SITUAÇÃO QUOCIENTE: LIMITES E POSSIBILIDADES

Angélica da Fontoura Garcia Silva
Uniban - SP
angelicafontoura@gmail.com

Tânia Maria Mendonça Campos
Uniban - SP
taniammcampos@hotmail.com

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro
Uniban - SP
gracilenepinheiro@gmail.com

Mirtes Pereira de Souza
Uniban - SP
mieducacaocife@yahoo.com.br

Resumo:

Este estudo tem a finalidade de analisar a compreensão de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a respeito da resolução de problemas envolvendo a introdução do conceito de fração em situações quociente. Os dados foram coletados com alunos de uma escola estadual paulista participante do Projeto Observatório da Educação. Teoricamente, a investigação referenciou-se em teorias que versam sobre as questões didáticas associadas ao objeto matemático: fração. Nesse sentido utilizamos pesquisas de Nunes e Streefland. De modo geral, a análise das informações obtidas nos permitiu identificar que a introdução do conceito de fração por meio do significado quociente favoreceu a compreensão do invariante equivalência.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino e aprendizagem; Fração; Situações quociente; Equivalência de frações.

1. Introdução

O presente trabalho pretende apresentar parte de uma pesquisa de Mestrado em Educação Matemática que está sendo realizada sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números racionais na sua representação fracionária – frações[1].

[1] Nossa opção neste artigo para facilitar a leitura do texto será a utilização do termo fração para designar os números racionais na representação fracionária.

Apresentamos resultados parciais de uma das atividades desenvolvidas durante o curso de formação continuada, ofertado pelo Observatório da Educação em que foi abordado o tema *Representação fracionária do número racional*, no qual aprofundamos a discussão, sobretudo, sobre o significado do quociente a partir de uma sequência de ensino.

As tarefas do protocolo de pesquisa foram elaboradas pela Professora Terezinha Nunes e sua equipe na Universidade de Oxford e propõe introduzir o ensino das frações pelo significado quociente. A proposta da autora é possibilitar que a criança se aproprie desse conceito a partir da resolução de situações que envolvam a ideia de divisão estimulando a utilizar as estruturas intuitivas já conhecidas por elas. Tal proposta foi desenvolvida tanto no Brasil, como na Inglaterra e em Portugal.

As atividades realizadas neste módulo da formação tiveram início no segundo semestre de 2013 com professores da rede estadual de ensino. Para este artigo analisaremos duas das situações apresentadas no protocolo. Os dados referem-se à produção dos alunos de uma das professoras participante que leciona para o 5º ano do Ensino Fundamental.

Embora sejam muitas as ideias desenvolvidas durante a formação, para este artigo apresentaremos apenas como os alunos responderam a duas das questões que envolviam a ideia de equivalência.

2. Relevância e Fundamentação

Estudos já realizados em outros países e também no Brasil apontam lacunas tanto nos processos de ensino quanto na aprendizagem das frações. Conforme afirma Campos (2011) "O ensino e aprendizagem de frações constituem um obstáculo considerável para professores e alunos, desde o 4° ano do ensino fundamental no Brasil, quando esse tema é abordado" (CAMPOS, 2011, p.1)

Embora este seja um tema em que alunos e professores encontram grandes dificuldades, a sua compreensão é considerada de fundamental importância. Já na década de 80 Behr chama a atenção e justifica tal importância indicando que a compreensão do conceito de fração envolve três perspectivas: prática, psicológica e matemática (BEHR, 1983).

Ainda em relação à aprendizagem, nos anos 90, pesquisas brasileiras como as de Campos e Cols, 1995; Nunes e Bryant, 1997, dentre outros, observavam dificuldades encontradas por alunos quanto ao domínio do conceito de fração. O mesmo foi constatado com alunos que estudavam no final da Escola Básica (17, 18 anos) por Rodrigues (2005). O autor observou que tais estudantes ainda apresentavam dificuldades significativas tanto sobre a compreensão do papel da unidade nos problemas envolvendo frações como sobre as peculiaridades das situações envolvendo grandezas discretas. Quanto aos alunos dos anos iniciais, Garcia Silva (2007), por exemplo, ao realizar uma investigação com os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (crianças com 9 e 10 anos) observou também que esses estudantes apresentavam pouco domínio do conceito de fração.

Quanto ao ensino das frações, no final da década de 90, Nunes já chamava a atenção sobre a forte tendência por parte dos professores em trabalhar o conceito de fração utilizando principalmente o significado parte-todo. Esse fato também é evidenciado por Canova (2006), Damico (2007), Garcia Silva (2007) e Monteiro Cervantes (2010).

