aguilar
Licenciando Projeto Fundão, IM, UFRJ
lennon_021@hotmail.com

Resumo:

Um grupo da equipe do Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro realizou estudo sobre o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico por alunos da Escola Básica, com resultados publicados em livro e divulgados na comunidade de professores de matemática, com grande aceitação. Este fato motivou o grupo a realizar experiência de curso semipresencial sobre ensino de álgebra para professores e futuros professores do Estado do Rio de Janeiro, relatado neste texto. Essa experiência de reflexão coletiva foi fonte de ideias que enriqueceram o conhecimento dos participantes e da equipe responsável, fato esse que foi motivo de grande satisfação. O texto apresenta: a metodologia adotada no curso, com destaque para o uso da Plataforma Moodle, ideias envolvidas nas discussões realizadas, bem como exemplos de atividades, considerações e fatos observáveis, que podem incentivar novas práticas no sentido de minimizar tantos problemas existentes em relação ao ensino de álgebra.

Palavras-chave: Álgebra; Aprendizagem; Formação de professores; Curso semipresencial

1. Introdução - Motivação e Orientação Teórica do Curso

A equipe do Projeto Fundão, que atua no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, é formada de professores universitários, professores da rede básica e alunos de Licenciatura desse Instituto. Ela se divide em grupos temáticos que, em trabalho permanente, pesquisam e produzem subsídios para a melhoria da prática pedagógica de professores de matemática.

Em um de seus grupos havia experientes professores de nível básico, preocupados com o contraste entre o baixo índice de aprendizagem em álgebra dos alunos desse nível de ensino e o tempo dedicado a esse tópico na escola, e com o desinteresse dos alunos em relação ao assunto. Tais problemas foram observados na experiência desses professores, em sala de aula, e junto a participantes de ações de formação continuada do Projeto, sendo o baixo índice de aprendizagem, também, apontado nos resultados de avaliações institucionais em geral. Esta insatisfação foi decisiva para que o grupo realizasse estudo sobre aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico por alunos da escola básica.

O grupo dedicou-se então a investigar, criar, adaptar e testar atividades e estratégias para incentivar a reflexão de professores em relação aos prejuízos de um ensino mecanizado da álgebra e sugerir caminhos para um ensino significativo desse tópico. Os resultados desse trabalho foram publicados no livro *Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar...* (Tinoco, 2008), pelo Instituto de Matemática da UFRJ, e constituem apoio para que professores, em sala de aula, propiciem a seus alunos uma aprendizagem significativa da álgebra.

Ao referir-se a aprendizagem significativa, o grupo adota o que propõe Moreira (2000), quando afirma que este tipo de aprendizagem tem por base a ligação entre o conhecimento novo e o construído previamente pelo aprendiz. Por meio dessa ligação, o novo conhecimento “*fica mais rico, mais diferenciado, mais elaborado em termos de significados, e adquire mais estabilidade*” (Moreira, 2000, p. 4). O mesmo autor contrapõe a aprendizagem significativa à mecânica. “*Esse tipo de aprendizagem, bastante estimulado na escola, serve para ‘passar’ nas avaliações, mas tem pouca retenção, não requer compreensão e não dá conta de situações novas.*” (Moreira, 2000, p.5)

Os resultados do referido estudo foram muito bem aceitos por professores e futuros professores de matemática com quem o grupo os compartilhou. Esse fato e o desejo de

contribuir mais para a alteração do quadro descrito anteriormente levaram à realização de um curso sobre ensino de álgebra com o mesmo título do livro. Foram realizadas duas edições desse curso, em caráter semipresencial, nos primeiros semestres de 2010 e 2011, no Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da UFRJ, com 73 cursistas em cada edição.

O trabalho desse grupo, como ocorre em geral nas ações do Projeto Fundão, teve caráter colaborativo, segundo o qual cada um dos seus membros tem a possibilidade de opinar e decidir, propiciando crescimento significativo de todos e tornando possível vencer os desafios em conjunto.

