DIAGNÓSTICO DE ALGUNS ASPECTOS QUE DIFICULTAM A PASSAGEM DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

Lourival Pereira Martins CPF 871.611.688-72
UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera
lomib@ig.com.br

Marlene Alves Dias
UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera
alvesdias@ig.com.br

Resumo: Trata-se de parte da pesquisa sobre os aspectos que dificultam a passagem de aritmética para a álgebra. Para tal, estudamos algumas pesquisas epistemológicas e didáticas e construímos um teste diagnóstico que nos permite identificar as dificuldades em função dos diferentes aspectos considerados. Analisamos também as relações institucionais esperadas e existentes por meio da análise de documentos oficiais e livros didáticos indicados pelo Ministério da Educação por meio do Programa Nacional do Livro Didático. Apresentamos os resultados da análise do teste diagnóstico para um pequeno grupo de estudantes de Licenciatura que serviu para validar o teste e já permite avançar em algumas considerações sobre o processo de ensino e aprendizagem da álgebra, ou seja, a necessidade de um trabalho que considere explicitamente os diferentes aspectos da álgebra na formação dos professores de forma que os mesmos possam reconhecê-los nas produções de seus estudantes e auxiliá-los naqueles que apresentam maior dificuldade.

Palavras-chave: Aritmética; Álgebra; Passagem Aritmética/Álgebra.

1. Introdução

Este trabalho traz parte dos resultados da pesquisa que está sendo desenvolvida como parte de minha tese de Doutorado em que busco compreender a interferência de alguns aspectos da Álgebra, a saber: memória, generalização, equivalência da igualdade, linguagem e estrutura, nas dificuldades dos estudantes no momento da passagem da Aritmética para a Álgebra escolar.

Para tal construímos um teste diagnóstico após o estudo dos trabalhos de:

- Chevallard (1984,1989, 1990) que tratam especificamente da passagem da Aritmética para a Álgebra, e nesses trabalhos o autor apresenta diversos exemplos sobre os aspectos considerados acima e as dificuldades que eles provocam nos estudantes.
- Robinet (1989) que faz um breve estudo da gênese do cálculo algébrico na tentativa de responder às questões: Como e Por quê nasce o formalismo algébrico, se ele corresponde a

uma economia para certos tipos de problema, qual o tempo para o seu desenvolvimento e quais as dificuldades encontradas, e se utilizamos esses formalismos nas mesmas condições e motivações dos matemáticos que o inventaram? Nesse estudo também foi possível identificar exemplos que dificultaram o desenvolvimento do formalismo algébrico e que se referem aos diferentes aspectos enunciados acima e, consequentemente, podem dificultar o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra.

Além desse estudo epistemológico e didático por meio dos trabalhos acima indicados, consideramos os aportes teóricos da Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1997, 2002), da noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1999), das noções de quadro e mudança de quadros segundo definição de Douady (1984) e da noção de registro de representação semiótica e dos estudos sobre o ensino da Álgebra conforme trabalhos de Duval (2009, 2011, 2012). Esse quadro teórico serviu como apoio para a análise das relações institucionais esperadas e existentes para o processo de ensino e aprendizagem de Aritmética e Álgebra no ensino fundamental a partir da quarta série/ano.

O estudo das relações institucionais foi realizado por meio de uma grade de análise na qual se procurou identificar os diferentes momentos e tarefas habitualmente utilizados para trabalhar os aspectos da Álgebra.

Um estudo preliminar das relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes foi realizado por meio da aplicação do teste diagnóstico a um grupo de quatorze alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade da Grande São Paulo.

Os resultados encontrados mostram a necessidade de um trabalho que considere explicitamente os diferentes aspectos na formação dos professores de forma que os mesmos possam reconhecê-los nas produções de seus estudantes e auxiliá-los naqueles que apresentam maior dificuldade.

Apresentamos a seguir uma breve descrição do referencial teórico.

2. Referencial teórico

Como já anunciado acima para a construção do teste diagnóstico utilizamos os trabalhos de Chevallard (1984, 1989, 1990), Robinet (1989) que dão ênfase à passagem da Aritmética para a Álgebra. Chevallard centrando sua abordagem sob um ponto de vista didático e Robinet sob um ponto de vista epistemológico para responder questões didáticas associadas às dificuldades dos estudantes em relação ao formalismo algébrico.

Para o desenvolvimento da pesquisa das relações institucionais esperadas e existentes, que dão suporte às análises das relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes optamos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1997, 2002), a noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1999), as noções de quadro e mudança de quadros segundo definição de Douady (1984) e da noção de registro de representação semiótica e dos estudos sobre o ensino da Álgebra de Duval (2009, 2011, 2012).

A Teoria Antropológica do Didático, criada por Chevallard (1999) destaca as relações entre os objetos, as pessoas, e as instituições. A relação do sujeito com suas instituições é denominada pelo autor de *relação institucional*, e a relação do sujeito com o objeto ele chama de *relação pessoal*, observando que as relações pessoais de um sujeito com um objeto estão associadas às relações institucionais a que ele se submete.

