

COMO OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA RESOLVEM QUESTÕES FINANCEIRAS?

Lilian Nasser

Projeto Fundão – IM/UFRJ

lnasser@im.ufrj.br

Geneci Alves de Sousa

Projeto Fundão – IM/UFRJ, CETIQT SENAI, UNIABEU, SME-Rio, SEDUC-RJ

prof.geneci@yahoo.com.br

Marcelo André A. Torraca

Projeto Fundão – IM/UFRJ, CETIQT /SENAI, UVA, SEDUC-RJ

torraca@gmail.com

Katharyne A. Caiaffa,

Curso de Licenciatura IM/UFRJ

pfundao@im.ufrj.br

Letícia A. Gomes

Curso de Licenciatura IM/UFRJ

pfundao@im.ufrj.br

Resumo:

A introdução ao estudo da Matemática Financeira é importante na Escola Básica para desenvolver no aluno a habilidade de analisar criticamente as situações financeiras que se apresentam no seu dia-a-dia. No entanto, isso só é possível se o tema for abordado de modo eficaz, levando o aluno a resolver situações financeiras reais. Neste trabalho, analisamos respostas de professores a uma situação financeira cuja resolução não é imediata a partir da aplicação de fórmulas. Por outro lado, mostramos que a representação gráfica usando um eixo com setas facilita a escolha de uma estratégia para a resolução do problema, que não é única. Adotando esse tipo de abordagem, é possível despertar no aluno o interesse pela Matemática Financeira. Capacitando os professores, a Escola pode preparar o futuro cidadão para tomar decisões sobre a maneira mais vantajosa de efetuar seus pagamentos e analisar situações financeiras do seu cotidiano.

Palavras-chave: Matemática Financeira; formação de professores, visualização; eixo das setas.

1. Introdução

Com as novas tendências do mercado econômico e a variedade de ofertas anunciadas pela mídia, a Matemática Financeira é, provavelmente, o ramo mais motivador da grade curricular de Matemática da Escola Básica, talvez por sua aplicação direta no cotidiano tanto de alunos como de professores. Afinal, todos pagam impostos e fazem

compras, sujeitas a diversas formas de pagamento. A decisão sobre a melhor maneira de efetuar um pagamento, à vista ou a prazo, depende de algumas variáveis, como: a taxa de juros cobrada, o número de prestações, a data dos pagamentos e a taxa de atratividade, isto é, a taxa com a qual se consegue fazer render o dinheiro. O estudo da Matemática Financeira no Ensino Médio, e mesmo no Fundamental, deve preparar os alunos para enfrentar esse tipo de situação no seu dia a dia.

Há, portanto, necessidade de uma reestruturação nas orientações curriculares, de forma a permitir um ensino eficaz da Matemática Financeira, mostrando as armadilhas anunciadas pela mídia. É preciso esclarecer os erros mais comuns cometidos pelos cidadãos, como: somar taxas de porcentagem aplicadas sucessivamente, comparar quantias que não se referem à mesma data ou considerar que parcelas iguais em datas distintas têm o mesmo valor.

Ao realizarmos um levantamento bibliográfico, constatamos que praticamente não existem pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática Financeira. A maior parte dos livros didáticos brasileiros aborda o tema de forma tradicional, por meio da aplicação de fórmulas de juros simples e compostos. Poucos relacionam o tema com o estudo de funções ou de progressões aritméticas ou geométricas e também não problematizam situações do cotidiano. Há ainda, no mercado, diversos livros de Matemática Financeira destinados à preparação para concursos, que são inadequados para serem adotados como textos para o Ensino Médio.

Com base nesses dados, um grupo de professores e licenciandos do Projeto Fundação (IM-UFRJ), desenvolveu uma pesquisa, visando elaborar uma proposta de ensino mais eficaz de Matemática Financeira. O resultado desse trabalho está consolidado no livro “Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual” (NASSER, 2010).

Essa proposta leva em conta os princípios fundamentais da Matemática Financeira: o uso da taxa como fator e o deslocamento de quantias no tempo. O aspecto visual da abordagem é alcançado por meio da representação no eixo de setas e o prático, pela exploração de situações reais que se apresentam no cotidiano dos investimentos e das vendas a prazo.