A colaboração não é um fim em si mesma mas sim um meio para atingir certos objectivos. [...] o simples facto de diversas pessoas trabalharem em conjunto não significa que se esteja, necessariamente, perante uma situação de colaboração. Na nossa perspectiva, a utilização do termo colaboração é adequada nos casos em que os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objectivos que a todos beneficiem. (Ponte e Boavida, 2002, p. 45)

2. Objetivos, Metodologia e Temas do Curso - *Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar...*

O objetivo do curso foi o de provocar discussão e reflexão de professores sobre as ideias exploradas e desenvolvidas por meio do trabalho realizado até então.

O caráter semipresencial do curso visou a atender as condições de tempo e possibilidade de deslocamento dos professores. Ele foi então desenvolvido em quatro módulos, explorados em seis encontros presenciais, em manhãs de sábados, e em atividades à distância, realizadas nos intervalos de aproximadamente um mês, entre cada um deles.

Foram definidos quatro temas: relação aritmética-álgebra; generalização; variação de grandezas e equações. Dentre os aspectos referentes à relação aritmética-álgebra, foi dada ênfase ao sinal de igualdade e à propriedade distributiva da multiplicação e divisão em relação à adição e à subtração. Cada tema foi trabalhado ao longo de um período abrangendo dois encontros consecutivos e o intervalo entre eles, da forma descrita a seguir.

Os cursistas eram divididos em salas, cada uma sob a orientação de uma dupla da equipe, para, em grupos, discutir atividades especialmente preparadas para iniciar a discussão do tema. Essa discussão continuava, via Plataforma Moodle, por meio da realização de outras atividades. Uma sistematização do tema era feita no encontro seguinte, por meio de exposição plenária, destacando os aspectos mais importantes e os que tinham gerado dúvidas entre os cursistas. Assim, cada assunto foi abordado por meio de atividades presenciais e à distância, o que permitiu manter um nível permanente de reflexão no curso.

Para o trabalho à distância, atividades experimentadas anteriormente em sala de aula com alunos de nível básico eram adaptadas e propostas aos cursistas, incentivando-os a refletir sobre a sua prática. Para isso, os enunciados das atividades eram seguidos de questões voltadas ao professor, e apenas o envio das respostas a tais questões era exigido deles. Outras tarefas exigiam dos cursistas relacionar trechos de artigos com a sala de aula, analisar erros de alunos, opinar sobre adequação das atividades para diferentes níveis escolares, reconhecer seus objetivos, etc.

O grupo se dividiu em duplas, cada uma responsável por cerca de vinte cursistas, para analisar, comentar e resumir as suas respostas e sanar possíveis dúvidas, a qualquer momento. A apreciação das respostas, elaborada a partir desses resumos, era divulgada na Plataforma. O espírito da análise e da apreciação não era o de assinalar o acerto ou o erro, ou mesmo de fornecer respostas fechadas, e, sim, de tornar possível a todos o acesso às ideias expostas, contrapondo-as entre si e, por vezes, comparando-as com conteúdos sistematizados da área da educação matemática. Em todas essas etapas havia prazos bem definidos, para os cursistas e para o grupo, em cujo cumprimento a utilização da Plataforma Moodle facilitou em muito. Os recursos da Plataforma utilizados pelos cursistas foram: envio de arquivo, questionários e fóruns.

3. Exemplos de Atividades

São apresentados a seguir quatro exemplos de atividades desenvolvidas.

1. A Loja R\$ 1,99 –

Esta atividade foi realizada presencialmente, e sua discussão priorizou as questões depois do enunciado, que envolviam a importância do ensino da propriedade distributiva em situações do cotidiano do aluno e seu papel no desenvolvimento do cálculo mental. Por meio dessas questões os professores tinham a oportunidade de se colocar no lugar de seus

alunos e compreender suas dificuldades, que provocam sérios problemas na aprendizagem da álgebra.

