REFLEXÕES DE PROFESSORES SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO BÁSICO

Luís Havelange Soares
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba.
havelan@gmail.com

Paulo Cezar de Souza
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba.
cezarifpb@gmail.com

José César Nascimento Afro
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba.
cesar.afro@hotmail.com

Marcos Vinicios Carvalho Sulpino
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba.
msulpino@yahoo.com.br

Resumo:

Nesse artigo é apresentado um estudo que foi desenvolvido com um grupo de dez professores de Matemática, no qual se teve como objetivo analisar o entendimento dos docentes sobre as demonstrações e a exploração destas na educação básica. Para tal, elegeram-se seis propriedades matemáticas que são temas importantes de Matemática na educação básica e, sobre elas, realizou-se uma entrevista com os docentes que estão em atuação no nível de ensino fundamental e/ou médio. Os resultados indicaram que o entendimento dos professores sobre demonstração está muito limitado às concepções construídas nos cursos superiores, fato que os impede de explorar os processos de demonstração em sala de aula, pois, entendem que os discentes não possuem condições de compreensões de tais processos.

Palavras-chave: Demonstração matemática; ensino; aprendizagem.

1. Introdução

Uma das questões que vêm sendo estudadas no âmbito da educação matemática, em especial na última década, diz respeito aos processos de demonstrações no ensino de Matemática na educação básica. Vários estudos, entre eles o de Machado (2005), têm apontado que esse processo vem sendo realizado de formas diversas, dependendo de fatores temporais e locais: umas mais teóricas, outras mais práticas; umas partindo de teoremas apresentados pelo professor, outras partindo de conjecturas formuladas pelos alunos.

Porém, se nos detivermos ao ensino de Matemática no Brasil, temos uma realidade que destoa da maioria dos países do mundo, conforme mostrou Pietropaolo (2005). Segundo ele, em países como França, Portugal, Inglaterra e Alemanha, os sistemas de ensino nos níveis comparáveis ao que se entende por ensino fundamental no Brasil, já colocam na estrutura curricular que as demonstrações matemáticas devem ser exploradas pelos professores durante as aulas de Matemática. Diferentemente disto, no Brasil, o processo de demonstrações e provas no ensino de Matemática fica restrito, quase que completamente, aos cursos superiores de Matemática – os cursos de Licenciatura e de Bacharelado.

Em linhas gerais há opiniões conflituosas no que se refere a essa temática. Muitos pesquisadores defendem que as demonstrações já sejam introduzidas no ensino de Matemática desde as séries iniciais. Porém, há também um forte grupo de estudiosos defensores do pensamento de que as provas e as demonstrações só devem ser exploradas pelos professores em níveis de escolaridade mais elevados, alegando eles, que o estudante precisa estar com sua estrutura cognitiva "preparada" para compreensão de pensamentos mais abstratos.

Distante de um consenso sobre tal discussão, muitas investigações estão sendo desenvolvidas em todos os níveis de ensino trazendo no seu cerne o desejo de avançar numa direção que indique o melhor caminho para as práticas docentes de Matemática. Isso leva, inevitavelmente a um estudo mais epistemológico do entendimento do que realmente deve ser considerado como demonstração, quais os seus objetivos, quais suas categorizações e sua importância para a aprendizagem de Matemática. Mas, essas questões não são temas fáceis e, assim como ocorre com muitos outros enfoques dentro da educação matemática, trazem uma carga de polissemia o que faz com que seja necessário que definamos qual concepção estamos seguindo.

Entendendo as dificuldades de convergência conceitual para o termo demonstração e os problemas de entendimento no ensino básico sobre esse conceito, apresentam-se os resultados de um estudo que desenvolvemos a partir de um projeto de pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus de Campina Grande, onde foi investigado como os professores de Matemática apresentam (ou exploram) as demonstrações relativas às propriedades ou teoremas de Matemática da educação básica nas suas aulas de Matemática. Partiu-se da hipótese de que a exploração de demonstrações matemáticas na educação básica se faz necessária, mesmo que, utilize-se para tal, um entendimento diferente do que se usa nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Nessa perspectiva, a partir da escolha de algumas propriedades matemáticas importantes que são estudadas no nível da educação básica e de um grupo de dez professores de Matemática, sendo cinco do ensino fundamental e cinco do ensino Médio, analisou-se, após entrevistas com os docentes, como eles exploram os processos de demonstração dessas propriedades em suas aulas de Matemática, tomando como base algumas categorias de análise já referendadas em estudos da educação matemática.