A opção pela Teoria Antropológica do Didático se deve ao fato que consideramos como sujeito os estudantes envolvidos na pesquisa, como objetos, o conjunto de conhecimentos matemáticos necessários para a passagem da Aritmética para a Álgebra e as instituições todo um conjunto de elementos, entre eles, livros didáticos, materiais pedagógicos, documentos oficiais que direcionam o trabalho do professor em sala de aula. Assim, analisamos as respostas dos estudantes, ou seja, suas relações pessoais com o formalismo algébrico em função das possíveis relações institucionais a que eles se submeteram.

Utilizamos ainda a noção de quadro, que é definido por Douady (1986, p. 11) como: "um quadro é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, e as várias imagens mentais associados a esse objeto dentro desse quadro". Segundo a autora, um mesmo objeto visto em dois quadros distintos é descrito de forma diferente, gerando imagens mentais diferentes, necessárias para a compreensão desse objeto.

Nesse trabalho consideramos quatro quadros, o *quadro da aritmética*, em que os objetos relacionados são os números e as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, o quadro que denominamos *de aritmo – algébrico*, criado com o objetivo de acomodar situações intermediárias entre o caráter operacional da aritmética e a presença de característica algébrica como as propriedades de uma operação numérica, entre elas a associativa da adição ou multiplicação, o quadro da *aritmética generalizada*, no qual as noções relativas à variação torna-se ponto chave para permitir a generalização dos objetos numéricos e suas propriedades. Nesse quadro as concepções relacionadas à estrutura ganha força, pois uma soma, por exemplo, carrega consigo todas as propriedades operatórias da operação indicada e não apenas um resultado a ser obtido. O quarto e último quadro é o da *álgebra*, em que os objetos se destacam pelas propriedades gerais que podem ser inferidas a partir de suas representações. O objeto não está sozinho, mas munido dos significados a ele relacionado, assim podemos considerar que estamos diante de uma nova linguagem.

Optamos ainda pela noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes para a realização de uma tarefa matemática conforme definição de Robert (1999), que propõe a existência de três níveis de conhecimentos, a saber: técnico, mobilizável e disponível. Segundo a autora, na análise de uma atividade é fundamental identificar qual o nível exigido do estudante para que seja capaz de adaptar seus conhecimentos.

Consideramos também a noção de registro de representação semiótica de Duval (2009) porque segundo o autor "não é possível estudar os fenômenos relativos aos conhecimentos sem recorrer à representação" (DUVAL, 2009, p. 29). Para compreender o funcionamento das diferentes formas de representações dos objetos do saber matemático relativos à Álgebra utilizamos a teoria dos registros de representação semiótica desenvolvida por Duval (2009, 2010) principalmente no que diz respeito à necessidade de tratamento e conversões de registros tanto nas atividades do teste diagnóstico como naquelas propostas nos diferentes materiais didáticos analisados.

Para o desenvolvimento da pesquisa foi utilizada a seguinte metodologia.

3. Metodologia

Na busca de compreender as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes quando se consideram os conhecimentos matemáticos envolvidos na passagem da Aritmética para a Álgebra, aplicamos um teste diagnóstico composto por sete questões desenvolvidas a partir de um estudo tomando como referência os aspectos da álgebra: memória, equivalência da igualdade, generalização, estrutura e linguagem, que serão definidos abaixo.

A elaboração do teste diagnóstico se deu em três etapas bem definidas.

Primeira etapa: Pesquisa, didática e epistemológica, procurando definir o que é Álgebra, quais as relações institucionais e pessoais que devem ser desenvolvidas de forma a permitir a sua aprendizagem, em particular, para os estudantes brasileiros. Para tal estudamos artigos sobre o tema e analisamos documentos oficiais e livros didáticos indicados pelo Ministério da Educação do Brasil.

Segunda etapa: Levantamento dos aspectos relacionados ao ensino da álgebra buscando identificar: Quais os tipos de tarefas são propostas aos estudantes? Quais níveis de conhecimentos em jogo, conforme definição de Robert (1999)? Quais conhecimentos auxiliam o estabelecimento de uma relação pessoal do estudante com os objetos da álgebra?

Terceira etapa: Teste diagnóstico constituído de sete questões que visam identificar as relações pessoais em função dos diferentes aspectos considerados para a aprendizagem algébrica que podem ter sido desenvolvidas pelos estudantes. O teste foi construído levando-se em conta os resultados das análises das etapas anteriores.

Apresentamos a seguir os aspectos da álgebra considerados na pesquisa e a análise a priori de uma das tarefas do teste diagnóstico.

3.1. Aspectos da Álgebra considerados na pesquisa

A Álgebra é uma estrutura do conhecimento matemático que foi sendo construída ao longo da evolução do mesmo. As dificuldades relacionadas a essa construção estavam associadas à formulação de uma linguagem que permitisse sintetizar e generalizar as informações contidas em raciocínios elaborados, relacionados tanto à solução de problemas da Aritmética quanto da Geometria e era dificultado com a utilização da linguagem natural.