Os pontos principais da sequência didática adotada são:

- ✓ uso da porcentagem como fator, na notação decimal, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo de $i\%$, multiplica-se a quantia original por $(1+i)$ e se for desconto de $i\%$, multiplica-se a quantia original por $(1-i)$;
- ✓ representação da situação no eixo das setas e transposição dos valores para uma mesma data para que possam ser comparados e/ou somados;
- ✓ exploração de problemas práticos, do dia-a-dia dos cidadãos;
- ✓ incentivo ao uso de calculadoras (não financeiras) e desencorajamento ao uso de fórmulas;
- ✓ integração com outros conteúdos como progressões e gráficos das funções afim e exponencial;
- ✓ análise de diversas estratégias para resolver um mesmo problema, exemplificando com soluções apresentadas por alunos de Ensino Médio.

2. Referencial Teórico

A Matemática Financeira não fazia parte do currículo da Escola Básica até bem pouco tempo. Mas, na prática, os cidadãos se deparam constantemente com situações financeiras. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.72) sugerem que sejam explorados procedimentos de Matemática Financeira no terceiro ciclo (6º e 7º anos) do Ensino Fundamental, como a “*resolução de situações problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais*”. Já para o quarto ciclo (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental, a sugestão recai na “*resolução de situações problema que envolvem juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadoras*” (p. 87). Além disso, as orientações didáticas apresentam um exemplo de Matemática Financeira, ilustrando as vantagens do uso de planilhas, concluindo que seu uso

possibilita que os alunos pesquisem e ampliem seus conhecimentos sobre matemática comercial e financeira: taxas, juros, descontos, fatores de conversão, impostos, etc. (BRASIL, 1998, p. 119 a 121)

Zot conceitua Matemática Financeira como o

estudo da determinação do valor da remuneração de empréstimos (cálculo de juros) e de sua rentabilidade (cálculo da taxa de juros). O primeiro

cálculo é fundamental para a caracterização dos contratos, enquanto o segundo diz respeito à tomada de decisão, processo importante para a orientação dos agentes econômicos nos rumos dos negócios financeiros. (ZOT, 1996, p. 21-22)

Assim como Zot, diversos pesquisadores chamam atenção para o objetivo principal da Matemática Financeira, que é estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo, como alertam os professores Ilydio e Vinicius P. de Sá, em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática:

Fundamental, em matemática comercial e financeira, é o valor do dinheiro no tempo, conceito tão simples quanto negligenciado pela maioria das pessoas. Não podemos operar diretamente com valores monetários referentes a datas distintas. É necessário que coloquemos todos os valores numa mesma data, valorizando-os ou desvalorizando-os na linha do tempo. (SÁ, 2009, p. 15)

Devido à crescente necessidade de preparar os jovens para enfrentar as situações financeiras, o tópico de Matemática Financeira tem sido incluído na grade curricular de várias redes de ensino, como na do Ensino Médio da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (Reorientação Curricular, SEEDUC-RJ, 2005). No entanto, a maioria dos professores em exercício não sente segurança para abordar esse tópico, já que não foi preparado para isso.

Pinto (2011) fez um levantamento dos currículos de nove cursos de licenciatura em Matemática do Rio de Janeiro. Seu estudo mostra que apenas dois incluem a Matemática Financeira como disciplina obrigatória, enquanto em outros três cursos esta é oferecida como disciplina optativa. Mas a Matemática Financeira não aparece na grade curricular de quatro Universidades. Isso explica a grande demanda por cursos de atualização para professores em Matemática Financeira, e o baixo desempenho de professores na resolução de problemas de Matemática Financeira que exigem mais do que a simples aplicação de fórmulas.

Ao longo de nossa pesquisa, temos oferecido palestras e oficinas a professores e futuros professores de Matemática, propondo a resolução de problemas contextualizados e divulgando a nossa proposta (SOUSA et al, 2008; NASSER, 2009). Um problema que exploramos nessas oficinas envolve a forma mais vantajosa para o pagamento do Imposto sobre a Propriedade de Veículo Automotor (IPVA), que pode ser pago à vista com 10% de desconto, ou em três parcelas mensais e iguais. A princípio, os participantes tentam aplicar

fórmulas para resolver esse problema, e não conseguem achar a taxa de juros embutida no pagamento parcelado. Após a realização da oficina, os participantes descobrem que essa taxa é de 11,5%, muito mais alta que as taxas cobradas em empréstimos bancários, o que mostra que o imposto deve ser pago à vista (PINTO, 2011).

