INVESTIGANDO EM SALA DE AULA: OS ALUNOS COMO INVESTIGADORES DE SUAS PRÁTICAS MATEMÁTICAS

Sérgio Noriaki Sato
Universidade Anhembi Morumbi
Universidade Guarulhos
snsato@uol.com.br

Resumo:
Este relato trata-se de uma reflexão sobre uma prática de sala de aula, provocada pelo professor, mas muito bem atendida por seus alunos, do curso de Engenharia, enquanto assumiam uma postura de investigação matemática, a partir de um artigo, fora do contexto direto das aulas regulares, de Cálculo Integral. A partir deste artigo sobre o resultado da potência 2^{1000}, com todos os seus 302 algarismos, constituiu-se um ambiente de aprendizagem com uma positiva discussão reflexiva sobre o resultado, que permitiu o emprego da aritmética de resíduos e dessa forma novos conceitos matemáticos foram mostrados de forma contextualizada. De fato o mais importante foi a estimulante postura dos alunos como investigadores em sala de aula. Assim objetiva-se mostrar que conteúdos significativos promovem maior envolvimento dos participantes no ambiente de investigação matemática.

Palavras-chave: Investigação matemática; Prática de sala de aula; Aritmética de resíduos.

1. Introdução

Entendo que ser professor é ser comunicador e principalmente um comunicador eficiente, além é claro de várias outras habilidades. Para tal mantenho-me próximo de meus alunos permitindo que falem bastante sobre coisas de seu cotidiano. Ao permitir que se expressem livremente ganho espaço para também me expressar livremente. Fico preocupado, como professor de Matemática, se meu único assunto com eles é Matemática.

Isto é reforçado por minha prática de Modelagem Matemática em sala de aula, pois procuro a todo o momento que meus alunos percebam que a Matemática é uma linguagem adequada para traduzir os problemas da realidade em problemas matemáticos e assim operá-los na busca de soluções do problema original. Desta forma meu referencial teórico é (BARBOSA, 2001), pois penso a Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem.

Neste início de semestre comentei com alguns alunos do curso de Engenharia de minha universidade sobre um artigo da edição 80 da Revista do Professor de Matemática (RPM), da Sociedade Brasileira de Matemática, escrito por Luiz Fernando Nunes, sob o título *Calculando a potência* 2^{1000}. Este comentário não foi de todo acidental. Em parte porque estava com a publicação comigo e em parte porque tenho o hábito de expor meus alunos a situações a partir das quais podem emergir problemas. A edição 80 é comemorativa e apresenta nova estrutura gráfica e por esta razão tenho mantido-a na minha mochila nos últimos meses. Claro que nem sempre surgem indagações, mas muitas vezes um mínimo estado de inquietação ocorre.

Muitos de meus alunos são interessados em tecnologia e particularmente em informática e assim o assunto se estendeu um pouco mais, pois no artigo citado, o autor mediante recursos de informática, determinou com todos os devidos algarismos o resultado da potência 2^{1000}.

É curioso como os jovens por vezes são extremamente crédulos e em outros momentos, nesse em particular, se mostram desconfiados a ponto da incredulidade. De fato vários deles levantaram a dúvida sobre se o resultado apresentado de fato era o correto. Afinal 2^{1000} possui 302 algarismos e isso chamava demais a atenção deles, pois relataram que nunca haviam visto um número desta extensão grafado com todos os seus algarismos.

Certamente impressiona até mesmo os professores mais experientes:

2^{1000} =

1071508607186267320948425049060001810561404811705533607443750388370
3511051124936122493198378815695858127894672917553146825187145285692314043
5984577574698574803934567774824230985421074605062371141877954182153046474
9835819412973987675591655439460770629145711964776865421676604298316526243
86837205668069376.

Percebi nesse momento que era possível levantar a questão para turma, que está no terceiro semestre letivo do curso, e fazem aulas comigo de Cálculo Integral. Fique claro que não estava preocupado em usar o exemplo do artigo para Cálculo Integral, mas desejava aproveitar o estado de dúvida como um legítimo momento para discutir um problema, qual seja: O resultado apresentado no artigo para 2^{1000}, com seus 302 algarismos, está correto? Esta minha preocupação de aproveitar um estado de problematização é importante quando se pensa na investigação matemática em sala de aula, segundo (PONTE, 2003), ainda mais quando se busca gerar as condições para que um ambiente de aprendizagem se forme com Modelagem Matemática. Tenho sólida preocupação que meus alunos do curso de Engenharia não resolvam problemas de cálculo pelo simples ato de resolver problemas de cálculo. Preocupa-me que as técnicas que desenvolvemos em Cálculo Integral e antes em Cálculo Diferencial sejam usadas para compreender a própria Engenharia e fornecer aos alunos ferramentas para seu trabalho. Assim a postura de Modelador Matemático, e momentos de investigação matemática em sala, tem permitido a geração de um ambiente de trabalho interessante, com o desenvolvimento de posturas colaborativas entre todos os participantes.

