INVESTIGAÇÕES EM SALA DE AULA DE MATEMÁTICA: A GEOMETRIA FRACTAL E AS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS INFINITAS

Dora Soraia Kindel
UFRRJ
soraiakindel@yahoo.com.br

Resumo:

Conceitos envolvendo a ideia de infinito têm intrigado a humanidade há séculos. Com o avanço tecnológico novas formas de abordagem para infinito têm surgido, entre elas os fractais, mudando o olhar sobre a geometria e sequências numéricas. Embora o infinito seja tema presente na matemática avançada, ele aparece subliminarmente nos textos dos livros didáticos sendo pouco discutido. A necessidade de trazê-lo para a sala de aula em todos os níveis é essencial tanto para compreender as sequências e séries infinitas, quanto derivadas e integrais, etc.. Esse minicurso tem por objetivo discutir o infinito a partir das sequências numéricas associadas ao cálculo do perímetro e/ou da área de alguns fractais. E tem como metodologia o fazer do professor e as discussões sobre as conjecturas e generalizações que possam emergir das tarefas investigativas propostas num ambiente colaborativo de aprendizagem. Tarefa é entendido especificamente como aquilo que o professor propõe ao aluno.

Palavras-chave: Fractais; sequências numéricas; tarefas investigativas.

1. Introdução

Como professora, no Ensino Fundamental e Médio, sempre acompanhei com curiosidade o desenvolvimento dos trabalhos de alunos, quando em sala de aula os mesmos engajavam-se em discussões matemáticas, em particular com questões envolvendo aspectos dos conjuntos numéricos, tais como: racional/irracional, conjuntos densos/não densos, finito/infinito; intervalos aberto/fechado, limitado/ilimitado; análise das representações decimais de números como exato/aproximado, periódico/não periódico e cardinalidade de conjuntos.

Além disso, trabalhando com o Ensino Fundamental, observei que nos livros didáticos o infinito é visto como propriedade de alguns conjuntos numéricos. E para justificar este fato, o argumento usado é o de que "sempre é possível encontrar mais um", para o caso dos conjuntos naturais N e inteiros Z. Passando sem comentários sobre o conjunto dos números racionais Q e trazendo finalmente o conjunto dos números reais R, em que a reta real é apresentada como uma representação gráfica.

Um outro momento em que o infinito também aparece é para diferenciar números na sua representação decimal. Neste caso, discutem-se regras para a determinação da fração geratriz, de uma dízima periódica simples ou composta e vice-versa, quando as frações geratrizes possuem denominadores primos com 10 e sua potência múltipla, ou para definir os irracionais como aqueles que não podem ser escritos na forma a/b e que apresentam na sua notação decimal uma dízima não periódica.

No Ensino Médio o infinito aparece ainda mais velado no tópico das progressões aritméticas (PA) e das progressões geométricas (PG). Em geral, apresentam-se três termos iniciais e os alunos devem continuar a progressão (por exemplo, 3, 5, 7...). Os três pontinhos após o terceiro termo indicam que o mesmo continua infinitamente. Mas como bastam ser preenchidos com mais dois ou três termos, este infinito continua transparente. E no caso da soma de uma PG, com razão entre zero e um, ela é tratada como um caso particular, para a qual existe uma fórmula específica. Consequentemente, o estudo do infinito, em particular, das sequências infinitas, não é abordado de forma explícita nestes níveis de ensino.

A partir dessas observações algumas questões foram sendo levantadas e desde então venho pesquisando sobre o assunto. No primeiro trabalho sistematizado – a dissertação de mestrado (KINDEL, 1998), procurei entender o que alunos sabiam e compreendiam sobre a noção de densidade nos racionais. E mais recentemente venho me debruçando sobre situações problemas que envolvem o infinito.

Meu principal interesse está voltado em analisar questões de uso corrente em salas de aula e readaptá-las de forma a que questões sobre o infinito sejam abordadas tais como: sequencias e séries infinitas, problemas envolvendo áreas e perímetros, os fractais, as representações decimais infinitas dos números racionais e irracionais, entre outros.