O desenvolvimento dessa linguagem foi fundamental e criou as condições para evolução da matemática levando-a para um novo patamar conforme afirma Chevallard (1984). Robinet (1989) ressalta que o mesmo não se deu de forma aleatória, mas foi fruto de condições e necessidades em momentos específicos, que foram fundamentais para essa formulação. De acordo com Chevallard (1984) e Robinet (1989) para que fosse possível essa nova formulação foi necessária a superação de dificuldades relacionadas aos diferentes aspectos da álgebra, dentre eles podemos destacar:

- O aspecto de *memória*, que permite o tratamento da informação sem que se perca de vista o objeto trabalhado.

- O aspecto de *equivalência da igualdade*, que permite realizar transformações na representação do objeto sem perder seu significado.

- O aspecto de *generalização*, que permite aplicar a solução a uma classe de problemas e não apenas a problemas isolados.

- O aspecto de *estrutura*, que permite generalizar as propriedades operatórias das operações aritméticas.

- O aspecto de *linguagem*, que permite comunicar a informação de forma precisa sem dubiedades.

3.2. Análise a priori de uma das tarefas propostas no teste

A quinta tarefa é composta dos seguintes *problemas*:

A. Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?
B. A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?

A solução dos dois problemas encontra-se, no que Chevallard (1984) identificou como tarefas aritméticas que podem ser algebrizadas, ou seja, tarefas cuja solução pode ser realizada tanto dentro do quadro da Aritmética como no quadro da Álgebra. Segundo esse autor trata-se de um tipo de tarefa que era utilizada como estratégia para a introdução formal da Álgebra antes da reforma da Matemática Moderna, na França.

A tarefa é considerada aritmética, pois para respondê-la basta manipular numericamente os dados apresentados e assim obter sucesso na realização da tarefa.

Possíveis resoluções das tarefas:

Tarefa A ou primeira tarefa: Resoluções no quadro da *Aritmética*:

- *Primeira solução*: Se Ana tem sete anos a menos que seu irmão, retirando-se 7 de 35 temos o dobro da idade de Ana que dividido por dois dará a idade de Ana. Ou seja:

A idade de Ana é dada por $(35 - 7) \div 2$; logo 14 anos.

- *Segunda solução*: Regra da falsa posição.

Admitindo a idade de Ana como 10 anos teríamos:

A idade de Ana mais a idade de irmão seria $10 + (10 + 7) = 27$, como a soma das idades é 35 está faltando 8 anos, quatro para cada irmão, logo a idade de Ana é de 14 anos.

- *Terceira solução*: Proposta por Duval (2012) consiste em montar uma tabela organizando os dados do problema.

Ana	Irmão	Soma das idades
10	17	27
11	18	29
12	19	31
13	20	33
14	21	35

Tabela 1: Tabela das tentativas

Logo a idade de Ana é de 14 anos.

Tarefa A ou primeira tarefa: Resoluções no quadro da *Álgebra*:

- *Primeira solução*: Considerando a idade de Ana como sendo x temos a equação: x + (x+ 7) = 35, cuja resolução resulta em x = 14, logo a idade de Ana é de 14 anos.

- *Segunda solução*: Considerando a idade de Ana como sendo x e de seu irmão y temos o sistema: $\begin{cases} y = x + 7 \\ x + y = 35 \end{cases}$ cuja resolução resulta em x = 14 e y = 21, logo a idade de Ana é de 14 anos.

Tarefa B ou segunda tarefa: Resoluções no quadro da *Aritmética*:

- *Primeira solução*: Como a idade de Pedro é o dobro da idade de Juca temos que a soma das idades é o triplo da idade de Juca, logo basta dividir 39 por 3, ou seja, a idade de Juca é de 13 anos e de Pedro o dobro de 13, ou seja 26 anos.

- *Segunda solução*: Regra da falsa posição. Considerando a idade de Juca como sendo de 10 anos, Pedro teria 20 anos, e a soma das idades seria de 30 anos, ou seja 9 anos a menos que soma das idades de cada um. Repartindo essa diferença entre Pedro e Juca temos que Juca terá 13 anos e Pedro 26 Anos.

- *Terceira solução*: Usando a proposta de Duval (2012).

Juca	Pedro	Soma das idades
10	20	30
11	22	33
12	24	36
13	26	39

Tabela 2: Tabela das tentativas

Logo a idade de Juca é de 13 anos e a de Pedro 26 Anos.

Tarefa B ou segunda tarefa: Resoluções no quadro da *Álgebra*:

- *Primeira solução*: Considerando a idade de Juca como x temos a equação:

3 x = 39, cuja solução é 13, logo Juca tem 13 anos e Pedro, que é o dobro 26 anos.

- *Segunda solução*: Considerando a idade de Juca como x e Pedro y temos o sistema de equações: $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 39 \end{cases}$ cujas soluções são x = 12 e y = 26, logo Pedro tem 26 anos e Juca 13 anos.