2. As abordagens

Dentre as primeiras ideias que ocorreram a eles a mais imediata foi testar a potência, 2^{1000}, nas calculadoras científicas, que os próprios alunos de engenharia utilizam. De um modo geral todos conseguiram verificar os primeiros algarismos, $1{,}07150861.10^{301}$. Mesmo usando a calculadora do Windows (pois um dos alunos estava com seu laptop) o resultado encontrado foi $1{,}0715086071862673209484250490 6.10^{301}$. De fato um avanço, mas estava muito longe do desejável na opinião deles.

Do bate papo deles se tornou ponto de honra determinar não os primeiros algarismos, pois afinal eles são facilmente obtidos em uma calculadora científica, mas sim os últimos.

No artigo da RPM (NUNES, 2013) o valor apresentado termina em seis, ou seja, o algarismo das unidades é seis.

É interessante como espontaneamente eles foram aplicando a metodologia científica, pois já haviam observado o resultado, questionado se o resultado estava correto e agora buscavam evidências se de fato o resultado era correto ou não. Na verdade salientei isso a eles.

Uma potência de dois pode terminar em seis? – perguntei a eles.

Em instantes alguns perceberam que sim, pois, por exemplo, $2^4 = 16$.

Mas 2^{1000} terminaria em seis?!

Outros dois colegas mais ao fundo na sala (importante: estamos em sala de aula – com eventual atraso do conteúdo previsto – mas com grande ganho de interação de todos os participantes) lembram os demais que também terminam em seis, $2^8 = 256$; $2^{12} = 4096$;

ou seja, potências de dois que atendam ao formato 2^{4k}, onde k é natural diferente de zero, terminam em seis.

Essa generalização não foi minha e sim deles!

Assim 2^{4k} é o caso de 2^{1000} onde k = 250.

Eles facilmente perceberam isso analisando as possibilidades, o que foi esquematizado por um aluno no quadro a seguir.

Final ➔	**2**	**4**	**8**	**6**
Expoentes	1	2	3	4
Expoentes	5	6	7	8
Expoentes	9	10	11	12

Para esclarecer o quadro acima. Se a base dois for elevada a 11 o algarismo das unidades será 8. Se for elevada a 6 o algarismo será 4 e assim por diante. Deste quadro eles perceberam que o final 6 ocorre nos expoentes que são múltiplos de 4.[1]

Alguns deles começaram então a não mais questionar o artigo e passaram então a assumir uma postura resignada de que o resultado apresentado estava correto. Um aluno levantou que a confirmação dos 30 primeiros algarismos e o último deles deixava longa margem para dúvidas, pois ainda faltavam 271 algarismos e isso significava que quase 90% deles eram desconhecidos para a turma, ou pelo menos não confirmavam o resultado do artigo. Esta postura um tanto radical de início acaba sendo abrandada na medida em que exploram o problema.

Contudo a abordagem anterior para dois algarismos era bastante trabalhosa, pois enquanto as potências de dois possuem apenas quatro finais possíveis, se considerarmos os dois algarismos finais vamos chegar a 21 resultados possíveis. Para quem desenvolver os 21 resultados possíveis verá que 76 é um deles[2].

Nessa altura precisava dar continuidade a minha programação e pedi que deixássemos este assunto para outro momento, no que fui atendido, mais por eles estarem um tanto sem saída e menos por autoritarismo do professor, pois certamente não sou autoritário frente a eles. A postura de professor modelador dentro de um ambiente de aprendizagem deve ser mais a de um colaborador, ou melhor, de um participante.

[1] Pelo menos para expoentes inteiros maiores que zero.

[2] De fato eles são 2;4;8;16;32;64;28;56;12;24;48;96;92;84;68;36;72;44;88;76 e 52, na ordem em que aparecem.

Evidentemente que a maior experiência do professor o colocará naturalmente na condição de participante orientador.

3. Na continuação um pouco de aritmética de resíduos

Na semana seguinte, e depois é claro de alguns emails com sugestões de abordagens, vi que não poderia fugir do assunto (principalmente porque eu o provoquei) e assim replanejei as próximas aulas para que pudesse usar um momento das mesmas para fazer um pouco de aritmética de resíduos[3].

