

## SISTEMAS LINEARES: PROPOSTA DE UMA ENTRADA EXPERIMENTAL DESENVOLVIDA EM AMBIENTE COMPUTACIONAL

*Jeferson da Silva Gonçalves*  
*Universidade Bandeirante Anhanguera*  
*jgoncalves@splicenet.com.br*

*Monica Karrer*  
*Universidade Bandeirante Anhanguera*  
*mkarrer@uol.com.br*

### Resumo

Neste artigo são apresentados os resultados de um estudo sobre sistemas lineares, que objetivou investigar as trajetórias de estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública de São Paulo, diante de um experimento de ensino que explorou relações entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural, integrando o *Winplot*. A abordagem consistiu em uma entrada experimental no ambiente computacional, para favorecer a investigação das classificações dos sistemas e das consequências gráficas da existência ou não da proporcionalidade entre os coeficientes de sua representação algébrica. A pesquisa foi fundamentada na teoria dos registros de representações semióticas e conduzida segundo a metodologia de *Design Experiment*. O estudo englobou situações de sistemas possíveis, determinados ou indeterminados, e de sistemas impossíveis. Neste artigo, optamos por apresentar os resultados do caso impossível. A análise das produções dos sujeitos revelou avanços nas investigações das relações entre representações algébricas e gráficas.

**Palavras chave:** Sistemas Lineares; Representações Semióticas; *Winplot*.

### 1. Introdução

Este artigo apresenta os resultados de um estudo relativo ao conteúdo de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, tópico desenvolvido no ensino fundamental e retomado no ensino médio. O estudo global tratou de todas as classificações de sistemas, ou seja, os casos possível e determinado, possível e indeterminado e impossível, sendo que no presente artigo será apresentada, de forma mais minuciosa, a análise das trajetórias dos estudantes nas atividades relativas aos sistemas impossíveis. O estudo consistiu em uma entrada experimental desenvolvida com o auxílio da ferramenta computacional *Winplot*, aliada ao ambiente papel e lápis, visando a exploração das relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural. Em linhas gerais, o experimento foi

elaborado de forma a proporcionar ao estudante um ambiente favorável para a investigação da existência ou não da proporcionalidade entre os coeficientes da representação algébrica e suas consequências na classificação e na representação gráfica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Na figura seguinte, apresenta-se um exemplo da forma como isso foi explorado no ambiente computacional.