As soluções apresentadas podem não ser únicas, mas são as habitualmente encontradas em nossas salas de aula, exceto a proposta de Duval (2012), que enfoca uma solução relacionada com as funções lineares.

Considerando a primeira solução de natureza aritmética da tarefa A observamos que ela pode ser considerada como uma solução direta e como destaca Chevallard (1984) econômica. Ainda conforme Chevallard (1984) essa possibilidade de soluções aritméticas dificultava o trabalho do professor no momento da passagem da Aritmética para a Álgebra, uma vez que o estudante não vê sentido em desenvolver uma nova estratégia, que por ele era considerada mais difícil e não necessária. Sua solução está associada ao aspecto operacional da igualdade, pois o sinal é utilizado para dar uma resposta imediata do cálculo apresentado.

Na segunda solução aritmética identificamos o aspecto memória que auxilia no desenvolvimento do raciocínio permitindo o apontamento e o resgate da informação encontrada. A segunda solução no quadro da aritmética utiliza a regra da falsa posição que era tradicional na solução de problemas antes do estabelecimento da Álgebra. Observamos que nela, além do aspecto de memória, aparecem também os aspectos de linguagem e equivalência da igualdade, pois para se obter a resposta é necessário o registro da informação e os dois lados da igualdade devem ser equivalentes, ou seja, se a idade de Ana fosse 10 anos então 10 + (10 + 7) seria igual a 27, como a soma das idades é 35 devo somar 8 aos 27, o mesmo 8 deve ser somado à esquerda, sendo 4 para cada um dos irmãos.

A proposta de Duval (2012) considera o comportamento da variação em uma função linear, utilizado os aspectos de memória, linguagem e equivalência e criando as condições para o estabelecimento do aspecto de generalização.

As soluções no quadro da Álgebra já partem do pressuposto do domínio por parte do estudante dos cincos aspectos considerados. Ambas as soluções exigem que o estudante generalize a idade considerada representando-a por uma letra, utilizando dessa forma os aspectos de memória, linguagem e generalização. O aspecto de equivalência surge à medida que a tradução da tarefa, determinar a idade, equivale a escrever uma sentença matemática que expressa uma igualdade. O aspecto de estrutura é observado no momento em que temos a necessidade de representar uma das idades como função de outra, o que aparece de forma explícita na segunda solução.

4. Resultados da Pesquisa

A atividade proposta aos estudantes é composta de um conjunto de sete tarefas envolvendo desde a resolução de expressões numéricas, nas duas primeiras questões, até tarefas de generalização. O objetivo é verificar a relação pessoal vinculada ao registro das operações efetuadas e a relação estabelecida com os aspectos da Álgebra, ou seja: memória, equivalência da igualdade, generalização, estrutura e linguagem.

Os resultados aqui apresentados fazem parte do teste diagnóstico, aplicado ao grupo de alunos supracitados, de um curso de Licenciatura em Matemática, como teste de validação, visando verificar a eficácia do instrumento e se os mesmo não gerariam dúvidas na resolução.

A escolha do referido curso está relacionada com a necessidade dos estudantes desse curso do desenvolvimento de uma relação pessoal com a linguagem algébrica que leve em conta os diferentes aspectos da Álgebra, uma vez que os mesmos estão se preparando para atuar como professor e, consequentemente, introduzir e desenvolver os diferentes aspectos da Álgebra com seus estudantes.

Os resultados da análise se referem apenas à quinta tarefa, em que propomos duas questões aritméticas formuladas de forma discursiva, que habitualmente é denominado de problemas nos livros didáticos.

A expectativa é que na medida em que os estudantes avancem nos anos escolares, os mesmos desenvolvam uma forma de solução que se aproxime de uma solução algébrica com a utilização de modelagem do problema por meio de equações. Dessa forma, procuramos identificar qual a evolução da relação pessoal do estudante com esse tipo de representação e em relação a essa noção matemática.

Podemos considerar, para o grupo de estudantes envolvidos que a tarefa exige o nível de conhecimento mobilizável, segundo a classificação de Robert (1999), sendo que as possíveis soluções podem ser desenvolvidas tanto no quadro da Aritmética como no da Álgebra.

Por se tratar de um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, esperava-se que a maioria dos estudantes algebrizasse a solução do problema, embora a solução aritmética também fosse esperada, pois como destaca Chevallard (1984) é mais econômica.

Dos quatorze relatórios, cinco apresentaram solução correta para ambas tarefas, mas não indicaram como os resultados foram obtidos. Dos nove alunos que apresentaram o desenvolvimento da solução, cinco erram a tarefa A. Entre os que acertaram a tarefa A, dois resolveram no quadro da Aritmética e dois no quadro da Álgebra. Dos três estudantes que empregam o quadro da Álgebra, dois estudantes acertam a tarefa A e utilizam como ferramenta o sistema linear e um terceiro estudante apresenta uma solução errada, cujo encaminhamento corresponde a uma variação para a solução algébrica proposta na análise a priori. Os quatorzes estudantes acertaram a tarefa B, sendo que aqueles que utilizaram sistema linear na solução da tarefa A, também o fizeram na tarefa B. Apenas um dos estudantes apresentou solução para a tarefa B no quadro da Aritmética, portanto podemos considerar que o quadro privilegiado para a resolução da tarefa B foi o quadro da Álgebra.