2. Refletindo sobre o conceito de “demonstração”

Uma rápida pesquisa em dicionários de língua portuguesa indica que para o termo *demonstrar* existem várias definições: Provar com um raciocínio convincente ou descrever e explicar de maneira ordenada e pormenorizada, com auxílio de exemplos, espécimes ou experimentos. Claro, que em se tratando de conhecimento matemático nem sempre as definições contidas nos dicionários são coerentes com o que se define na comunidade acadêmica. Evidente que é difícil responder a essa pergunta, mas, uma reflexão sobre o significado da demonstração, em termos de ensino de Matemática a partir de uma possível situação de sala de aula, se faz pertinente.

Imagine-se que durante uma aula de Geometria o professor apresente para os alunos a seguinte propriedade: *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.* Para investigar essa propriedade o docente entrega a cada aluno uma folha de papel e pede que cada discente desenhe um triângulo, destaque cada ângulo interno configurado e recorte o triângulo. Em seguida pede que corte o triângulo em três partes preservando cada ângulo interno. E por fim, pede que juntem os três ângulos construídos e façam suas conclusões sobre o valor da medida do ângulo total formado pela junção dos três ângulos internos do triângulo. Ora, evidentemente todos os alunos perceberão que o ângulo formado é um ângulo de 180°. A figura 1 apresenta a sequência sugerida.

Possivelmente, cada aluno terá construído um triângulo diferente (em termos de tamanho ou de medidas dos ângulos) e em todos os casos o ângulo formado ao final pela junção dos três ângulos internos do triângulo mede 180°. Agora, convém levantar a seguinte questão: essa sequência didática se configura como uma demonstração ou parte do processo de uma demonstração?

De acordo com o pensamento de Boavida (2001) entende-se que ocorreu parte de uma demonstração. Pois, segundo ela:

> Uma demonstração é realizada quando são apresentados argumentos, matematicamente válidos, para cada uma das afirmações que enunciaram, usaram fatos conhecidos e anteriormente aceites como verdadeiros para bases das suas justificações (…), encadearam os argumentos uns nos outros de tal modo que uma ideia fluía da anterior sem deixarem pontas soltas ou contradições e deduziram, logicamente, uma conclusão. (p.13)

Um entendimento que tem ganhado notoriedade é o de que as demonstrações devem ser postas para os alunos em sala de aula como algo que, independentemente do maior ou menor formalismo que se apresente, expressem, através de um raciocínio lógico, a verdade ou falsidade de uma determinada conjectura ou propriedade e que o resultado seja aceito por todos os membros da comunidade *sala de aula*. Nessa perspectiva, está sendo considerando o entendimento de demonstração diferente do que é defendido por muitos autores que têm seus trabalhos em bases mais voltadas para a *Matemática Pura*[1].

> A demonstração envolve a utilização de uma formalização abstrata e simbólica e exige um perito com conhecimento prévio bastante razoável do assunto e domínio da linguagem utilizada. (DAVIS E HERSH, 1985, citados por PIETROPOLO, 2005).

[1] Está sendo considerando o termo "Matemática Pura", como a área de estudos da Matemática, especificamente voltada às pesquisas desenvolvidas no âmbito da própria Matemática. Nessa perspectiva, estamos usando o entendimento dessa área dado por Cury (2001).