O seguinte exercício foi aplicado por membros do nosso grupo de pesquisa a alunos do Ensino Médio, que apresentaram soluções diversificadas, usando o eixo das setas (NOVAES, 2009).

Bia pegou um empréstimo de R\$ 300,00 a juros mensais de 5%.
Dois meses depois, Bia pagou R\$ 150,00 e, um mês após esse pagamento liquidou seu débito.
Qual o valor desse último pagamento?

A resolução desse exercício não é imediata. No entanto, usando uma representação visual com setas representando o valor das quantias em cada data, é possível entender a situação. Transferindo as quantias para uma mesma data, pode-se somar e/ou subtraí-las de acordo com a situação.

A solução mais comum, e mais fácil para os alunos, é calcular o valor do empréstimo dois meses depois, para descontar o valor amortizado. Mas o valor do último pagamento só é encontrado se valor devido após a amortização é transferido para o mês seguinte, isto é, deve ser multiplicado por $(1 + i)$. Neste caso, como a taxa de juros é de 5%, esse fator é de 1,05, como se pode ver na solução mostrada na figura 1. Para a visualização ficar ainda mais clara, usamos a animação do Power Point para mostrar a variação do valor das quantias ao longo do tempo.

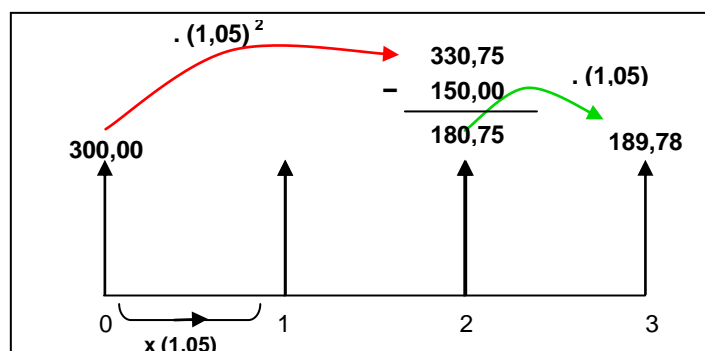


Figura 1: solução usando a animação do Power-point

Algumas soluções usam uma equação, como:

$$P = [300 \times (1,05)^2 - 150] \times 1,05 \quad (\text{comparando as quantias na data 3}) \text{ ou}$$

$$300 - \frac{150}{(1,05)^2} = \frac{P}{(1,05)^3} \quad (\text{comparando as quantias na data inicial}), \text{ ou}$$

$$300 \times (1,05)^2 - 150 = \frac{P}{1,05} \quad (\text{comparando as quantias na data da amortização}).$$

Embora essas equações possam parecer complicadas, observando a representação gráfica no “eixo das setas”, elas ficam muito claras para os estudantes do Ensino Médio, sem a necessidade de decorar fórmulas. Este exemplo, com três soluções distintas elaboradas por alunos, foi apresentado a professores da Escola Básica em diversas oficinas realizadas ao longo da nossa pesquisa, mostrando a riqueza do método visual, que dá oportunidade aos alunos de criar soluções originais. Nessas oficinas, pudemos perceber que a maioria dos professores não explora esse tipo de problema em suas aulas de Matemática Financeira.

3. Descrição desta pesquisa

Um problema parecido foi proposto na prova de seleção de 2013 para o Curso de Especialização em Ensino de Matemática (PEMAT) do Instituto de Matemática da UFRJ.

Havia 39 candidatos inscritos, mas apenas 29 compareceram à prova de seleção. Destes 29, apenas 15 acertaram completamente a questão 2, transcrita a seguir.

Vanda fez um empréstimo de R\$400,00, à taxa de juros compostos de 5% ao mês.
Depois de dois meses, deu uma quantia P para amortizar a dívida e um mês após, liquidou a dívida, pagando R\$210,00.
Qual o valor de P ?