Campos (2011) afirma que outros autores como Strefland (1987; 1997) sugerem que a introdução do ensino de frações pelo quociente oportuniza situações nas quais o aluno apresenta maior compreensão do uso das frações. Também afirma que estudos mais recentes como Mamede (2008); Nunes Bryant; Pretzlik; Bell; Evans & Wade (2007) indicam que as crianças compreendem melhor o uso das frações pelo quociente do que por parte-todo. Dessa forma, investigar a compreensão dos alunos sobre situações envolvendo a ideia de quociente parece-nos relevante.

Outra ideia importante analisada neste estudo é a de equivalência. Nunes et al (2004) consideram importante investigar como as crianças compreendem as classes de frações equivalentes. Trata-se de uma ideia fundamental uma vez que permite a preparação para a compreensão de noções importantes, como a da proporcionalidade, todavia, os autores afirmam não ser trivial. Nunes et al (2004) chamam a atenção ainda para a dificuldade gerada quando se procura encontrar equivalência no campo das frações. Afirmam que no campo dos números inteiros o mesmo "rótulo" facilita a compreensão, pois ao afirmarmos, por exemplo, que compramos na feira 4 bananas e 4 maçãs estamos dizendo que são quantidades equivalentes uma vez que apresentam o mesmo "rótulo". O mesmo não ocorre com as frações, pois números escritos de maneiras diferentes representam a mesma quantidade quando se referem a uma mesma unidade. Nesse sentido, $\frac{1}{2}$ de chocolate representa a mesma quantidade que $\frac{2}{4} do\, mesmo\, chocolate$. Por outro lado se temos $\frac{1}{2}$ de um chocolate de 100 g não representa a mesma quantidade $\frac{2}{4}$ de um chocolate de 1kg. Nesse sentido, assim como os autores, consideramos serem as noções de equivalência e de ordem de fundamental importância visto que são necessárias ao desenvolvimento da noção de número.

Quanto à aprendizagem do invariante equivalência, estudos como os de Campos (2011) apoiado nos estudos realizados por Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984); Hart (1986); Behr et al. (1992); Kamii e Clark (1995); Kerslake, (1986) indica que os alunos encontram dificuldades para identificá-las.

3. Procedimentos Metodológicos

Reiteramos que a análise que apresentamos a seguir constitui parte de uma formação que foi realizada com professores da rede estadual de ensino, durante a qual procuramos oportunizar aos professores participantes a refletir sobre a introdução do conceito de fração, especialmente, por meio do significado quociente.

O módulo de formação ocorreu no período de 04/09/2012 a 27/11/2012, com uma carga horária de 24 horas presenciais e 6 à distância. Na atividade à distância foi aplicada uma sequência de ensino a alunos de classes do Ensino Fundamental. Neste trabalho apresentamos a análise da produção dos alunos de uma sala do 5º ano do Ensino Fundamental, composta por 35 alunos, dos quais 20 participaram da atividade. Antes de levar a atividade para a sala de aula, a professora participou da discussão em que foi apresentada as ideias propostas na sequência de ensino.

Na aplicação da sequência os alunos foram dispostos em carteiras individuais; cada criança recebeu um caderninho contendo as ilustrações das questões propostas; nele cada aluno individualmente, registrava sua resposta às questões que foram apresentadas em power point e lidas pela professora. Em um momento da atividade, as crianças eram estimuladas a refletir sobre suas respostas e a comparar com a do seu colega ao lado. Durante a realização das atividades também fizemos registros com a utilização de recursos áudio visual.

Reiteramos que a sequência de Ensino era composta de quatro situações, porém para esta comunicação apresentaremos duas delas, quais sejam:

2ª situação

Quatro pessoas vão dividir 3 chocolates igualmente**.**

1- Vai ser possível dar uma barra para cada um?

2- Vai ser possível dar pelo menos metade para cada um?

3- Como você dividiria as barras de chocolate?

4- Compare sua divisão com a de outro colega que fez diferente. As duas formas de dividir podem dar a mesma quantidade para cada um?