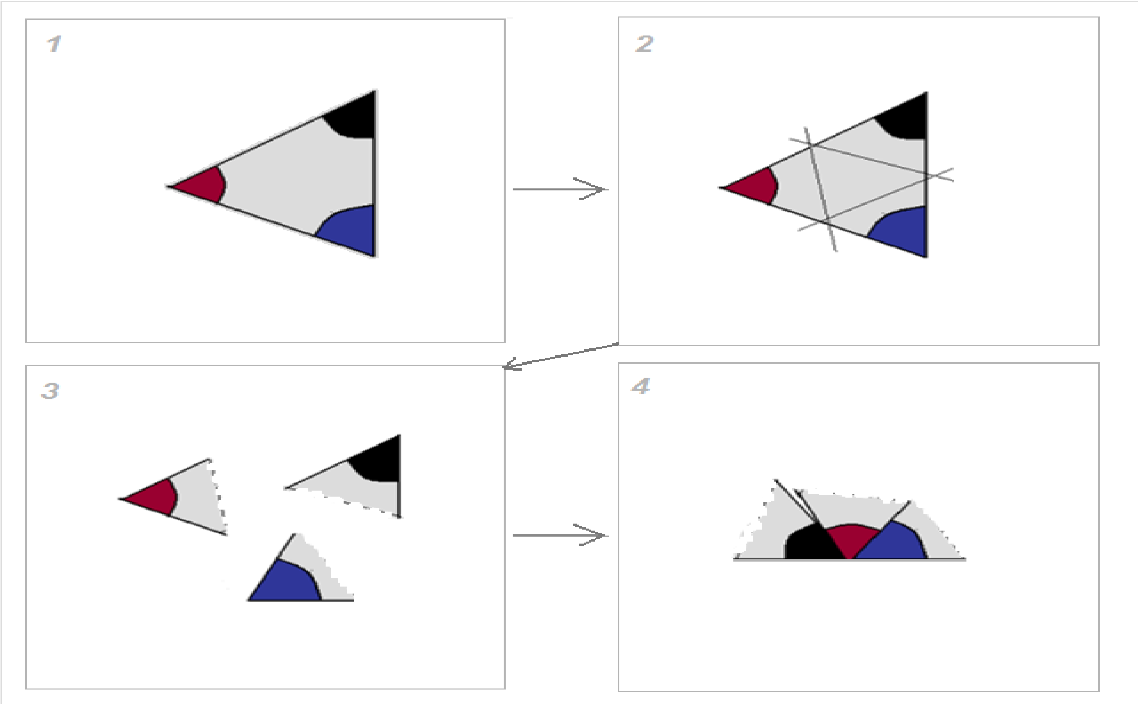

Figura 1. Sequência metodológica. Propriedade: soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

De fato, para muitos matemáticos, que não desempenham atividades nos ensinos fundamental e médio, simples constatações visuais, não podem ser entendidas como demonstrações, ou na melhor das hipóteses, como partes de uma demonstração. Esta constatação foi realizada também por Cury (2001) que, ao estudar as concepções dos formadores de professores de Matemática, observou que muitos deles são oriundos dos programas de Pós-Graduação em Álgebra ou Análise, e quando muito, desempenham funções docentes apenas nos cursos superiores de Licenciatura, nos cursos de Mestrados e de Doutorado em Matemática e, por isso, o entendimento deles sobre o conceito de *demonstração* é completamente diferente daquele que deve ter um professor de Matemática que atua na educação básica.

Apesar dos conceitos díspares sobre demonstração, quando e como ela deve ser utilizada no processo de ensino de Matemática, há um consenso, ao longo da história, sobre sua importância para o desenvolvimento desta Ciência. Sobre isso, são importantes às considerações apresentadas por Davis e Hersh (1985) no livro *A Experiência Matemática*:

> Diz-se que a primeira demonstração na história da matemática foi dada por Thales de Mileto (600 a. C.). Ele demonstrou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Ora, isso é uma afirmação tão simples que parece evidente por si própria. A genialidade, neste caso, foi perceber que uma demonstração é possível e necessária. O que torna uma demonstração mais do que simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes. Na opinião de alguns, o nome do jogo da matemática é demonstração; sem demonstrações, nada de matemática. Na opinião de outros, isso é bobagem; há muitos jogos na matemática. (p.178).

Para esses autores as demonstrações, no melhor dos casos, aumentam o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. Segundo eles o principiante que estuda demonstrações se aproxima mais da criação de Matemática nova. É conveniente ressaltar o entendimento dado por Hanna (1995, p.48) sobre demonstração. Para ela deve-se diferenciar a demonstração para fins escolares da demonstração para os matemáticos profissionais ou lógicos. É a partir dessa estruturação que ela elabora três categorias de demonstrações: demonstração formal, demonstração aceitável e demonstração empregada para fins escolares. A primeira seria o conceito teórico da lógica formal e que poderia ser encarada como o ideal matemático de cuja prática apenas se aproxima; a segunda é o conceito aceitável para os matemáticos profissionais; a terceira é a composição de atividades que visam desenvolver junto aos alunos noções e conceitos.

Entende-se que essa última categoria apresentada por Hanna (1995) é a que melhor se aproxima da compreensão que se deve ter sobre *demonstração* para o ensino de Matemática da educação básica. É este entendimento que será utilizado na análise que desenvolvida sobre o processo de demonstração, a partir das falas dos docentes e nos textos didáticos de Matemática no estudo das propriedades escolhidas.