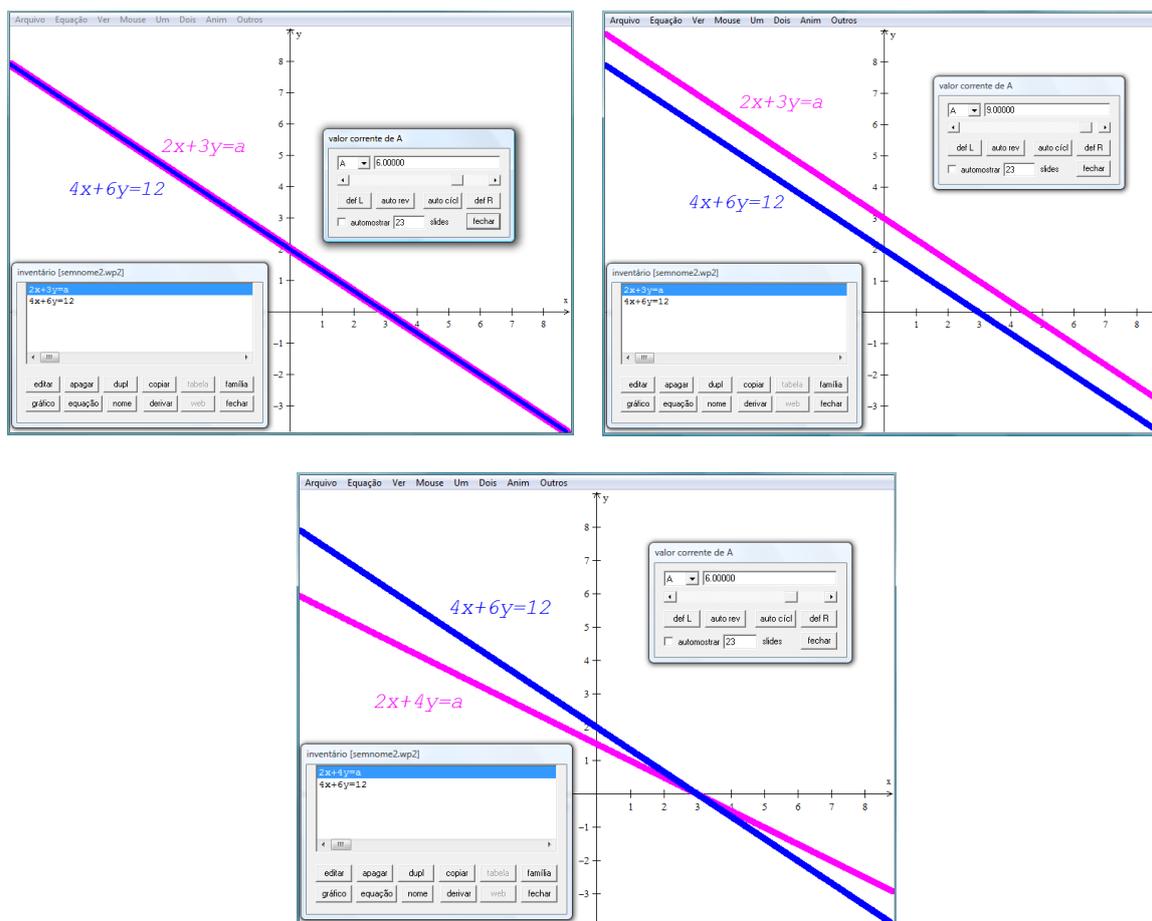


Figura 1 – Apresentação da construção realizada no Winplot.

Pode-se observar que, ao manipular o valor do coeficiente na representação algébrica, há uma adaptação simultânea na representação gráfica. Por exemplo, alterando o valor de "a", notamos a condição algébrica para que duas retas coincidentes se "transformem" em paralelas. Foram propostas atividades no ambiente papel e lápis para que o estudante pudesse concluir ao final do experimento, por meio de investigações no ambiente computacional, que em um sistema do tipo 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
 (com  $a, b, c, d, e$  e  $f$  não

nulos), se  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  o sistema será possível e indeterminado, se  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , o sistema será impossível e se  $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ , o sistema será possível e determinado.

Na revisão da literatura científica, foram observadas pesquisas que avaliaram o ensino e a aprendizagem de sistemas lineares, tais como as de Freitas (1999) e Battaglioli (2008), apontando tanto problemas dos estudantes no estabelecimento de conversões entre representações dos registros algébrico e gráfico como a ênfase dada pelos livros didáticos ao registro algébrico. Tal fato motivou a elaboração da presente pesquisa, uma vez que revelou a necessidade de um trabalho de exploração de relações entre representações do registro algébrico com representações de outros registros, tais como o gráfico e da língua natural, para uma construção mais sólida do conceito. Dado que o *software Winplot* favorece a análise simultânea entre representações dos registros gráfico e algébrico, optamos por integrá-lo ao experimento de ensino.

Desta forma, teve-se por objetivo investigar em que aspectos este tipo de abordagem influenciaria os estudantes na compreensão de sistemas lineares e em que medida o *software* adotado poderia contribuir para essa compreensão. Partiu-se da hipótese de que o experimento proposto permitiria ao sujeito avaliar as unidades significativas das representações dos registros gráfico e algébrico de sistemas lineares, bem como suas relações. Isto porque, investigando a existência ou não da proporcionalidade dos coeficientes presentes na representação algébrica, seria possível observar as consequências no registro gráfico. A seguir, apresenta-se a descrição da fundamentação teórica e de pesquisas que embasaram a construção deste estudo.

## 2. Fundamentação Teórica e Revisão de Literatura

Os pressupostos teóricos de Duval (1995, 2000, 2006), referentes aos registros de representações semióticas, fundamentaram este estudo, dada a preocupação de se construir um experimento explorando relações entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural. Para Duval (2006), um registro de representação semiótica é um sistema semiótico que permite três atividades cognitivas, a formação, o tratamento e a conversão. A formação de representações em determinado registro exprime uma representação mental ou evoca um objeto real. Quando se faz uma transformação entre duas representações, tem-se um

tratamento ou uma conversão. Se a transformação ocorrer no interior de um mesmo registro, tem-se um tratamento. Por exemplo, ao escalonar um sistema linear no registro algébrico, são realizados tratamentos no interior desse registro. Quando a transformação parte de uma representação de um registro resultando em uma representação em outro registro, tem-se uma conversão. É o caso, por exemplo, de representar graficamente um sistema linear, partindo de sua representação algébrica.

Duval (1995) alerta para o fato da existência do fenômeno da não congruência na atividade de conversão. A existência de congruência entre duas representações de registros distintos ocorre quando há correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significativa de representação de partida para uma unidade significativa correspondente no registro de chegada. Se pelo menos uma dessas condições não for verificada, a conversão é não congruente.