A solução apresentada no gabarito oficial foi a seguinte:

Solução: Devemos resolver a equação $400 \times (1,05)^2 - P = \frac{210}{1,05}$.
Logo, $P = 241,00$.

Nesta solução, as quantias foram comparadas na data da amortização. Essa solução, usando a animação no eixo das setas, é bem mais ilustrativa.

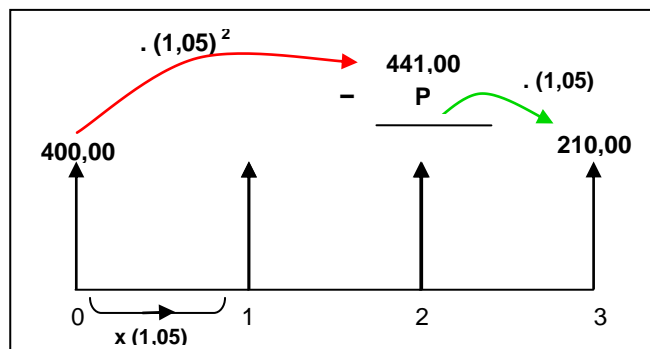


Figura 2: Resolução do problema desta pesquisa usando o eixo das setas

Muitas soluções diferentes foram apresentadas pelos respondentes que acertaram ou tentaram resolver a questão. Como não era permitido o uso de calculadora durante a prova, alguns professores usaram de artifícios para minimizar os cálculos. Para a realização da prova de seleção, os candidatos foram identificados por números. É assim que vamos nos referir a eles, quando apresentarmos suas resoluções para o problema proposto. A tabela 1 a seguir resume a distribuição da pontuação que os 29 candidatos obtiveram na questão 2:

Tabela 1: pontos ganhos na questão 2 pelos candidatos

Pontos ganhos na questão 2 (máximo 1,0)	Número de alunos
1,0	15
0,8	01
0,5	06
0	07
Total	29

As soluções, tanto as certas como as erradas, podem ser divididas em 9 categorias, de acordo com as estratégias usadas. Cada uma dessas categorias será analisada a seguir, com exemplos das respostas dos professores que realizaram a prova. Foi possível observar também que algumas soluções usaram mais de uma dessas estratégias.

Categoria 1: Uso de representação visual.

Seis professores usaram uma representação visual para esquematizar a situação problema.

Três destes usaram apenas um eixo com as datas marcadas, e chegaram à resposta correta.

Outros três professores usaram uma representação num eixo com setas, sendo apenas duas corretas, como a solução do professor 38, mostrada na figura 3.

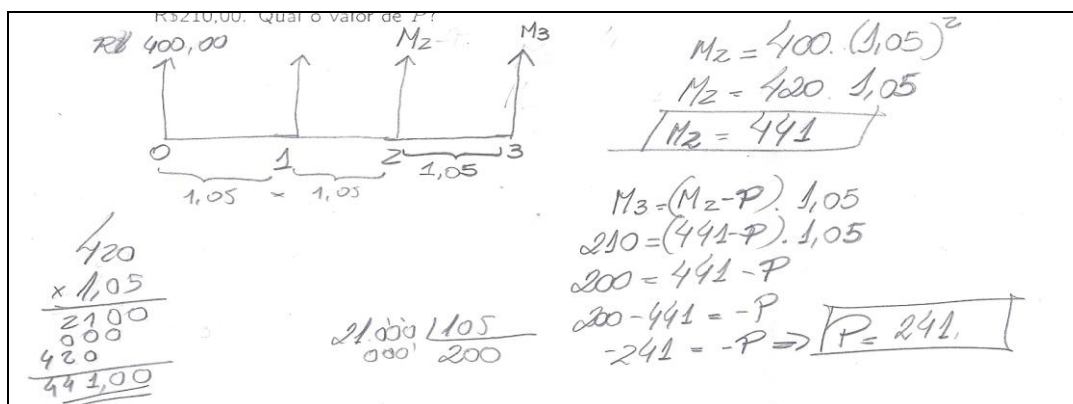


Figura 3: Solução do professor 38, usando o eixo das setas

Embora o professor 22 tenha usado corretamente a representação no eixo das setas, ele transferiu a quantia de 400 reais para a data 3 e diminuiu os 210 reais, errando a questão (figura 4).