2.1. A demonstração é necessária? Por quê?

Diante das divergências de pensamentos quando o assunto é o processo de demonstração no ensino de Matemática da educação básica, seria temerário começar este tópico com o posicionamento definitivo sobre a necessidade do uso da demonstração na aula de Matemática. Assim, é essencial que façamos uma análise de alguns estudos já realizados e do que determinam os documentos oficiais que regulamentam as práticas docentes em nosso país.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1997, p.39, grifo nosso)

Percebe-se na recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que o processo de demonstração deve ser sim explorado nas séries finais do ensino fundamental. Porém, apesar das recomendações expostas nos PCN desde 1997, ainda não temos um corpo suficiente de estudos que dê um direcionamento com sugestões do processo de demonstração para o ensino de Matemática da educação básica.

No entanto, existem estudos que adentram essa discussão e que se configuram como ferramentas importantes para que os docentes de Matemática possam tirar suas conclusões sobre essa problemática. Boero (1996) discutiu o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de 8ª série numa pesquisa que buscou verificar se os alunos, neste nível de escolaridade, poderiam produzir teoremas (conjecturas e provas). Ele destacou dois pontos importantes observados:

> Durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas; durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (argumentos) produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

Os resultados do estudo de Boero (1996) mostraram que os alunos apresentam condições de fazer conjecturas e generalizações sobre propriedades matemáticas. De Villiers (2002) comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Mas ele alerta que a demonstração tem outras funções em matemática:

i. Verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
ii. Explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;

iii. Descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
iv. Comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;
v. Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
vi. Sistematização: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Analisando as funções de uma demonstração apresentadas por De Vlliers e tomando como categorias de demonstração àquelas definidas por Hanna (1995), pode-se compreender que é plenamente possível sua exploração na educação básica. Pois, entende-se ser essencial que o docente de Matemática faça com que os estudantes se convençam da veracidade das propriedades apresentadas. Esse convencimento, para fins escolares, pode ser feito de várias formas, inclusive do modo formal abstrato desde que os alunos tenham maturidade para tal.

Diante desse contexto é importante que os alunos desenvolvam atividades de demonstração nas aulas de Matemática desde as últimas séries do ensino fundamental para que, como referem os PCN, contatem com um dos *métodos fundamentais da matemática* e possam apreciar a *natureza* desta ciência. Nessa mesma direção Veloso (1998) apresenta duas razões para a demonstração matemática estar presente na sala de aula: aprender a raciocinar e compreender a natureza da Matemática, considerando esta a mais importante. Ele reconhece que trabalhar a demonstração na aula de Matemática, quer no contexto de realização de investigações quer analisando certas demonstrações a partir dos últimos anos do ensino fundamental poderá contribuir para que os alunos aprendam a raciocinar, mas, não é indispensável.

> Os alunos devem chegar ao secundário com uma experiência já considerável de atividades de investigação em matemática, durante a qual tiveram numerosas ocasiões para argumentar e demonstrar, e refletir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática. (VELOSO, 1998, p. 362).

Diante dos argumentos do autor entende-se que os alunos não precisam fazer demonstrações na aula de Matemática para criar estruturas básicas de raciocínio e desenvolvê-las. No entanto, não conseguirão interiorizar, compreender e apreciar a natureza da Matemática se a demonstração não estiver aí presente.

3. Percurso metodológico e resultados observados

O objetivo inicial desse estudo era investigar se os professores davam ênfase aos processos de demonstração referentes aos conteúdos matemáticos na educação básica. No desenvolvimento da pesquisa veio o desejo de entender se demonstrações eram exploradas pelos docentes. Ou seja, passou-se a investigar como as demonstrações são exploradas fazendo uma ligação do modelo de demonstração com o nível de escolaridade em que ela está sendo trabalhada tentando identificar nos processos de demonstração as funções destacadas por De Villiers (2002) e Hanna (1995).

Entendendo a necessidade de limitar o objeto de investigação, foram definidas propriedades matemáticas que se deveria investigar. A tabela 1 mostra as seis propriedades que foram objeto de investigação na fala dos docentes.