Os registros de representações semióticas podem ser classificados quanto a sua funcionalidade e discursividade. Um registro é monofuncional quando suas representações são tratadas de forma algoritmizável. Caso contrário, ele é denominado multifuncional. Se permitir o discurso, ele é classificado como discursivo. No presente trabalho, utilizamos os registros algébrico, gráfico e da língua natural, classificados, respectivamente, em monofuncional discursivo, monofuncional não discursivo e multifuncional discursivo. Duval (1995) relata que é frequente o ensino de Matemática privilegiar os registros monofuncionais discursivos, o que pode trazer ao aluno prejuízos na compreensão de um conteúdo, dado que uma abordagem com foco em um único tipo de registro pode gerar dificuldades em diferenciar um objeto matemático de sua representação e em estabelecer conversões e, por este motivo, procuramos integrar representações de registros de diferentes funcionalidades.

Na revisão de literatura foram encontrados diversos estudos voltados à análise do ensino e da aprendizagem de sistemas lineares embasados na teoria dos registros de representações semióticas. Por exemplo, Freitas (1999) identificou, em seus sujeitos de pesquisa, dificuldades na atividade de conversão entre representações dos registros algébrico e gráfico e no reconhecimento do tipo de sistema a partir de leitura gráfica. Battaglioli (2008), em sua análise de livros didáticos, observou um enfoque mecanizado, com predomínio do registro algébrico e Pantoja (2008) notou dificuldades dos estudantes em efetuar conexões entre os métodos do escalonamento e de substituição.

Pesquisas voltadas à utilização de ferramentas computacionais no ensino de Matemática, tais como as de Borba e Penteado (2010) e Noss e Hoyles (1996), defendem o uso de tais recursos de forma a permitir avanços na compreensão de um objeto matemático, explorando aspectos que não seriam possíveis em outros tipos ambientes de ensino. Em coerência com essa visão e com a teoria dos registros de representações semióticas, selecionamos o *software Winplot*, dado que ele permitiu explorar, de forma dinâmica, relações entre representações dos registros gráfico e algébrico. Na seção seguinte, apresentamos a metodologia adotada e as descrições dos sujeitos, do material e do ambiente no qual o experimento foi desenvolvido.

### **3. Metodologia e Desenvolvimento**

O estudo foi elaborado de acordo com a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003). Neste tipo de metodologia, elaboram-se experimentos de domínios matemáticos específicos, com vistas a criar inovações no ensino. Para isso, um estudo minucioso das trajetórias dos sujeitos, de suas dificuldades e de seus avanços é necessário. As características cíclica, iterativa e de flexibilidade são inerentes a essa metodologia, uma vez que, apesar de um desenho inicial ser elaborado, este pode sofrer reformulações e adaptações durante a condução do processo, caso as produções apresentadas pelos sujeitos revelem tal necessidade.

Optamos pelo modelo aplicado em pequena escala, previsto nesta metodologia, para favorecer uma análise mais detalhada das trajetórias dos estudantes. Neste caso, quatro estudantes voluntários com faixa etária entre treze e quatorze anos participaram do experimento. Na ocasião da aplicação, eles cursavam o nono ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Naquele momento, esses sujeitos já haviam estudado sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas por uma abordagem que privilegiou o registro algébrico, porém, sem qualquer exploração de análises de relações entre a proporcionalidade dos coeficientes e suas consequências no registro gráfico.

Para avaliar seus conhecimentos prévios, foi aplicada, de forma individual, uma atividade diagnóstica preliminar, contendo questões sobre o significado de um sistema linear, sobre resoluções de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas por algum método já estudado (adição, substituição ou comparação), sobre a representação gráfica de

um sistema, sobre suas três classificações, e, por fim, sobre a análise das relações entre a proporcionalidade dos coeficientes e a representação gráfica de um sistema linear. Dada a caracterização dos nossos sujeitos, era esperado que eles não conseguissem resolver apenas o último tipo de questão, uma vez que a questão de proporcionalidade não havia sido explorada no ensino deste conteúdo.

Com o intuito de favorecer a interação entre os sujeitos na construção do conhecimento, na aplicação das demais atividades do experimento os estudantes foram organizados em duplas, identificadas nesse artigo por D1 e D2. A aplicação ocorreu em horário extraclasse, em um laboratório de informática. Cada dupla trabalhou em um computador que já possuía o *software Winplot*. O pesquisador contou com o auxílio de um aluno monitor do ACESSA Escola, programa desenvolvido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e coordenado pela Fundação para o Desenvolvimento da Educação. A atuação do pesquisador se deu de forma a orientar o processo, realizando intervenções somente em momentos de bloqueio. Coube a ele, também, a identificação das adaptações necessárias no experimento diante das produções fornecidas pelos estudantes.