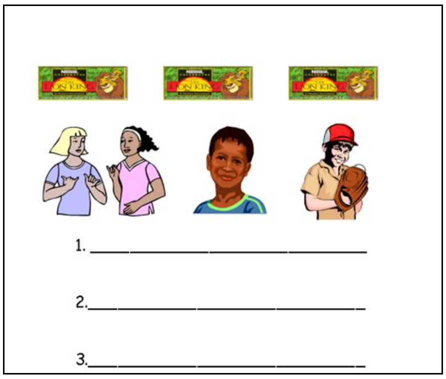


Figura 1: 2ª situação do protocolo

Esta é uma das situações criada por Nunes e inspirada nos estudos de Streefland (1984). A finalidade foi introduzir o conceito de fração por meio do processo de divisão indicada, favorecendo o aluno a apoiar-se no seu conhecimento informal.

3ª situação

Seis crianças foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas para repartir igualmente. O garçom era muito simpático e trouxe uma pizza de cada vez para eles não deixarem a pizza esfriar.

1. Como eles podem dividir a pizza? Que fração da primeira pizza cada um vai ganhar?

2. Quando o garçom trouxer a segunda pizza, quanto cada um vai ganhar?

3. Que fração cada um vai ganhar ao todo?

4. Se o garçom trouxer as duas pizzas de uma vez, eles podem dividir de outra maneira? Como? Que fração da pizza cada um vai ganhar?

5. Veja essa duas frações. Você acha que elas mostram a mesma quantidade de pizza? Como você chegou a essa conclusão?

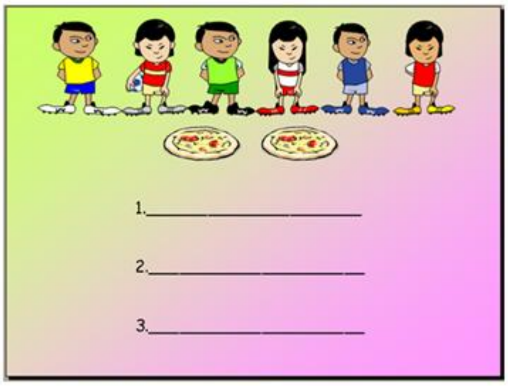


Figura 2: 3ª situação do protocolo

Esta situação originalmente concebido por Streefland (1997) foi também utilizada nos estudos de Nunes et al (2004) com o objetivo investigar os argumentos utilizados por estudantes durante a resolução de tarefas de equivalência de frações apresentadas na situação Quociente. Procuraremos neste estudo identificar os argumentos utilizados pelos nossos alunos.

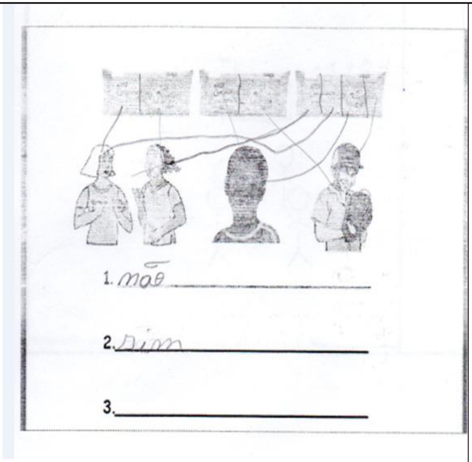
4. Análise e Discussão dos Dados

Respaldados nas literaturas já consultadas, analisamos as respostas dos alunos. Com relação à 2ª situação do protocolo, observamos que as 20 crianças que participaram da atividade responderam corretamente ao primeiro item. O segundo item foi respondido de forma acertada por 19 crianças e 01 aluno não respondeu. Isso nos faz pensar que os alunos compreenderam a situação proposta. Em relação ao terceiro item, houve um número significativo de acertos: 17 crianças; 02 erraram e 01 não respondeu.

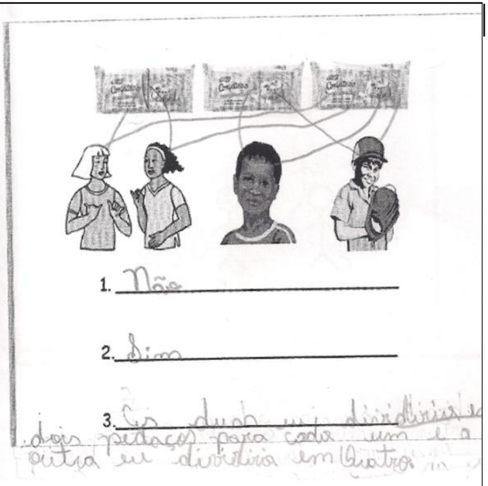
Analisando os acertos percebemos que os estudantes utilizaram-se de duas estratégias:

- dividiram duas barras de chocolate ao meio e uma em quartos, e fizeram a distribuição entre as quatro pessoas;
- dividiram cada uma das três barras de chocolate em quatro partes iguais e distribuíram uma parte de cada uma das barras para cada pessoa.