Tabela 1 – Propriedades matemáticas

Temáticas	Propriedade
Bissetrizes internas de um triângulo	Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos que são proporcionais aos lados adjacentes.
Teorema de Pitágoras	Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos
Ângulos internos de um Polígono	A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lado é igual ao produto de (n-2) por 180°
Soma dos termos de uma Progressão Geométrica Finita	A soma dos termos de uma PG finita de razão q é dada por $\left(\frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}\right)$, onde n é o número de termos e a_1é o primeiro termo.
Relação fundamental da Trigonometria	Para qualquer número real x, temos que: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
Área de um triângulo dados os seus vértices	Todo triângulo de vértices A(x,y), B(a,b) e C(n,m) tem área dada por: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ n & m & 1 \end{vmatrix}$

Para compreender o entendimento dos docentes sobre o processo de demonstração na educação básica foi elaborada uma entrevista semiestruturada, composta (a priori) por seis perguntas, na qual se buscou, entre outras questões, investigar a prática pedagógica do professor para verificar como este explora o processo de demonstração em suas aulas.

O grupo de pesquisados foi constituído de (10) dez professores de Matemática de três escolas públicas da rede estadual da Paraíba. Os professores P1, P2 e P3 atuam numa escola estadual no município de Campina Grande. Os docentes P4, P5 e P6 atuam numa escola municipal também de Campina Grande e os professores P7, P8, P9 e P10 lecionam numa escola estadual do município de Soledade. Todos os docentes são formados em Matemática e a maioria deles já leciona há mais de 10 anos.

Na primeira pergunta questionava-se *como o professor definia uma demonstração matemática*. Com isso pensou-se em compreender em qual categoria elencada por Hanna (1995) o entrevistado estava inserido, se pensava em demonstração como um processo formal, explorado com mais veemência no ensino superior ou, se entendia como um processo que podia ser explorado para fins escolares. Nesse aspecto foi interessante o fato de que a maioria dos docentes apresentou um entendimento de demonstração mais próximo de um processo formal que tem no rigor a característica principal. Esse aspecto fica evidenciado na fala, por exemplo, do professor P4: *"a demonstração tem que usar a simbologia da matemática, de forma bem escrita e organizada (P4)".*

Com a segunda questão – *como os alunos reagem ao processo de demonstração em sala de aula?* - o objetivo era verificar se o professor explorava ou não a demonstração durante a aula de Matemática. E aí, pelas respostas colhidas, surgiu um fato que já se imaginava: oito dos dez docentes afirmaram que raramente exploravam as demonstrações em sala de aula, pois, segundo eles, os alunos não mostravam o menor interesse em compreender tais processos. Os dois professores que disseram explorar as demonstrações, enfatizaram que alguns alunos gostavam de compreender as demonstrações, pois, assim compreendiam o processo de construção do conhecimento matemático. Para eles o professor deve respeitar os alunos que desejem compreender a construção do conhecimento matemático.

Em seguida *foi apresentada para os docentes a sequência metodológica exposta pela figura 1 e pediu-se que dissessem se "aquilo" era uma demonstração*, justificando sua resposta. Mais uma vez houve divergências de pensamentos, pois, para quatro docentes a sequência não representava uma demonstração enquanto que para os outros, com aqueles passos didáticos, a propriedade estava bem demonstrada.

Na quarta indagação foram apresentadas para os docentes as seis propriedades da tabela 1 e lhes foi perguntado *se lembravam de ter explorado os processos de demonstração dessas propriedades em suas aulas*. Em caso de resposta afirmativa pedia-se para descrever como faziam isso em sala de aula. Nesse aspecto destacou-se o fato de que todos os docentes disseram ter demonstrado as propriedades referentes ao ensino fundamental, enquanto que apenas dois deles também afirmaram ter demonstrado as propriedades relativas aos conteúdos estudados no ensino médio. Sobre a forma como os docentes realizaram as demonstrações ficou evidente que o modelo formal e com forte vertente algébrica foi à base metodológica majoritária.

Em seguida os docentes foram convidados a destacar *quais as maiores dificuldades que vislumbravam e que traziam barreiras para a exploração dos processos de demonstração nas aulas de Matemática da educação básica*. Entre outras questões mencionadas pelos professores, destacam-se: a falta de tempo para planejamento das atividades, o pouco interesse dos estudantes pela aprendizagem matemática, a linguagem matemática complicada, a ausência nos livros didáticos das demonstrações.