Na figura 1, abaixo, apresentamos a solução desenvolvida por um dos estudantes que errou a primeira tarefa. Observamos que para segunda tarefa o mesmo utilizou uma solução próxima da primeira solução no quadro da Álgebra considerada na análise a priori. Podemos observar que esse estudante tem um bom desenvolvimento das habilidades na utilização dos aspectos da Álgebra destacados, notadamente no que se refere à equivalência da igualdade, visto que apesar de não indicar uma passagem intermediária, 3x = 39, consegue manipular essa equivalência, o que pode ser observado pela escrita, $\frac{39}{3} = x = 13$, mesmo com uma falta de organização. Entretanto ao realizar a primeira tarefa não obteve sucesso na obtenção da idade de Ana, pois se limitou a efetuar a diferença entre trinta e cinco e sete concluindo que a idade de Ana é de vinte e oito, como fica claro na resposta apresentada.

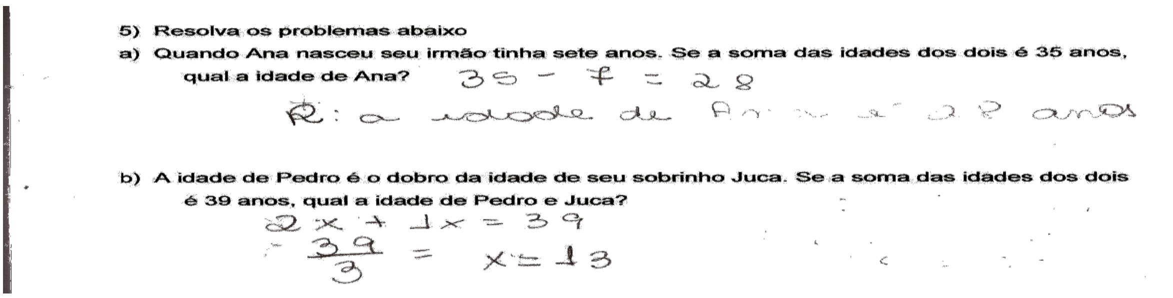

5) Resolva os problemas abaixo
a) Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?
35 − 7 = 28
R: a idade de Ana é 28 anos
b) A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?
2x + 1x = 39
$\frac{39}{3}$ = x = 13

Figura 1 - Solução incorreta da primeira tarefa apresentada dentro do quadro da Aritmética.

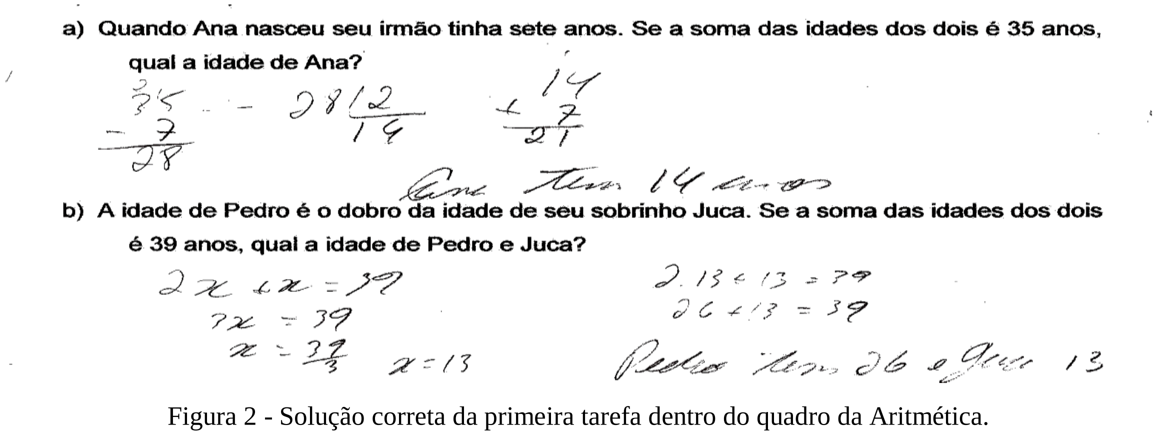
Isso nos leva a levantar as seguintes hipóteses:

- O estudante não compreendeu o enunciado interpretando que Ana tinha sete anos a mais que seu irmão, o que evidentemente não está de acordo com o enunciado.

- O estudante compreendeu o enunciado e buscou a solução aritmética, efetuando a diferença entre trinta e cinco e sete. Entretanto parece ter ocorrido uma perda de conexão entre o momento em que leu e interpretou o enunciado e o momento em que estava realizando a tarefa.