Para a análise das trajetórias dos estudantes, foram coletados os seguintes instrumentos: registros escritos presentes nas fichas das atividades de cada dupla, a áudio-gravação das falas dos sujeitos e as telas dos computadores capturadas por meio do *software Camtasia*. Na próxima seção, apresentamos a descrição e a análise da atividade selecionada para esse artigo.

#### **4. Descrição da Atividade e Apresentação dos Resultados**

Na análise da atividade diagnóstica preliminar, constatamos que as dificuldades dos estudantes não residiam apenas em questões que envolviam a análise das relações entre a proporcionalidade dos coeficientes e a representação gráfica de um sistema linear. Apesar de os sujeitos já terem estudado sistemas lineares antes da aplicação de nosso experimento e de as questões propostas nesta atividade diagnóstica serem próximas das presentes nos livros didáticos e no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, suas produções revelaram que eles não compreendiam o significado de um sistema linear e suas classificações e que não sabiam resolver um sistema linear por qualquer método, conforme ilustrado na figura seguinte.

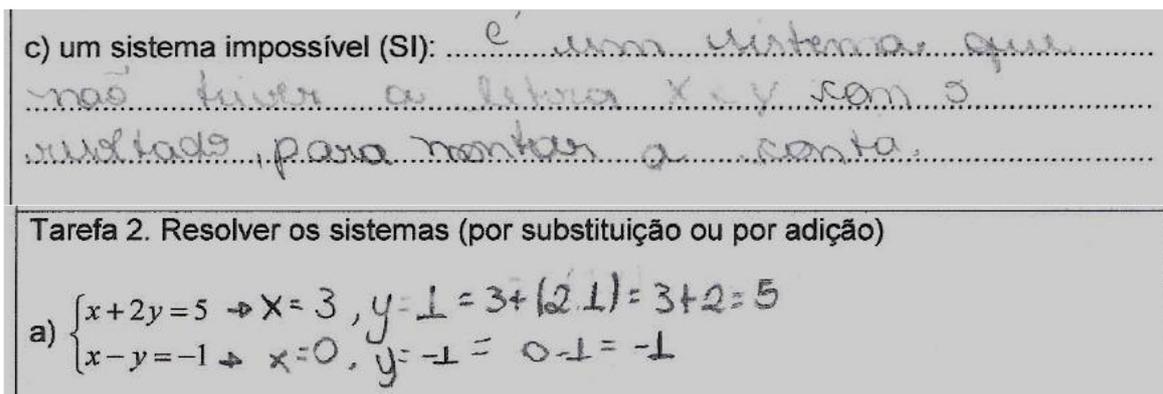


Figura 2 – Amostra de respostas dos alunos no Questionário Preliminar.

Tal constatação nos levou a realizar uma reformulação da proposta inicial, incluindo uma revisão de conteúdo antes da aplicação das atividades do experimento. Com isso, o pesquisador retomou com os estudantes o conceito de sistema linear, suas possíveis classificações, a resolução pelo método da substituição e a representação gráfica de uma reta, a fim de garantir os pré-requisitos necessários para a condução do experimento inicialmente elaborado. Após essa revisão, foram aplicadas cinco atividades sobre sistemas lineares. Inicialmente os estudantes realizavam experimentações no *software*, observando as relações entre os registros algébrico e gráfico. No ambiente papel e lápis, na maioria das tarefas, também foram requisitadas justificativas na língua natural escrita.

Na aplicação da primeira atividade, referente ao caso possível e indeterminado, notamos que inicialmente os estudantes só tinham sucesso quando operavam no ambiente computacional. Quando solicitados a operar fora desse ambiente, eles não conseguiam

observar que, para um sistema do tipo  $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$  (com  $a, b, c, d, e$  e  $f$  não nulos) ser

possível e indeterminado, seria necessário que  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ , gerando assim duas retas

coincidentes. Dada essa constatação e coerente com a metodologia adotada, o pesquisador providenciou atividades complementares com e sem o auxílio do *software*. Inicialmente as duplas avaliaram corretamente cada caso particular, notando a existência de proporcionalidade, porém, a relação genérica da situação só ocorreu quando o pesquisador solicitou aos estudantes que comparassem todas as atividades propostas, analisando o que havia em comum entre elas. Após essa intervenção, apesar dos equívocos apresentados na produção da língua natural, os estudantes demonstraram sucesso neste tipo de análise, conforme ilustrado a seguir.