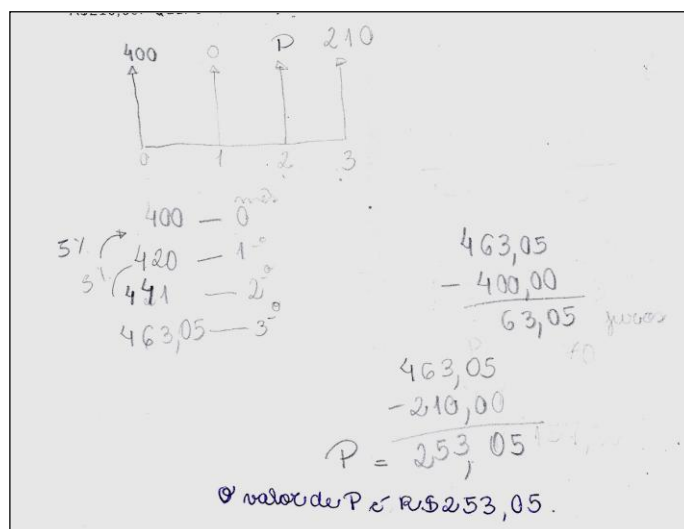


Figura 4: a solução incorreta do professor 22

Categoria 2: Uso de cálculo inicial seguido da resolução de uma equação

A grande maioria dos professores, no total de dez, resolveu o problema em duas etapas. Inicialmente transferiram a quantia de 400 reais para a data 2, encontrando 441 reais. A partir daí, eles usaram uma equação para chegar ao valor da quantia amortizada. Uma dessas resoluções é a do professor 38, da figura 1. O professor 05 também usou uma

representação num eixo, só com as datas, para resolver o problema em duas etapas (ver figura 5).

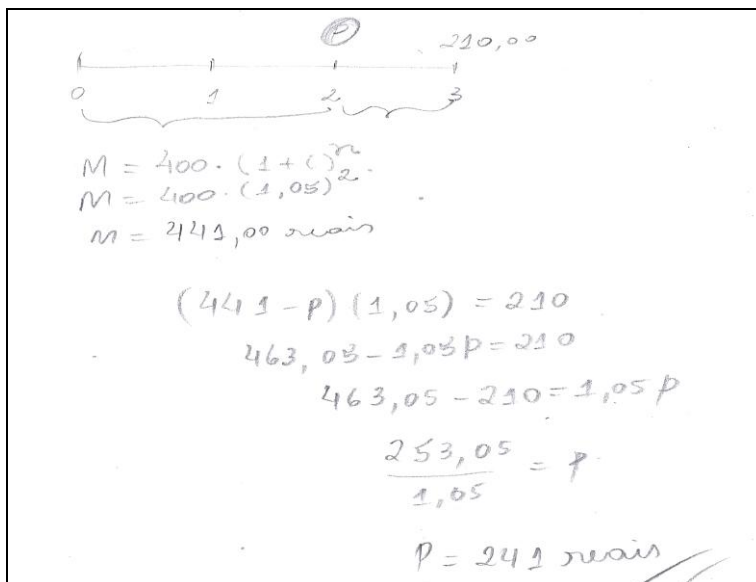


Figura 5: exemplo de resolução da categoria 2.

Categoria 3: Uso de uma equação:

Três professores partiram direto para a resolução de uma equação, transferindo todas as quantias para uma mesma data. Três equações equivalentes podem ser usadas neste caso. Um candidato transferiu os valores para a data inicial e resolveu a equação:

$$400 = \frac{P}{(1,05)^2} + \frac{210}{(1,05)^3}.$$

Dois outros candidatos preferiram comparar os valores na data da amortização, e chegaram à resposta correta resolvendo a equação $400 \cdot (1,05)^2 = P + \frac{210}{(1,05)}$. Embora alguns candidatos tenham tentado passar todos os valores para a data do pagamento final, nenhum escreveu corretamente a equação $400 \cdot (1,05)^3 = P \cdot (1,05)^2 + 210$.

Categoria 4: Cálculo dos juros mês a mês, para facilitar os cálculos.