De qualquer forma podemos considerar que o objeto inicial se perdeu durante a realização da tarefa, com o estudante não lembrando que trinta e cinco era a soma das idades dos dois irmãos e Ana tinha sete anos a menos que seu irmão. Observamos aqui que Chevallard (1984) destaca que fazer uso de anotações que permitam o resgate da mesma durante a realização das tarefas é o que denominamos de aspecto de memória, e possibilita o tratamento da informação sem que se perca de vista objeto trabalhado e podemos considerar essa como uma das estratégias que levam à formulação da linguagem algébrica.

Os estudantes que obtiveram sucesso na resolução da primeira tarefa no quadro da Aritmética o fizeram de acordo com a primeira solução prevista na análise dessa questão. Apresentamos abaixo, na figura 2, essa solução na qual se pode acompanhar o raciocínio desenvolvido por um dos estudantes.


a) Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?

35 − 7 = 28   28 | 2 = 14   14 + 7 = 21

Ana tem 14 anos

b) A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?

$2x + x = 39$

$3x = 39$

$x = \frac{39}{3}$ $x = 13$

$2 \cdot 13 + 13 = 39$

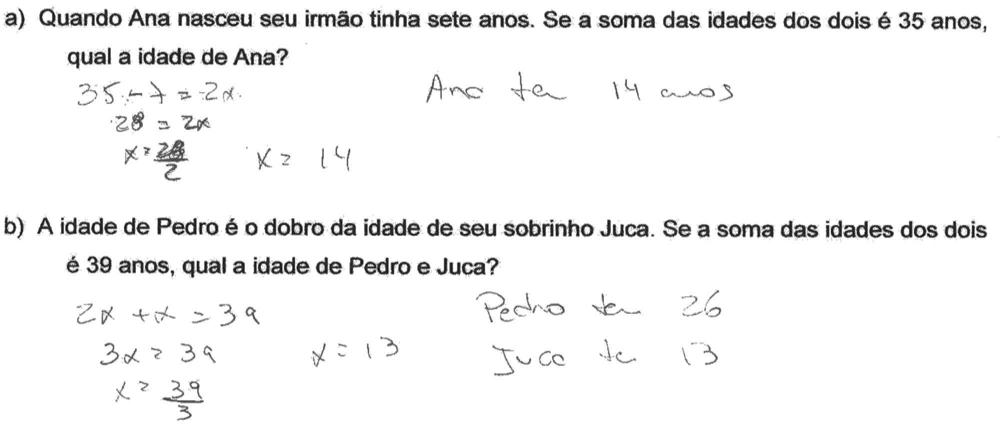
$26 + 13 = 39$

Pedro tem 26 e Juca 13

Figura 2 - Solução correta da primeira tarefa dentro do quadro da Aritmética.

Não se pode dizer que o estudante que resolveu a primeira tarefa apresentada na figura 2 acima tenha utilizado o quadro da Aritmética por falta de instrumental algébrico. O domínio desse instrumental fica claro na resolução da segunda tarefa realizada com sucesso. O aspecto de memória, generalização, equivalência, linguagem e estrutura estão evidentes nessa solução. O estudante traduz o problema por meio de uma equação, aspecto de generalização dos números e linguagem. Efetua com sucesso a soma de 2x com x, aspecto de generalização das operações numéricas e anota expressão equivalente, 3x = 39, na linha subsequente, aspecto de memória. Divide o lado direito da igualdade por três, aplicando a operação inversa da multiplicação, aspecto de equivalência e estrutura. Podemos atribuir à solução da primeira tarefa de forma direta como previsto na análise da tarefa obtendo a vantagem da economia que esse tipo de solução apresenta.

Uma solução algébrica para obter a idade de Ana, próxima a apresentada na primeira solução da análise a priori para a tarefa A no quadro da Álgebra, pode ser observada na figura 3, abaixo. Podemos considerar que a tradução do problema não ocorreu exatamente como o proposto pelo enunciado da tarefa, o que nos leva a levantar a hipótese de que o estudante utilizou-se parcialmente da estratégia aritmética, ao efetuar a diferença entre 35 e 7. Entretanto estabeleceu uma igualdade com o dobro de x. Provavelmente considerou o valor de x como sendo a idade de Ana. A resolução das duas tarefas indica o domínio dos diferentes aspectos conforme análise desenvolvida para a solução da figura 2.


a) Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?