Enunciado – *O professor Cláudio foi comprar marcador de quadro branco numa loja de R\$ 1,99.*

Os marcadores estavam em promoção: R\$1,99 cada, e Cláudio decidiu comprar 5.

Na hora de pagar, o rapaz da caixa fez as contas de ‘cabeça’ e disse:

“são dez reais menos cinco centavos”.

a) Está correta a conta feita pelo rapaz?

b) Por que $5 \times 1,99$ é igual a $10 - 0,05$? Explique sem efetuar as contas.

Questões:

i) Como os alunos em geral poderiam explicar o item (b)?

ii) Essa atividade pode ajudar a desenvolver a habilidade de cálculo mental? Por quê?

Essa atividade foi vivenciada em encontro presencial, nos quais as questões eram apenas discutidas, sem exigência de apresentação por escrito.

2. Reconhecendo as dimensões da álgebra –

A atividade abaixo foi proposta após a leitura pelos cursistas de um texto, disponibilizado na Plataforma, sobre as dimensões da álgebra, de acordo com o proposto por Usiskin (1994). Para o enunciado e as respostas foi usado o recurso “envio de arquivo”, da Plataforma. Essa atividade provocou bastante dificuldade entre os participantes, uma vez que, embora adotada nos PCN (Brasil, 1998), a existência dessas dimensões era desconhecida pela grande maioria. Também as ideias de que a divisão entre elas não é rígida, de que em uma mesma atividade, mais de uma dimensão pode estar envolvida e de que é importante integrá-las ao longo do ensino da álgebra elementar não eram familiares aos cursistas.

Enunciado - *a) Selecione, em um livro didático, uma atividade que contemple o pensamento algébrico e reproduza-a no espaço abaixo.*

b) Indique a referência do livro do qual a atividade foi selecionada.

c) Indique a concepção da álgebra mais evidente na proposição ou no processo de solução da atividade selecionada, justificando.

Segue exemplo de resposta que ilustra a dificuldade mencionada.

O preço de uma corrida de taxi inclui uma parte fixa (bandeirada) mais um valor variável que depende do número de quilômetros rodados.

Numa cidade, a bandeirada custa R\$ 5,20 e o quilômetro rodado custa R\$ 0,68.

a) Indicando por x o quilômetro rodado e por y o preço a pagar, determine a função

$$y = f(x).$$

b) Calcule a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 8,26.

c) Determine o preço a pagar por uma corrida de 7,5 km.

Concepção indicada - *Álgebra Funcional*

Justificativa - *O valor da corrida está em função da quilometragem que é gasta.*

No item a) do exemplo, a Álgebra Funcional é de fato a dimensão que mais se destaca, embora faltem na questão questionamentos que explorem o papel das letras envolvidas como variáveis e a forma como elas se relacionam. Observe-se também que a dimensão Generalizadora da Aritmética da álgebra permite traduzir o enunciado algebricamente, e que o item b) envolve a Álgebra das Equações. Pode-se também considerar o item c) como um simples cálculo de valor numérico, associado à Álgebra Estrutural.

3. Avaliação de Resoluções de um Problema -

Nesta atividade, a leitura de um texto (em arquivo na Plataforma) propiciava aos cursistas a reflexão sobre o uso das equações como ferramenta de resolução de problemas. Por tratar-se de questão sobre avaliação de respostas de alunos, provocou bastante a discussão entre os cursistas, via fórum. Procurou-se com essa proposta verificar se eles reconheciam estratégias de solução sem o uso da simbologia algébrica como válidas e até que ponto valorizavam demais os cálculos algébricos.

Enunciado –

a) Leia o texto: Resolução de Problemas: nem sempre as Equações são Necessárias (texto disponibilizado na Plataforma).

b) Considere agora o problema a seguir e as três soluções dadas a ele por alunos que já estudaram álgebra. Que nota, entre 0 e 10, você daria a cada solução? Por quê?