Alguns professores usaram estratégias para minimizar os cálculos, já que não era permitido o uso de calculadoras na prova de seleção. Pelo menos duas dessas soluções pecaram pela notação, que não foi adequada, apesar de chegarem à resposta correta. O

professor 23 usou essa estratégia com uma notação correta, como se pode ver na figura 6 a seguir.

Handwritten mathematical work for a problem involving three months of interest. The work is organized into three columns labeled 'mês 1', 'mês 2', and 'mês 3'.
- 'mês 1': $400 + 400 \cdot \frac{5}{100} = 420$
- 'mês 2': $420 + 420 \cdot \frac{5}{100} - P$
- 'mês 3': $x + 5\% \cdot x = 210$
Below these, the student solves for x: $x + \frac{5x}{100} = 210$, $100x + 5x = 21000$, $x = \frac{21000}{105} = 200$.
Then, they solve for P: $441 - P = x$, $441 - P = 200$, $P = 441 - 200$, $P = 241$.
The final answer is: R: O valor de P é R\$ 241,00.

Figura 6: Estratégia para minimizar os cálculos.

Categoria 5: Tentativa de usar fórmula de juros simples

Embora a confusão entre os juros simples e compostos constitua um erro muito comum, apenas um candidato tentou esboçar uma solução usando juros simples na resolução desta questão. Esse baixo número deve ser devido ao fato de que o enunciado explicitasse que a taxa era de juros compostos.

Categoria 6: Resolução com erro de conta

Três soluções apresentaram erro de contas, apesar de ter o raciocínio correto. Este foi o caso do professor 7, que considerou $1+i=1,5$, no lugar de 1,05. Sua solução está mostrada na figura 7 a seguir.

$$\begin{aligned} 1^{\text{º}} \text{ mês} & \quad 400 \cdot 1,5 = 600 \\ 2^{\text{º}} \text{ mês} & \quad 600 \cdot 1,5 = 900 - P \\ 3^{\text{º}} \text{ mês} & \quad (900 - P) \cdot 1,5 = 1350 - 1,5P \\ & \quad -1,5P + 1350 + 210 = 0 \\ & \quad -1,5P = -1560 \\ & \quad 1,5P = 1560 \\ & \quad \frac{15P}{10} = 1560 \\ & \quad P = \frac{15600}{15} \\ & \quad \boxed{P = 1000} \end{aligned}$$

Figura 7: solução com erro no cálculo da taxa.

Categoria 7: comparação de quantias em datas distintas.

Cinco professores compararam quantias em datas distintas. Dois professores, por exemplo, consideraram que a amortização ocorreu na data do pagamento final. Um deles foi o professor 22, cuja solução está mostrada na figura 2. A figura 8 mostra a solução do professor 09, que cometeu o mesmo erro, de transferir os 400 reais para a data do pagamento final e simplesmente diminuir os 210 reais dados como amortização da dívida um mês antes. Além disso, este professor ainda usou um valor aproximado para $(1,05)^3$.

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^t \\ M &= 400 \cdot (1+0,05)^3 \\ M &= 400 \cdot (1,05)^3 \\ M &= 400 \cdot 1,15 \\ M &= 460 \\ P &= 460 - 210 \\ P &= 250 \end{aligned}$$

Figura 8: Amortização na data 3

O erro da categoria 8 é muito comum: as pessoas simplesmente somam os valores de todas as prestações, comparando o valor encontrado com o preço à vista. Nosso grupo tem alertado os professores para evitar propor problemas, principalmente nos anos iniciais, em que se pede o preço total de um produto que foi pago em tantas prestações iguais. Isso

pode criar na criança essa idéia de que o valor das prestações não muda ao longo do tempo (NASSER, 2009).

Categoria 9: questão em branco.

Apenas três professores deixaram a questão em branco.

4. Resultados

A tabela 2 a seguir mostra o número de professores cuja solução pode ser classificada em cada uma das categorias. Várias soluções usaram mais de uma estratégia, como por exemplo, a do professor 05 (figura 5), que lançou mão de um recurso visual (categoria 1) e depois resolveu o problema em duas etapas (categoria 2).