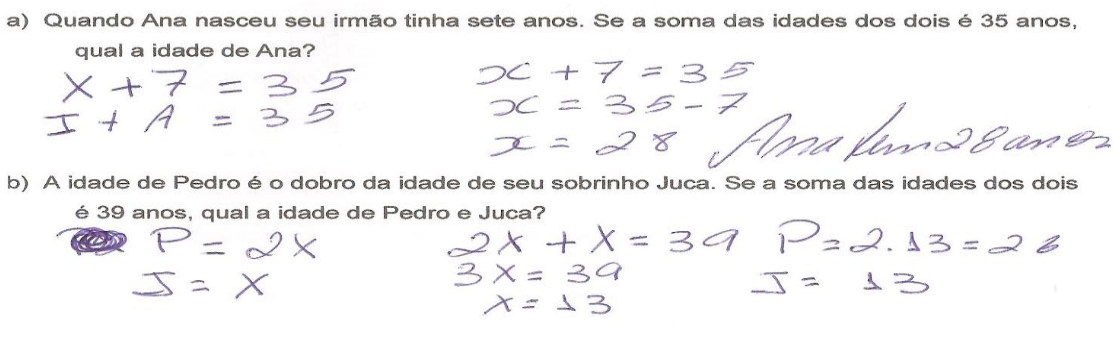
35 - 7 = 2x
28 = 2x
x = 28/2   x = 14
Ana tem 14 anos

b) A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?

2x + x = 39
3x = 39   x = 13
x = 39/3
Pedro tem 26
Juca tem 13

Figura 3 - Solução da primeira tarefa dentro do quadro da Álgebra.

Na figura 4 temos um exemplo de solução dentro do quadro algébrico em que o estudante não obteve sucesso na resolução da primeira tarefa.


a) Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?

X + 7 = 35
I + A = 35
x + 7 = 35
x = 35 - 7
x = 28
Ana tem 28 anos

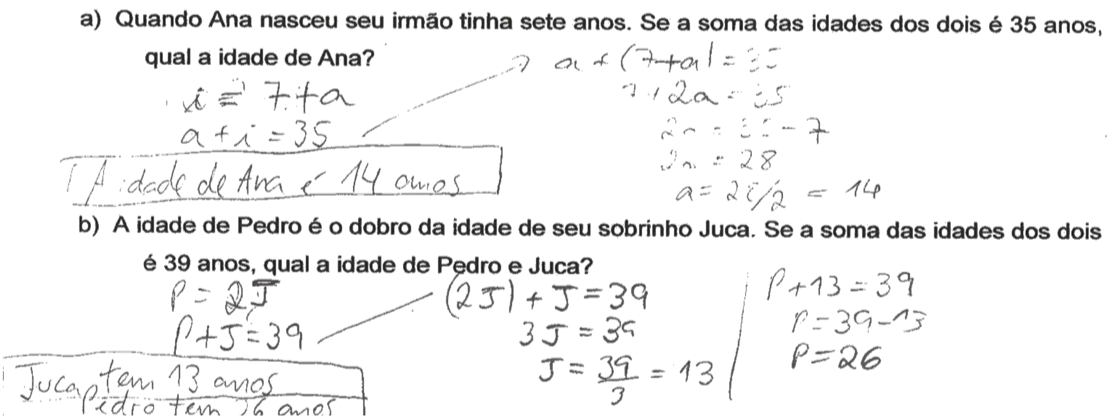
b) A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?

P = 2X
J = X
2X + X = 39
3X = 39
X = 13
P = 2.13 = 26
J = 13

Figura 4 - Solução no quadro algébrico em que o estudante errou a primeira tarefa.

Ao traduzir o problema para a representação simbólica o estudante separou, incorretamente, o problema em duas partes. Na primeira parte, o quanto a idade do irmão excede a idade de Ana. Na segunda parte, a soma das idades dos irmãos. Na tentativa de responder a primeira questão utilizou a primeira parte do sistema desprezando a segunda. Observamos que o aspecto memória não foi corretamente utilizado, o que poderia ser justificado pela falta de conexão entre as duas expressões obtida.

Na figura 5 abaixo temos uma solução na qual o aspecto estrutural da Álgebra é evidente. Nas duas tarefas o estudante separou o problema em duas partes, a idade do irmão em relação à idade de Ana e a soma das idades dos irmãos. O aspecto memória está claro, o estudante não necessita mais se reportar ao texto para solucionar os problemas, basta aplicar as propriedades das estruturas algébricas. Se i = 7 + a, então em a + i = 35 temos a + (7 + a) = 35.


a) Quando Ana nasceu seu irmão tinha sete anos. Se a soma das idades dos dois é 35 anos, qual a idade de Ana?

i = 7+a
a+i = 35
A idade de Ana é 14 anos

a + (7+a) = 35
7+2a = 35
2a = 35 − 7
2a = 28
a = 28/2 = 14

b) A idade de Pedro é o dobro da idade de seu sobrinho Juca. Se a soma das idades dos dois é 39 anos, qual a idade de Pedro e Juca?

P = 2J
P+J = 39
Juca tem 13 anos
Pedro tem 26 anos

(2J) + J = 39
3J = 39
J = 39/3 = 13

P+13 = 39
P = 39−13
P = 26

Figura 5 - Solução no quadro algébrico onde os aspectos de estruturas ficam evidentes

Referindo-nos a Chevallard (1984) observamos que a álgebra potencializa a resolução de tarefas relacionadas à solução de problemas. Ao traduzir o problema para a linguagem simbólica os tratamentos dados às informações representadas ficam facilitados, pois as informações podem ser resgatadas com grande rapidez.