Em função do exposto, para esse minicurso, elaborou-se três situações que são apresentadas de forma diferenciada para discutir o tema com os professores desses níveis de ensino. O objetivo geral, portanto, é fomentar uma discussão acerca da presença do infinito nos diferentes contextos da sala de aula e refletir sobre a possibilidade desse conteúdo ser apresentado para estudantes desses níveis.

2. Referencial Teórico

Como professora me apoio na metodologia de design experiment (COBB, 2003), por entender que é possível e necessário que as tarefas e respectivos objetivos se adequem às necessidades do grupo enquanto realizam a atividade. Como esse curso não apresenta continuidade e o tempo é relativamente curto, proponho que as tarefas sejam realizadas em grupo visando um trabalho colaborativo entre os participantes. Ou seja, que as estratégias de resolução das situações problemas sejam discutidas e que o consenso sobre a melhor estratégia seja discutida e decidida no grupo e os resultados apresentados no grupão.

E para facilitar o diálogo, as tarefas propostas apresentam questões abertas para propiciar a discussão no grupo. Ou seja, apresentam questões do tipo " o que acontece se ..." ou " o que pode afirmar sobre ..." No nosso caso, " o que acontece se ... eu dividir indefinidamente um segmento em tres partes dele sempre retirar o do meio?" ou ainda, " o que pode afirmar sobre os fractais?"

Mas o que deu origem ao fractal e o que vem a ser um fractal?

A origem dos fractais se deu entre os anos de 1857 e 1913 quando alguns cientistas catalogavam alguns objetos que julgavam não ter valor científico na época e como tal eram denominados " demônios". Segundo Clemente (s.data), " a partir desse trabalho surge a ideia de fractal".

O fractal (do latim fractus, fração, quebrado) é uma figura com propriedades e características peculiares que o diferencia das figuras geométricas habituais.

O fractal pode ser dividido em partes, cada uma delas semelhante ao todo, objeto original. Em muitos casos ele pode ser obtido por um processo iterativo ou recorrente. Desta forma o fractal apresenta duas características muito frequentes, uma complexidade infinita, nunca poderemos representá-lo totalmente, pois sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores repetindo um determinado padrão com ligeiras e constantes variações de si mesmo no seu interior, a autosimilaridade. Como conseqüência dessa auto-similaridade, as diferentes partes de um fractal se mostram similares ao todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

O termo fractal foi criado, pelo matemático francês Benoit Mandelbrot em 1975, a partir do adjetivo latino fractus e do verbo frangere. Mas foi a partir dos anos 60, com o avanço científico e tecnológico, que surgem os primeiros fractais. Eles se dividem basicamente em duas categorias: os geométricos e os aleatórios.

Entre os mais conhecidos destaca-se o conjunto de Cantor, o floco de neve de Koch, o tapete de Sierpinska, objetos desse minicurso.

3. Objetivos

Discutir situações problemas de caráter investigativo envolvendo sequencias e séries infinitas;

Fomentar discussões sobre a aplicabilidade de questões como essas nos níveis de ensino fundamental e médio.

4. Metodologia

A sala será arrumada em pequenos grupos (máximo 4) e cada integrante receberá as tarefas impressas. O grupo terá 1 (uma) hora para resolvê-la e discuti-la e em seguida deverá preparar (10 min) uma transparência com a estratégia de solução encontrada.

Ao término das tarefas, cada grupo apresentará sua estratégia de solução para a turma toda propiciando a existência de um debate sobre as diferentes soluções encontradas. Nesse espaço também serão discutidas a viabilidade de questões com essa característica serem apresentadas aos alunos do nível Básico.

5. Público

Professores da segunda fase do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e demais interessados.

6. Considerações Finais

Com tarefas investigativas e o trabalho em grupo, a sala de aula de matemática pode ser um espaço vivo e dinâmico onde os alunos investigam analisam e discutem os procedimentos e os resultados das situações problemas apresentadas pelo professor. Para que isso ocorra, é necessário que o professor apresente situações que tenham como objetivo provocar essas discussões. As tarefas tanto podem apresentar situações que estão presentes no dia a dia quanto no contexto da matemática mas que, sobretudo, instiguem a curiosidade e o cunho investigativo dos alunos.