Tarefa 5. Sem utilizar o Winplot, forneça um exemplo de sistema (diferente dos anteriores) que gere duas retas coincidentes, ou seja, que seja um sistema possível e indeterminado. Como você pensou para construir esse sistema?

$$\begin{cases} 3x + 9y = 6 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

0 resultado de todos os divisões é 3 e se o resultado é igual em todos os divisões, as retas são obrigatoriamente coincidentes

Tarefa 4. Sem utilizar o Winplot e sem resolver o sistema, como você explicaria para um colega que a representação gráfica do sistema linear  $\begin{cases} 12x + 6y = 18 \\ 2x + 1y = 3 \end{cases}$  é constituído por duas retas coincidentes?

Se dividirmos os coeficientes x e y e o termo independente e os resultados forem iguais é porque as retas são coincidentes

Figura 3 – Produções das duplas 1 e 2 (respectivamente) na Atividade Adicional.

Neste artigo, optamos por descrever com maior detalhamento o caso impossível. A atividade proposta sobre este caso é apresentada a seguir.

Quadro 1. Apresentação da atividade do caso impossível.

**ATIVIDADE 3 – ANÁLISE DO CASO SI**

Tarefa 1. É dado um sistema linear com duas equações e duas incógnitas:  $\begin{cases} 6x + 6y = a \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$ .

Cada equação representa uma reta no plano. Abra o arquivo 7 do *Winplot*. Na tela são dadas duas retas coincidentes e suas respectivas equações. Vá em “animação” e selecione “parâmetros A-W”. Altere o valor de “a” de modo que as retas fiquem paralelas distintas. Que valores de “a” satisfazem essa situação? .....

Qual a classificação deste tipo de sistema? Justifique .....

Tarefa 1a. Selecione no *Winplot*, um caso que gerou duas retas paralelas distintas. Complete a tabela:

	Coefficiente de x	Coefficiente de y	Termo independente
Primeira equação			
Segunda equação			

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os coeficientes da segunda equação? .....

Selecione no *Winplot* outro caso que gerou duas retas paralelas distintas. Complete a tabela:

	Coefficiente de x	Coefficiente de y	Termo independente
Primeira equação			
Segunda equação			

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os coeficientes da segunda equação? .....

Tarefa 1b. Sem usar o *Winplot*, qual deve ser o valor de “b” no sistema  $\begin{cases} 4x + 4y = 12 \\ x + y = b \end{cases}$  para

que se obtenham duas retas paralelas distintas? .....  
Agora faça o exercício no *Winplot* e compare o resultado com sua resposta.....

Tarefa 2. É dado um sistema linear com duas equações e duas incógnitas:  $\begin{cases} -2x + 3y = a \\ -8x + 12y = 16 \end{cases}$ .

Cada equação representa uma reta no plano.

Abra o arquivo 7 do *Winplot*. Na tela são dadas duas retas coincidentes e suas respectivas equações. Vá em “animação” e selecione “parâmetros”. Altere o valor de “a” de modo que as retas fiquem paralelas distintas. Que valores de “a” satisfazem essa situação?

Tarefa 2a. Selecione no *Winplot*, um caso que gerou duas retas paralelas distintas. Complete a tabela:

	Coefficiente de x	Coefficiente de y	Termo independente
Primeira equação			
Segunda equação			

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os coeficientes da segunda equação?.....

Tarefa 3. Agora construa no papel a representação gráfica do sistema linear  $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 8x + 8y = 8 \end{cases}$ .

Faça o mesmo no *Winplot* e compare as duas construções. O que observou? .....

Tarefa 4. Complete as tabelas com valores de x e y que satisfazem cada equação.

Equação 1:  $2x + 2y = 6$

x	-3			0				1	
y		1				0			

Equação 2:  $8x + 8y = 8$

x	2						3		
y		6			3			2	

Tarefa 5. Resolva o sistema da tarefa anterior. O que você observou? Qual é a solução desse sistema? Como ele é classificado?.....

Desta forma, podemos afirmar que a representação gráfica de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, classificado como sistema impossível, será

A quantidade de soluções de um sistema impossível é ..... Isto porque retas paralelas não possuem ponto comum.

Tarefa 6. Para cada sistema linear, sem utilizar o *Winplot*, determine para que valores de “a” ele será um sistema impossível.

a)  $\begin{cases} x + y = a \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 4x + 10y = a \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -2x + 4y = 10 \\ 6x - 12y = a \end{cases}$

Qual seria a representação gráfica desses sistemas?.....