Na figura a seguir observamos a primeira estratégia que foi a utilizada pelos alunos A e B:



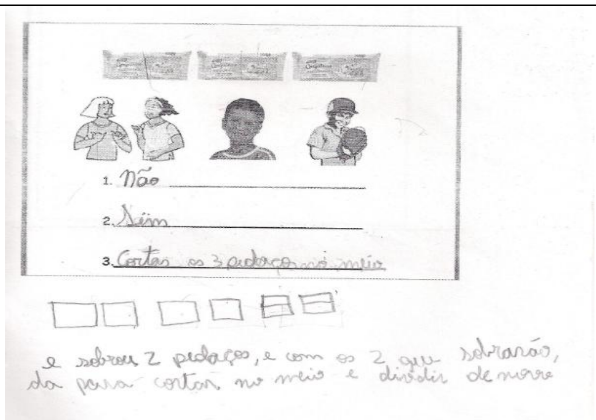
Estratégia Correta: aluno A



Estratégia Correta: Aluno B

Essa representação foi à apresentada pela maioria dos alunos (treze). Durante a aplicação da sequencia tal fato nos chamou a atenção e resolvemos questionar o *Aluno A* sobre sua forma de pensar, ele justificou: *"esse daqui divide; tora no meio aí divide para essas duas pessoas; esse daqui divide com esses dois e esse daqui tora em quatro pedaços para dividir com eles"*. (ALUNO A)

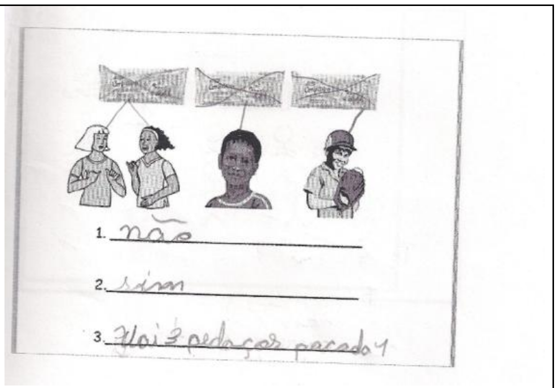
Dentre esses alunos que se valeram de tal estratégia observamos que a divisão do último chocolate não foi imediata para todos os estudantes. Observamos que o *Aluno C*, por exemplo, dividiu os três chocolates ao meio e ao distribuí-los possivelmente percebeu que teria que dividir novamente as duas últimas metades ao meio, mais uma vez.



Estratégia Correta: Aluno C

Assim como o *Aluno C*, outro estudante dividiu as três barras ao meio e repartiu a ultima em oito pedaços, justificando *“eu divido no meio mais vai sobrar mais um inteiro e dá para cortar em 4 pedaços para cada um.”*

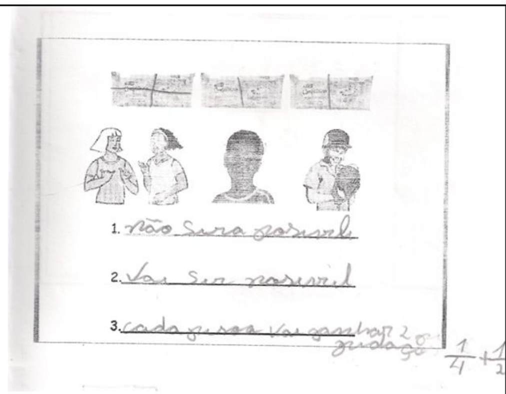
Outra estratégia utilizada por quatro alunos foi dividir cada uma das três barras de chocolate em quatro partes iguais e distribuir uma parte de cada uma das barras para cada pessoa, ou seja, $\left(\frac{1}{4}\text{de barra para cada pessoa;}\right)$.