Problema

A mãe acordou cedo para trabalhar e deixou um dinheiro sobre a mesa com um bilhete para seus três filhos: “Dividam igualmente entre vocês.”

André é o primeiro a ver o bilhete, mas acha que Paulo já passou, pega o que acha que é seu e sai. Paulo, que é o segundo a ver o recado, acha que é o primeiro, pega o que julga ser seu e sai. João é o último, mas acha que é o segundo, pega sua parte e deixa R\$ 15,00 na mesa. Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou? Quanto a mãe deixou? Quanto cada um pegou?

Figura 1 – Soluções a serem analisadas

<p>a) Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou?</p> <p>André: $\frac{1}{2}x$ Paulo: $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{6}x$ Bruno: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}x$</p> <p>b) Que quantia a mãe deixou?</p> <p>$60 = \text{André} + \text{Paulo}$ $60 + 30 = 90$ ↳ Bruno</p> <p>c) Quanto de dinheiro cada um pegou?</p> <p>André: 45,00 Paulo: 15,00 Bruno: 15,00</p> <p>$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x = x$ $\frac{6x + 2x + 3x}{12} = \frac{9x}{12} = \frac{3x}{4} = x$ $3x = 4x$ $-3x = -180$ $x = 180$ $60 = \text{André} + \text{Paulo}$ $60 = 45 + 15$</p>	<p>Perguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou? 2. Quanto a mãe deixou? 90 reais 3. Quanto cada um pegou? <p>X = quantia da mãe</p> <p>André: $\frac{1}{2}x$ Paulo: $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x)$ Bruno: $\frac{1}{2}(\frac{30}{2} = 15)$ André = 45 Paulo = $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$ Bruno = 15</p> <p>$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x) + 15 + 15 = x$ $\frac{1x}{2} + \frac{1x}{6} + 15 + 15 = x$ $\frac{3x + 1x + 90 + 90}{6} = \frac{6x}{6}$ $490 + 90 = 6x - 3x - 1x$ $180 = 2x$ $\frac{180}{2} = x$ $90 = x$</p>
---	---

Caroline

Vitória

<p>a) Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou?</p> <p>André pegou $\frac{1}{2}$ Paulo pegou $\frac{1}{3}$ João pegou $\frac{1}{2}$ do resto</p> <p>André Paulo João</p>
<p>b) Que quantia a mãe deixou?</p> <p>A mãe deixou R\$ 90,00</p>
<p>c) Quanto de dinheiro cada um pegou?</p> <p>André pegou R\$ 45,00 Paulo pegou R\$ 15,00 João pegou R\$ 15,00 e sobrou R\$ 45,00</p>

Gabriel

4. Análise de Procedimento –

A atividade a seguir foi realizada por “resposta a questionário”, via Plataforma. O tipo de erro cometido pelo Carlos é muito frequente em sala de aula. O questionário visava à observação desse fato e à reflexão sobre suas causas.

Enunciado

Explique a seguinte solução da equação $x^2 + x = 1$, dada por Carlos:

$$x(x + 1) = 1$$

$$x = 1 \text{ ou } x + 1 = 1. \text{ Resposta: } x = 1 \text{ ou } x = 0.$$

Questionário

- a) *Você concorda com a solução dada por Carlos? Por quê?*
- b) *Afirma-se que o ensino mecanizado de resolução de equações pode conduzir os alunos a procederem como no exemplo apresentado.*
 - *Você concorda com isso? Por quê?*
 - *Você já observou procedimentos similares em sala de aula? Se possível, dê um exemplo.*

Exemplos de respostas.

Item a)

“Para a solução dar certo é preciso fazer a multiplicação ser igual a 0, só assim poderemos igualar os fatores” foi a resposta mais encontrada, embora peque em clareza.

Ela indica que o seu autor tem consciência de que Carlos usou um procedimento que só vale para produto nulo, em um caso em que o produto é 1.