Tarefa 7. Após a realização das tarefas anteriores, determine a condição para que o

gráfico da solução do sistema linear  $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$  (com a, b,c,d,e e f não nulos) seja

representado por duas retas paralelas distintas, ou seja, para que o sistema seja impossível.

Fonte: GONÇALVES, 2012, p. 255-258

Essa atividade teve como objetivo geral proporcionar um ambiente favorável para que os alunos realizassem uma análise qualitativa de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, por meio da investigação das relações entre suas representações algébrica e gráfica, esta última dada por duas retas paralelas distintas. Pretendia-se que o aluno, com o auxílio do *software Winplot*, investigasse as relações de proporcionalidade entre coeficientes e termos independentes, verificando que, um sistema do tipo 
$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

(com  $a, b, c, d, e$  e  $f$  não nulos) seria impossível quando  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ .

Nas tarefas 1 e 2 esperava-se que os alunos, alterando o valor de “a” no *Winplot*, verificassem que duas retas paralelas coincidentes se “transformariam” em duas retas paralelas distintas, se existisse uma proporção apenas entre os coeficientes de  $x$  e  $y$ , e não entre os termos independentes. Na tarefa 1, no ambiente computacional, os alunos puderam constatar a obtenção de duas retas paralelas distintas para qualquer valor de “a” diferente de 8. Ainda, classificaram o sistema como impossível. Em seguida, eles preencheram as tabelas com outros casos de sistemas impossíveis. Pretendíamos que, com o preenchimento das tabelas, eles conjecturassem sobre a relação entre os coeficientes e termos independentes de sistema cuja representação gráfica era dada por duas retas paralelas. Na tarefa 1b, os estudantes observaram, sem usar o *software*, que as retas seriam paralelas distintas para qualquer valor de “b” diferente de 3, conforme ilustrado a seguir.

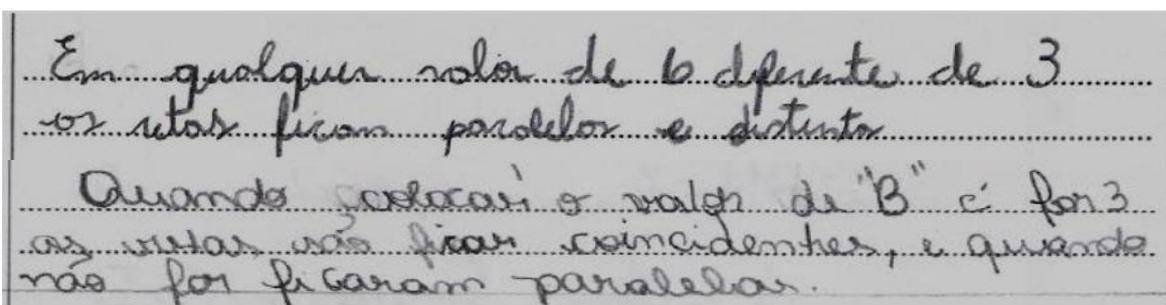


Figura 4 – Produções das duplas 1 e 2 (respectivamente) – Atividade 3 – Tarefa 1b.

É provável que a atividade anterior, relativa ao caso indeterminado de sistemas lineares, influenciou os estudantes a focar suas atenções na análise das relações entre coeficientes e termos independentes, ou seja, eles transferiram a estratégia de análise utilizada anteriormente adaptando-a a esta nova situação. Ressalta-se que, na aplicação da atividade do caso indeterminado, este tipo de análise não foi imediato, necessitando de várias intervenções do professor -pesquisador.

Dado que a tarefa 2 era semelhante à anterior, os estudantes não apresentaram dificuldades em resolvê-la. Ao serem questionados a respeito da relação observada, apresentaram com sucesso suas conclusões, conforme ilustrado na Figura 5.

	Coefficiente de $x$	Coefficiente de $y$	Termo independente
Primeira equação	-2	3	3
Segunda equação	-8	12	16

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os valores dos coeficientes da segunda equação?

A divisão entre os coeficientes tanto de  $x$  quanto de  $y$  são iguais a 4 pois isso não ocorre no divisão entre os termos independentes

Figura 5 – Produção da dupla D1 – Atividade 3 – Tarefa 2a.