Tabela 2: Número de soluções em cada categoria

Categoria utilizada na resolução	Número de professores
1	6
2	10
3	3
4	4
5	1
6	3
7	5
8	3

O resultado obtido foi o melhor de todos os anos, desde 2006, em que há uma questão de Matemática Financeira na prova de seleção para o curso de Especialização do PEMAT. No entanto, esse resultado ainda não é satisfatório, pois menos de 50% dos professores que realizaram a prova conseguiram acertar totalmente a questão de Matemática Financeira. Levando em conta a pontuação dos 29 candidatos, constantes da tabela 1, a média obtida nessa questão foi de 0,65, num total de 1 ponto. Essa média é baixa, se considerarmos que os respondentes são professores da Educação Básica em exercício, que devem ensinar o conteúdo de Matemática Financeira para seus alunos.

Mesmo assim, devemos considerar o progresso dos docentes e o interesse pelo conteúdo de Matemática Financeira. Várias são as causas para essa melhoria. Sem dúvida, as demandas do cotidiano dos professores em relação à tomada de decisão ao efetuar pagamentos, é uma delas. Outra causa que deve ser citada é a divulgação crescente da necessidade de abordar a Matemática Financeira na Escola Básica, além da obrigatoriedade de abordar esse tema na grade curricular das Escolas de Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro. O fato de seis professores terem usado representação visual sugere que o conhecimento da nossa proposta, ou até mesmo uma preparação para a prova de seleção com base no livro publicado pelo Projeto Fundação (Nasser, 2010).

5. Comentários finais

Nesta comunicação chamamos atenção para a necessidade de que a Educação Financeira seja, cada vez mais, inserida na prática dos professores de Matemática da Escola Básica. A análise das respostas de professores em exercício a uma atividade financeira indica que muitos ainda não estão preparados para ensinar Matemática Financeira de modo eficaz, abordando problemas reais e ensinando a tomar decisões quanto à forma mais vantajosa de efetuar pagamentos. Vale registrar que o desempenho de professores em questões financeiras contextualizadas tem melhorado a cada ano.

É papel das Universidades e dos cursos de formação de professores, tanto inicial como continuada, capacitar os professores para o ensino eficaz de Matemática Financeira.

Mais pesquisas e materiais didáticos adequados devem ser desenvolvidos, com o objetivo de que os professores compreendam

a importância de explorar na escola situações financeiras do cotidiano, como a forma de efetuar o pagamento de impostos e as diversas opções de compra oferecidas pelo mercado. Afinal, a Matemática que se ensina na escola deve servir para evitar que o povo seja enganado, ajudar na escolha da melhor forma de pagamento e, assim, propiciar o exercício pleno da cidadania. (NASSER, 2010, p. 9)

Isso pode e deve ser feito de modo dinâmico e visual, usando a notação decimal e o eixo das setas. A animação ajuda os alunos a compreender a variação do dinheiro no tempo e facilita o desenvolvimento de estratégias próprias na resolução de problemas.

6. Referências

BRASIL, Secretaria de Educação do Estado do RJ: **Reorientação Curricular**, Livro II, 2005.

BRASIL, Ministério de Educação, Cultura e Lazer: **Parâmetros Curriculares Nacional**, 1998.

NASSER, L. (coordenação) **Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual.**: Rio de Janeiro: Projeto Fundação, Editora IM-UFRJ, 2010.

NASSER, L. **À vista ou a prazo sem juros: qual dessas modalidades de pagamento é mais vantajosa?** Educação Matemática em Revista-RS, ano 10, No. 10, v.2, pp. 93-99. Canoas-RS: Ed. SBEM-RS, 2009.

NOVAES, R. C. N. **Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio.** Dissertação de mestrado, UFRJ, RJ, RJ, Brasil, 2009.

PINTO, M. **A importância da Matemática Financeira na formação de professores.** Monografia de final de curso de Licenciatura, IM-UFRJ, RJ, Brasil, 2011.

SÁ, I. P. e SÁ, V. G. P. **Dois vezes 100 é igual a 200?** Revista do Professor de Matemática, nº 70, p.13-16, SBM, 2009.

SOUSA, G et al **Capacitando professores para o ensino de Matemática Financeira.** Atas do VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro (em CD), realizado na UniRio, RJ: SBEM-RJ, 2008.

ZOT, W. D.: **Matemática Financeira.** Porto Alegre, RS: Ed. da UFRGS, 2006.