A geometria fractal pode ser estudada em qualquer nível do ensino, pois pode-se partir da divisão de segmentos, fazer dobraduras para criar cartões, dividir figuras planas indefinidamente e colori-las nas aulas de artes ou usando recurso computacionais ou ainda, em um nível mais complexo, estudar entes matemáticos que envolvem modelagem, números complexos, entre outros.

Nessa proposta, o estudo dos fractais está sendo usado como meio para levantar questionamentos sobre o infinito e sobre sequências e séries. Ou seja, os fractais estão sendo usados para mostrar a conexão existente entre a Geometria e a Aritmética, dois ramos da Matemática. Além disso, os fractais podem ser um dos meios para fazer a ligação entre a Matemática e a Natureza, entre a Matemática e as Artes. Dessa forma, pretende-se mostrar a importância daquela que é a rainha das ciências e que costuma ser vista, pelos estudantes, como "o que bota terror".

7. Referências

BARBOSA, R. M.. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.

___________. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BELMONTE, J.L& SIERRA, M.. Modelos Intuitivos del infinito y Patrones de Evolución Nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* v. 14, n. . Mexico: 2011. Disponível em <www.clame.org.mx/relime/20110201.pd> Acesso em: (21 Mai) 2011.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Lições de Álgebra e Análise.* v. I, 3ª ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1956.

______. *Lições de Álgebra e Análise.* v. II, 3ª ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1957.

______. *Conceitos fundamentais da Matemática.* 9ª ed. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

COBB, P. et al. Design Experiment in Educational Research. *Eductional Researcher*, v. 32, n. 1, p. 9-13. Jan/Feb 2003.

DAVIS, R. B., & VINNER, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidablemis conception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

FISCHBEIN, E.; TIROSH, D.; HESS, P. The intuition of infinity. In: *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 3-40, 1979.

GERDEES, P. Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, v.19)

KILL, Tercio Girelli. *Conceituações sobre o infinito na história, nos livros didáticos e no pensar de futuros professores de matemática.* Tese de doutorado em Educação. Vitória: UFES/ES, 2010.

KINDEL, D. S. *Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade.* 265 fls. Dissertação Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1998.

________. *Um Ambiente Colaborativo a Distância:* licenciandos dialogando sobre os infinitos. 280 fls. Tese Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante. 2012.

___________. *Discutindo sequências e séries infinitas: uma proposta para o Ensino Básico.In:* Anais do VEMEM. Juiz de Fora: SBEM_MG/UFJF.2012.

KINDEL, D. S.; FRANT, J. B.. *Um Ambiente Colaborativo a Distância:* licenciandos dialogando sobre os infinitos. In: Anais do EBRAPEM. Canoas: ULBRA, 2012.

MAMOLO, A.. How to act? A question about encapsulating infinity. *Conference on research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, North Carolina.2009.

MAMOLO, A. & ZAZKIS, R. Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167- 182. 200.

MASON, John. O quê, o porquê e o como em matemática. IN P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (eds)**,** *Investigar para aprender matemática.* Lisboa: APM.

MONTORO, Virginia.; SHEUER, Nora. Pensando el infinito.Concepciones de estudiantes universitarios. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, Nº 60. 2004.

SALLUM, E.M..Fractais no Ensino Médio. Disponível em http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf. Acesso: 11 jan 2013.

SERRA, Celso P.; KARAS, E.W.. Fractais gerados por sistemas dinâmicos. Curitiba: Champagnat. 1997.

SFARD, A.: • On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1–36. 1991.

TSAMIR, P. & TIROSH, D.. Comparing infinite sets: intuitions and representations. In J. da Ponte & Matos (editores). *XVIII PME* Lisboa: Universidade de Lisboa, 1994.

Sites visitados.
http://www.infoescola.com/matematica/geometria-fractal/
http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal
http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf
http://www.fractarte.com.br/artigos.php
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_52.pdf