Por fim, buscou-se, na sexta questão, entender de fato, o que os docentes pensavam sobre os processos de demonstração no nível da educação básica. Para isso *foi pedido que eles se colocassem na condição de pedagogo com a incumbência de direcionar as metodologias de ensino de matemática*. Nessa situação, perguntou-se: qual recomendação daria com relação às demonstrações para o Ensino Básico? As respostas a essa questão trouxeram implicitamente o que eles defendem sobre os processos de demonstração na educação básica. Foi percebido que, apesar de muitos terem dito anteriormente que exploravam ou já haviam explorado às demonstrações durante as aulas, nesse item, mostraram-se contrários ou, no mínimo, críticos ao fato de se valorizar as demonstrações na educação básica.

4. Considerações finais

Com os resultados analisados nesse estudo ficam evidentes algumas questões que devem ser considerados como fundamentais para compreensão da realidade das aulas de Matemática e levantam diversas outras possibilidades para investigações posteriores. Um fato importante foi com relação à forma como os professores destacaram para demonstrar às propriedades apresentadas, pois, apesar da defesa indireta de uma Matemática formal, simbólica e algébrica, notaram-se muitas deficiências para realizar corretamente o processo de demonstração das propriedades. Isso mostra indiretamente outra faceta do processo de ensino de Matemática: a fragilidade do processo de formação. Talvez os docentes, mesmo que pretendessem explorar os processos de demonstração em suas aulas, não o fariam em virtude da falta do conhecimento matemático para tal.

O estudo evidenciou a ausência de entendimentos e, também de pesquisas mais concisas, sobre a importância das demonstrações para a aprendizagem de Matemática na educação básica. No entanto, percebe-se que nas pesquisas realizadas, sempre se deu ênfase a importância ou não da demonstração para a aprendizagem, tomando-se o entendimento de demonstração próximo do que ocorre nos cursos superiores. É possível que essa concepção possa ser responsável pelas dúvidas no que diz respeito aos benefícios das demonstrações nas escolas básicas. Aqui, defende-se o entendimento de Hanna (1995) ao compreender que esse processo, nos níveis de ensino fundamental e médio, deve ser diferenciado, em termos simbólicos e metodológicos, da forma como são referendadas as demonstrações nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Isso também é assegurado por Machado (2005) quando afirma que se deve dar ênfase para o processo de demonstração com fins escolares, pois assim, podem-se trazer ganhos significativos para o processo de ensino aprendizagem.

Os dados coletados e analisados no estudo indicam que os docentes de Matemática têm um entendimento de "demonstração" muito próximo das práticas de ensino desenvolvidas nos cursos de Licenciatura e Bacharelado, que "pregam" a demonstração como o mais importante no conhecimento matemático. Talvez por isso, raramente realizam explorações com demonstrações nas suas práticas docentes. No entanto, compreende-se esse fato como consequência da formação que tiveram durante a Licenciatura, isto é, trouxeram para a sua prática uma concepção de demonstração e de modos de realizar tais processos que são aplicados nos cursos superiores e, há quem defenda, como Cury (2001), que até para este nível de ensino já é hora de discussões mais profundas sobre sua significância.

Apesar do olhar está voltado apenas para o tema demonstração, conclui-se que são necessárias discussões sobre vários aspectos do ensino de Matemática na educação básica, das práticas docentes, das metodologias utilizadas, das concepções dos docentes, entre outros. Com relação ao uso da demonstração na educação básica, compreende-se, baseando-se no entendimento de Hanna (1995) e De Villiers (2002) que há uma gama de possibilidades de exploração dos processos nas aulas de Matemática.

5. Referências

BOAVIDA, A. M. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. Lisboa: **Revista Educação e Matemática**, 2001, n. 63, p. 11-15..

BOERO, Paolo... et al. **Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems**. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. Proceedings of the 20th PME Conference… Valencia: University of Valencia, 1996. v. 2, p. 113-120.

BRASL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC, 1999.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Matemática Brasília: MEC/SEF, 1998.

CURY, Helena N. **A formação dos formadores de professores de Matemática: quem somos, o que fazemos, o que podemos fazer**. In: CURY, Helena (org). Formação de professores de matemática, uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

DAVIS, F. J. e HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DE VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica**. Actas do ProfMat 2002 (pp. 65–72). Lisboa: APM.

HANNA, G. **Challenges to the importance of proof**. For the learming of mathematics, 1995, n.15. p. 42-49.

MACHADO, S. **A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad**. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 2005.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese de Doutorado. PUC – São Paulo, 2005.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais.** Lisboa: IIE, 1998.