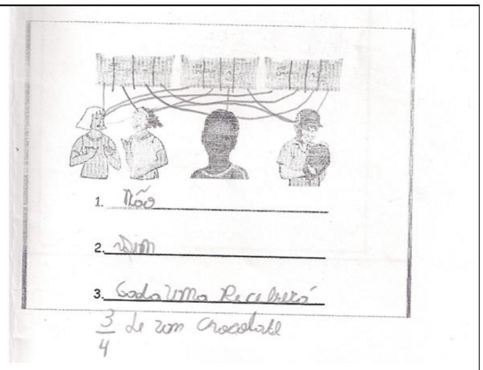
Estratégia: Aluno D

Observando as estratégias utilizadas pelas crianças, pudemos perceber que elas são as mesmas indicadas por Garcia Silva (2007). A autora apoiada nos estudos de Carperter (1994) observou também as duas estratégias aqui identificadas. Não verificamos, porém, o caminho descrito por Behr et al. (1992), ou seja, as três barras são unidas, formando uma unidade que é dividida em quatro.

É importante notar que mesmo não sendo perguntado sobre que fração representava a parte que cada pessoa iria ganhar dois alunos representaram também por meio de fração. O *Aluno E* representou $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ e o *Aluno F* respondeu $\frac{3}{4}$. Como não entrevistamos os dois alunos, pudemos inferir que, que o *Aluno E* indicou as duas frações de chocolate distribuídas, mas não a fração total que representava os dois pedaços; já o *Aluno F* ao dividir o chocolate em quartos verificou o que cabia a cada pessoa.



Estratégia: Aluno E



Estratégia: Aluno F

Três alunos erraram o item, dois deles dividiram os chocolates em meios, possivelmente por acreditar que deveriam encontrar uma forma de dividir todos os chocolates em “partes iguais” (mesma área). Já o terceiro aluno dividiu cada chocolate em cinco pedaços.

Apresentamos a seguir um dos erros observados:

Estratégia: Aluno G

Analisando a estratégia utilizada pelo *Aluno G* observamos que ele possivelmente utilizou-se da ideia de que deveria fazer quatro cortes no chocolate para que pudesse dividi-lo em quatro partes. A divisão de uma grandeza contínua parece trivial, mas não é. Já em 1960 Piaget, Inhelder e Szeminska afirmavam que a compreensão de frações implicava a construção de invariantes que serviriam como base para a organização das ações da criança. Dos invariantes citados pelos autores um deles diz respeito à necessidade de saber sobre a relação existente entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as partes, ou seja, que para dividir um todo contínuo em quatro partes iguais serão necessários apenas três cortes. Nesse sentido, como apontado por Piaget et al (1960) o estudante precisa antecipar o número de cortes que irá produzir e também prever onde esses cortes devem ser feitos de forma a garantir que todas as partes tenham a mesma área (conservação de área).

A segunda situação propõe trabalhar com o invariante equivalência. Antes de trazermos a análise sobre a percepção das crianças acerca desta ideia, apresentaremos as respostas dadas aos outros itens propostos na situação.

Em relação ao primeiro item observamos que embora os alunos tenham expressado de modos diferentes, todos chegaram à resposta correta referindo-se a fração de $\frac{1}{6}$ para a porção da pizza que cada criança iria comer.

Quanto ao segundo item, quatorze alunos responderam corretamente que a fração da outra pizza também seria $\frac{1}{6}$; três estudantes referiram-se apenas a quantidade de pedaços indicando que seriam 2 (pedaços); um aluno respondeu: "*eles repartem a outra e comem 12"* referindo-se ao total de pedaços das duas pizzas; e uma criança respondeu *1*.

Em relação ao terceiro item, treze alunos responderam corretamente, dizendo que cada criança ganharia ao todo $\frac{2}{6}$ de pizza; uma criança respondeu: *com duas pizzas dá para cada um comer duas fatias; um respondeu: vai ganhar 2 pedaços para cada criança* e duas crianças responderam: *2*, talvez fazendo também referência a dois pedaços de pizza.

Analisando os itens 4 e 5, temos uma ideia de como os alunos lidam com o invariante equivalência.

Com relação ao quarto item, ao analisarmos as respostas dos alunos quanto a outras formas de dividir a pizza que cada criança comeria se o garçom trouxesse as duas de uma só vez, percebemos que dez alunos responderam corretamente. Porém somente cinco deles fizeram a representação fracionária da quantidade, como podemos observar nas figuras a seguir:

	
Estratégia Correta: Aluno H	Estratégia Correta: Aluno I

Já em relação ao item cinco, em que os alunos deveriam comparar as frações que encontraram, verificando se estas representavam a mesma quantidade, eles não expressaram compreender plenamente a ideia de equivalência, uma vez que mesmo aqueles que fizeram a representação fracionária, responderam *"não"* a este item. Porém, os alunos que se referiram apenas à quantidade de pedaços, disseram que os pedaços representavam a mesma quantidade.