Item b)

Como causa do erro do Carlos, sete alunos de um grupo de dezoito apontaram a mecanização sem compreensão como origem de erros, afirmando:

“O aluno acaba mecanizando o método, e não entendendo o mesmo”.

4. Considerações Finais

Como um dos principais resultados deste trabalho, destaca-se o crescimento da equipe, do ponto de vista do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Shulman, 1986), ao aprofundar e reformular, ao longo de todo o curso, suas noções e crenças sobre o ensino de álgebra. Esse crescimento deu-se nos processos de escolha e reformulação das atividades e elaboração das questões a serem propostas aos cursistas e de análise e elaboração da apreciação das respostas dos mesmos, a ser disponibilizada a todos na Plataforma. Em geral, o uso da Plataforma Moodle possibilitou aprendizado constante para a equipe, ao longo do curso.

Em relação aos cursistas algumas observações se destacaram.

- A pouca participação dos cursistas nos primeiros fóruns e o pedido dos mesmos para que houvesse mais encontros presenciais indicam sua falta de familiaridade com o estudo à distância. A escolha pela maioria dos cursistas de atividades realizadas presencialmente como adequadas para aplicação em sala de aula é mais um indício do afirmado. Mesmo assim, a participação desses professores por meio da Plataforma foi intensa, contrariando a suspeita inicial de que as dificuldades dos mesmos com esse ambiente poderiam contribuir negativamente para o seu desempenho.
- O seguinte exemplo de resposta à pergunta “*Indique aspectos sobre os quais a realização do Curso tenha propiciado reflexão. Justifique*”, encontrada na avaliação final do curso, ilustra a percepção da equipe em relação ao clima de reflexão pretendido. Exemplo. “*A existência de um pensamento algébrico que deve ser desenvolvido antes de uma formalização e perceber que fazer pensar é um dos objetivos da Álgebra*”.
- Em relação ao conteúdo, a valorização da dimensão funcional da álgebra (Usiskin, 1994) e a importância de um ensino de álgebra integrando as suas quatro dimensões propostas por esse autor provocaram interesse dos cursistas. Inicialmente poucos deles indicaram tópicos como variação de grandezas, sequências e generalização como essenciais no ensino em nível fundamental. No entanto, a maioria das atividades citadas na avaliação final como adequadas para aplicação em sala de aula envolvia esses tópicos, com destaque para a generalização.
- A satisfação dos cursistas com o curso como um todo pode ser constatada em manifestações espontâneas de muitos deles, na avaliação final, como a que se segue.

“Todo o curso teve aspectos positivos, principalmente as reflexões que o curso nos propõe, o conhecimento que nos oferece, enriquece e nos faz chegar mais próximos de um bom professor, aquele que seu aluno realmente aprende. Não vejo aspectos negativos”.

Em conclusão, o grupo destaca a grande contribuição dessa experiência para o seu desenvolvimento profissional e dos cursistas. Espera também incentivar, com este relato, o surgimento de outras ações que promovam tal desenvolvimento por parte de outros professores de matemática, propiciando a renovação da sua prática pedagógica e a consequente mudança no quadro do ensino de álgebra.

5. Referências

- Boavida, Ana. M. e Ponte, João P. (2002). Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. Em: GTI (Org.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (p. 43-55), Lisboa, APM.
- Moreira, Marco A. (2000). Aprendizagem significativa crítica. Versão revisada e estendida de Aprendizagem significativa subversiva. Em: *Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa*, 33-45, Lisboa.
- Shulman, Lee S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Em: *Educational Researcher*, v. 15, nº 2, p. 4-14.
- Tinoco, Lucia A. A.(coord.) (2011). *Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar,....2ª Ed.*, Rio de Janeiro, Projeto Fundação, Ed. IM/UFRJ.
- Usiskin, Zulman (1994). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em A. F. Coxford, e A. P. Shulte (org.) - *As Idéias da Álgebra*, p. 09-22, São Paulo, Ed. Atual.