5. Considerações Finais

Acreditamos que em nosso ensino as dificuldades presentes quando da introdução ao mundo da álgebra ocorre no momento em que se procura levar o estudante a generalizar as operações aritméticas. Para que isso seja possível as relações institucionais estabelecidas em nossa estrutura escolar devem gerar as condições para que essa passagem ocorra sem gerar grandes traumas e permitam a superação das barreiras que acabam gerando dificuldades, que se mostram insuperáveis ao longo da aprendizagem do estudante. Observamos aqui que os diferentes aspectos são desenvolvidos no decorrer dos ensinos fundamental e médio, mas falta articulação entre eles e o trabalho consciente sobre esses aspectos por parte de grande parte daqueles que os utilizam, em particular, alguns professores.

Os resultados aqui apresentados são parciais uma vez que a pesquisa ainda está em andamento, mas trazem à luz dados interessantes para a formação de professores:

- Nem todos os estudantes conseguiram sucesso na realização da primeira tarefa, mas todos resolveram satisfatoriamente a segunda no quadro da Álgebra.

- Dos que conseguiram sucesso na realização da tarefa A, apenas dois o fizeram no quadro da Álgebra, os demais resolveram dentro do quadro da Aritmética.

- O que explicaria um melhor desempenho desses estudantes no momento de modelar as estruturas multiplicativas, como o dobro e a dificuldade na modelagem de estruturas aditivas como a apresentada na primeira tarefa?

As soluções apresentadas pelos estudantes indicam o domínio, pelo menos parcial, dos aspectos da álgebra considerados: memória, generalização, equivalência da igualdade, linguagem e estrutura. O domínio pleno parece ter sido atingido apenas pelo aluno que apresentou a solução da figura 5. Cremos que a solução apresentada na figura 4, para a primeira tarefa, coloca em evidência o papel do aspecto memória relacionado com a interpretação da tarefa proposta. A perda de conexão entre o enunciado e sua tradução ocorreu no momento dessa tradução.

É na primeira tarefa que devemos focar nossa atenção. Dos noves registros obtidos seis foram realizados dentro do quadro da Aritmética, isso pode ser explicado, como destacado por Chevallard (1984), pela economia da solução aritmética, mas pode também indicar uma falta de segurança na modelagem algébrica da tarefa apresentada.

Não cremos que seremos capazes de responder a todas essas questões em nossa pesquisa, mas pretendemos ainda aplicar o mesmo teste diagnóstico a estudantes dos três anos finais do Ensino Fundamental ciclo II com o objetivo de acompanhar a evolução dos aspectos na realização das tarefas propostas. Observamos aqui que a análise dos documentos oficiais e dos livros didáticos nos conduziu a pensar nessa evolução, pois os aspectos são privilegiados em diferentes momentos.

Os resultados encontrados mostram a necessidade de um trabalho que considere explicitamente os diferentes aspectos na formação dos professores de forma que os mesmos possam reconhecê-los nas produções de seus estudantes e auxiliá-los naqueles que apresentam maior dificuldade.

6. Referências

CHEVALLARD. Y. Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathematiques au college **:** Première Partie. **Petit X**, Grenoble, n.5, p. 51 – 94, 1984.

CHEVALLARD. Y. Le passage de l'arithmetique a l'Algebre dans des Mathematiques au College : Deuxieme Partie. Perspectives Curriculaires: La notion de Modelisation. **Petit X**, Grenoble**,** n. 19, p. 43 - 72, 1989.

CHEVALLARD. Y. Le passage de l'arithmetique a l'Algebrique dans des l' Enseignement des Mathematiques au College : Troisième partie Vois Didactique et Problemes Didactiques. **Petit x**, Grenoble, n. 23 pp. 5 - 38, 1990.

CHEVALLARD. Y. Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. **Skholê**, Paris, n. 7, p. 45-64, 1997.

CHEVALLARD. Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. **Éditions Fabert,** Paris, n.2, p. 81-104, 2002.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l' enseignement des mathématiques.** Thèse de Doctorat d'Etat (specialité didactique des mathematiques). Paris : IREM Pariis VII**,** 1984. 340 p.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, Paris, n. 7.2, p. 5-31, 1986.

DUVAL. R. **Semiósis e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagem intelectual.** Tradução Lênio FernandesLevy et Marisa Rasâni Alves da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL. R. **Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma - Entrar no modo Matemático de pensar: os registros de representações Semióticas.** Organização Tânia M. M. Campos; tradução Marlene Alves Dias. v. 1. São Paulo: Proem Editora , 2011.

DUVAL. R. **Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma.** Organização Tânia M. M. Campos; tradução Marlene Alves Dias. v. 2. São Paulo: Proem Editora, 2012. No prelo.

ROBERT A. **L' Enseignement de mathématiques au lucée. Un point de vue didactique**. Paris : Eclipses, 1999.

ROBINET, J. **La genese du calcul algebrique.** Paris : IREM Paris 7, 1989.