Todavia, vale ressaltar, que o papel do professor nesse experimento foi bastante reduzido uma vez que objetivávamos analisar durante o processo formativo os registros espontâneos dos alunos. Nesse sentido, solicitamos que o docente realizasse somente a leitura das situações, sem nenhuma outra intervenção.

Dessa forma, acreditamos que em situação real de ensino a mediação do professor seria de fundamental importância uma vez que ao analisar os vídeos observamos a presença da ideia de equivalência quando os alunos discutiram sobre o ocorrido: "(...) *a gente pegou a metade dos dois números, do numerador e do denominador (...) O número assim da fração vai diminuir, só que eles vão manter o mesmo que eles vão comer*". (ALUNO J)

5- Resultados Parciais da Pesquisa

Com base nos estudos realizados, entendemos ser importante que o ensino das frações possibilite que a criança construa conhecimentos que as levem a compreender o que é a representação por fração, distinguindo assim os números naturais dos racionais.

Assim, consideramos o papel central do professor. É relevante que ele introduza o conceito de fração também a partir das noções que as crianças já usam no seu dia-a-dia, por exemplo, quando ela divide um único lanche com seus amiguinhos. Essa compreensão por parte dos professores permite que o ensino de frações deixe de ser mecânico e favoreça uma maior compreensão desse conceito.

As situações propostas por Nunes (2003) oportunizaram aos alunos investigados vivências que possibilitaram a reflexão sobre o uso de frações, especialmente, na situação quociente considerando estabelecer relações com situações do cotidiano, levantando hipóteses, resolvendo e fazendo usos dos conceitos matemáticos ora apreendidos em relação à divisão.

A análise dos dados nos permitiu observar que o desenvolvimento desta sequência pode favorecer a compreensão sobre a introdução do conceito de fração por meio do significado quociente.

Outro ponto que observamos é que as crianças consideraram a ideia de parte-todo, uma vez que a grande maioria utilizou-se desse recurso para responder às questões, retratando ser este o significado que possivelmente foi trabalhado em sala de aula.

Referências

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In: Lesh, R.; Landau, M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press. p. 91-126.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post,T., & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Journal for Research in Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. Mathematics Education, 15 (5), 323-341.

Behr, M. J.; Harel, G., Post. T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In: Grows, D. A. (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 296-333). New York: MacMillan.

Campos, T.M.M.; Jahn, A. P.; Leme da Silva, M. C.; Silva, M. J. da (1995). Lógica das equivalências. Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC.

Campos, T M. M. . Sobre o ensino e aprendizagem de frações. In: XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2011, Recife. Anais XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2011.

http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2896/1194. Acesso em: 25 de março de 2013, às 20:02h.

Canova, R. F. *Crença, concepção e competência dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração*. 2006. Dissertação (Mestrado) – PUC/SP, São Paulo.

Carpenter, Thomas P. (1994) *Teaching and learning rational numbers: proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades.Wisconsim Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madson.*

Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental*.
2007. Tese (Doutorado) – PUC/SP, São Paulo.

Garcia Silva, A. F. (2007). *O desafio do desenvolvimento profissional docente*: Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. Tese Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Hart, K. (1986). The Step to Formalisation. In L. Burton & C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference of Psychology of Mathematics Education*, 159- 164. London: University of London - Institute of Education.

Kamii, C. & Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions:childten's strategies and errors*. Londres: NFR-NELSON.
MAMEDE, E. The Effects of situationson Children's Understanding ofFractions.
PhD Thesis (unpublished thesis), Oxford Brookes University. Oxford: OBU. 2007.

Monteiro Cervantes, P. B. (2011). *Uma formação continuada sobre as frações*.
Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNIBAN, São Paulo. 2011.

Nunes, T. & Bryant, P (1997): Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D., & Wade, J. (2007). La compréhension des fractions chez les enfants. In M. Merri (Ed.), *Activité humaine et conceptualisation* (pp. 255-262). Toulouse: Presses Universitaires du Mirail.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. (1960). The child's conception of geometry. London: Routledge, Kegen Paul. p. 40-127.

Rodrigues, W R. (2005). *Números racionais*: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. São Paulo: PUC/SP.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (Towards... A theory) Part 1: *Reflections on a teaching experiment. Educational Studies in Mathematics*, 15, p. 327-348.

Streefland, Lee. (1997) *Charming fractions or fractions being charmed?* In: Nunes, Terezinha; Bryant, Peter (Eds.). Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective(p.347-372). Hove (UK): Psychology Press.