Podemos notar que eles buscaram a razão entre os elementos da segunda equação pelos da primeira. Na tarefa 3, pretendíamos que os alunos construíssem, no ambiente papel e lápis, a representação gráfica do sistema proposto no registro algébrico, observando a obtenção de duas retas paralelas distintas. Ainda, esperávamos que justificassem que tal fato ocorreu pela existência de proporcionalidade entre os coeficientes de  $x$  e  $y$  mas não entre os termos independentes. Observamos que as duas duplas iniciaram a tarefa realizando um tratamento no registro algébrico, ou seja, isolaram  $y$  em função de  $x$  em uma das equações. Em seguida, utilizaram a representação tabular com a finalidade de encontrar pares ordenados para a construção do gráfico. Naquele momento, elas não resolveram o sistema, apenas constataram que a representação gráfica era dada por duas retas paralelas, conforme ilustrado pela produção da dupla D2 na figura 6.

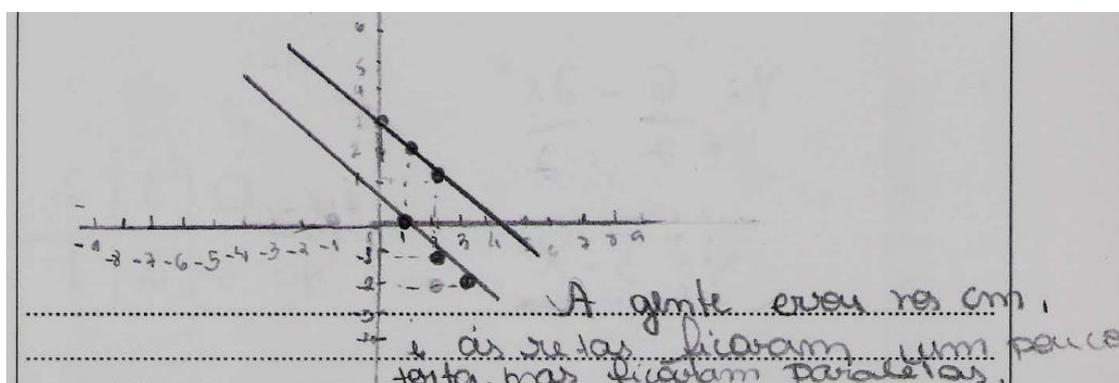


Figura 6 – Produção da dupla D2 – Atividade 3 – Tarefa 3.

Na tarefa 4, pretendíamos que os alunos observassem, por meio do preenchimento da tabela, que para os pares construídos, nenhum se repetia nas duas situações. Na tarefa 5, tínhamos por objetivo que, na resolução do sistema no ambiente papel e lápis, os estudantes observassem o aparecimento de uma "contradição". Nesta fase, os alunos poderiam relacionar que um sistema do tipo  $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$  (com  $a, b, c, d, e$  e  $f$  não nulos), com  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , geraria duas retas paralelas, seria impossível, teria solução vazia e sua resolução algébrica recairia em uma "contradição". Na tarefa 4 os alunos completaram as tabelas de forma correta, mas deixaram de observar que, para os valores selecionados, não existia um par ordenado satisfazendo as duas equações simultaneamente. Na tarefa 5, as duas duplas iniciaram um tratamento no registro algébrico. Neste caso, isolaram  $y$  em função de  $x$  em uma das equações, substituíram o obtido na outra equação, recaindo em uma "contradição", conforme ilustrado na Figura 7.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \quad 3x + 2(3 - x) = 8$$
$$3x + 6 - 2x = 8$$
$$x + 6 = 8$$
$$x = 2$$

Sistema Impossível

Figura 7 – Produção da dupla D1 – Atividade 3 – Tarefa 5.

Ao serem questionados sobre o conjunto solução do sistema, as duplas relataram que ele era vazio. Com o intuito de verificar se a análise da relação entre coeficientes e termos independentes, especificamente no caso de sistemas impossíveis, seria transferida para situações quaisquer sem o uso do *software*, foi apresentada a tarefa 6. Notamos que os estudantes tiveram sucesso nessa análise, conforme exposto a seguir.

Tarefa 6. Para cada sistema linear, sem utilizar o Winplot, determine para que valores de "a" ele será um sistema impossível.

a)  $\begin{cases} x+y=a \\ 3x+3y=6 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 4x+10y=a \end{cases}$       c)  $\begin{cases} -2x+4y=10 \\ 6x-12y=a \end{cases}$

Ai. Infinito  
números  
menor o 2.

B. Qualquer  
número  
menor o 16.

C. Qualquer  
número  
menor o  
-30.

Figura 8 – Produção da dupla D2 – Atividade 3 – Tarefa 6.

Ainda, nesta tarefa eles relataram que o sistema seria impossível e que as retas ficariam paralelas. A tarefa 7 objetivou avaliar se os alunos conseguiriam generalizar suas conclusões relativas à análise de sistemas impossíveis para um sistema do tipo

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \text{ (com } a, b, c, d, e \text{ e } f \text{ não nulos), ou seja, se apresentariam a condição de}$$

obtenção de duas retas paralelas distintas. Conforme apresentado na Figura 9, notamos que os estudantes revelaram a compreensão esperada para esta atividade.

The image shows two handwritten mathematical expressions on lined paper. The first expression is  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ . The second expression is  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ .

Figura 9 – Produções das duplas D1 e D2 (respectivamente)– Atividade 3 – Tarefa 7.

Pudemos observar, em consonância com Duval (1995), que os estudantes apresentaram avanços na compreensão do conceito e que as habilidades em operar com representações nos diferentes registros e em efetuar coordenações entre eles favoreceram uma construção mais sólida do objeto matemático "sistemas lineares".

Após o tratamento desse caso, foram avaliados os sistemas lineares do tipo  $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$  (com  $a, b, d$  e  $e$  não nulos e  $c$  ou  $f$  nulos) e, por fim, o caso de sistemas possíveis e determinados. A seguir, apresentamos as conclusões deste trabalho.

## 5. Conclusão

Foi realizado um estudo relativo à análise da qualidade de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas nas suas três classificações, sendo que este artigo procurou apresentar, de forma mais minuciosa, a análise de sistemas lineares impossíveis com duas equações e duas incógnitas. Na análise do caso impossível, esperávamos que os estudantes, por meio de uma entrada experimental no ambiente computacional integrada a atividades no ambiente papel e lápis, concluíssem que um sistema do tipo 
$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \text{ (com } a, b, c, d, e \text{ e } f \text{ não nulos)}$$
 seria impossível quando  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$  e, neste caso, teria por representação gráfica duas retas paralelas. Ainda, pretendia-se que observassem que neste caso a solução seria vazia e que a resolução algébrica recairia em uma "contradição". Pudemos constatar que a realização da atividade anterior pelos estudantes, relativa ao caso indeterminado, demandou, em diversos momentos, reformulações no desenho original e inserção de novos questionamentos pelo professor-pesquisador, o que estava previsto na metodologia selecionada. Já na resolução do caso impossível, os alunos demonstraram independência e sucesso na seleção de estratégias de análise, não necessitando de interferências do professor-pesquisador. Ressaltamos que o trabalho da atividade anterior permitiu que os estudantes focassem suas atenções na análise dos coeficientes e tal fato favoreceu uma construção sólida de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, dado que os estudantes demonstraram habilidade tanto no reconhecimento de um sistema impossível por meio de diversas representações, bem como na atividade de conversão entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural. A construção realizada no *Winplot* permitiu um primeiro contato com este tipo de análise, ao favorecer o tratamento dinâmico das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico de sistemas lineares. Ressalta-se que, na atividade anterior relativa ao caso indeterminado, o trabalho exclusivo neste ambiente não foi suficiente para que os alunos observassem as relações entre os coeficientes e os termos independentes, sendo necessário um trabalho conjunto com atividades no ambiente papel e lápis. Destacamos que a representação tabular desempenhou um papel primordial para que as duplas iniciassem uma estratégia de análise dos coeficientes.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para a área de Educação Matemática, em especial para o ensino fundamental, ao propor práticas diferenciadas de abordagem dos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.

## 6. Agradecimentos

Jeferson da Silva Gonçalves agradece ao apoio financeiro dado pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, a qual permitiu o desenvolvimento deste trabalho.

## 7. Referências

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos**. 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo, 2008.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3ª Ed. 1ª Reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção *Tendências em Educação Matemática*, 2).

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design Experiments in education research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

\_\_\_\_\_. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. **Proceedings of the 24<sup>th</sup> PME**. Hiroshima: Department of Mathematics Education, Hiroshima University, v.1, p. 55-69, 2000.

\_\_\_\_\_. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, n. 61, p. 103-131, 2006.

FREITAS, I. M. **Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno**. 1999. 96 f. Dissertação (Mestrado Ensino da Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo, 1999.

GONÇALVES, J. S. **Análise da qualidade de sistemas lineares: um estudo sobre conversões de registros com auxílio do software Winplot**. 2012. 296f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, São Paulo, 2012.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers**. v. 17. Mathematics Education Library, 1996.

**PANTOJA, L. F. L. A conversão de registros de representação semiótica no estudo de sistemas de equações algébricas lineares.** 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.