Para tal defini: Sejam a e b dois números naturais tais que $a > b$. Seja ainda r o resto da divisão inteira entre a e b. Diz-se que a é côngruo de r em módulo b, $a \equiv r \pmod{b}$. Dessa forma $9 \equiv 1 \pmod{2}$, pois se dividirmos 9 por 2 obtemos quociente 4 e resto 1. E ainda, como exemplo, $12 \equiv 0 \pmod{4}$, pois o resto da divisão entre 12 e 4 é zero. O que é interessante aqui é que o resto possui várias propriedades operatórias que o ligam ao número original. Entre elas: Se $a \equiv r_1 \pmod{b}$ e $c \equiv r_2 \pmod{b}$ então $a + c \equiv r_1 + r_2 \pmod{b}$. Essa propriedade pode ser verificada também para a subtração, multiplicação e potenciação.

Feitas as devidas demonstrações para o grupo de alunos e também por que eles "testaram" alguns valores em suas calculadoras (chamo isso de *Efeito São Tomé*) usamos as propriedades apresentadas para determinar os últimos algarismos de 2^{1000}.[4]

$2^{1000} = (2^4)^{250} = (16)^{250} \equiv (6)^{250} \pmod{10}$. Trabalhar em módulo 10 faz com que o resultado tenha um único algarismo e assim podemos detectar qual é esse algarismo. Ocorre que as potências de seis sempre terminam em seis e assim 2^{1000} termina em seis.

Para poder acompanhar os dois últimos algarismos precisamos trabalhar em módulo 100.

$2^{1000} = (2^{10})^{100} = (1024)^{100} \equiv 24^{100} \pmod{100}$

$(24^2)^{50} = (576)^{50} \equiv 76^{50} = (76^2)^{25} = (5776)^{25} \equiv 76^{25} \pmod{100}$

Todas as potências de 76 são terminadas em 76 e assim $2^{1000} \equiv 76 \pmod{100}$, ou seja, os dois últimos algarismos são 76.

[3] Aritmética modular, álgebra de relógio são outras denominações.

[4] A bem da verdade desenvolvi esse raciocínio com um grupo de alunos em um curso de verão em janeiro deste ano. Mas como são de instituições diferentes e os alunos não tem contato entre si, o assunto é de fato novo.

Nessa altura fiz a proposta a eles que determinassem os três últimos algarismos com base nesta aritmética.

4. Uma contribuição inesperada, mas muito bem-vinda

Na semana seguinte de modo geral os alunos já haviam abandonado o problema, simplesmente porque o interesse sobre o mesmo havia se reduzido.

Neste ponto surgiu uma contribuição interessante. A turma possui mais rapazes que moças e eles estavam mais empolgados com o assunto. Mas uma das alunas, muito tímida, trouxe uma contribuição. Ela havia tentado manualmente construir todos os finais possíveis para as potências de 2, com três algarismos. Mas desistiu, pois percebeu que havia uma variedade muito grande. Lembro que existem quatro finais possíveis com um algarismo e 21 finais possíveis com dois algarismos. A aluna determinou que existem 102 finais possíveis com três algarismos e que com quatro algarismos são 503. Como ela conseguiu isso?

Ela e outra colega, esta última da computação, fizeram uma planilha Excel produzir os resultados. Indaguei como elas conseguiram controlar os últimos algarismos e para minha surpresa usaram um truque muito simples convertendo os números em texto e depois de volta em números.[5]

Claro que elas verificaram que o final com três algarismos, 376, era uma das possibilidades e que também, com quatro algarismos, 9376, estava na planilha delas.

Apesar da timidez delas fiz questão que apresentassem para turma a planilha e os raciocínios usados.

Interessante também foi notar que há uma lei de formação na quantidade de finais possíveis em função da quantidade de algarismos. Este detalhe não foi notado pelas alunas, mas percebi e discutimos isso por mais um pouco.

É curioso notar que:

Para 1 algarismo final existem 4 possibilidades.

Para 2 algarismos finais existem 21 possibilidades.

Para 3 algarismos finais existem 102 possibilidades.

Para 4 algarismos finais existem 503 possibilidades.

[5] Mais detalhes lamentavelmente fogem do escopo deste trabalho

E assim deduzimos que deveria haver, para 5 algarismos finais, 2504 possibilidades.

Rapidamente generalizamos na lousa da sala que para n algarismos finais existiriam ($5^{n-1}.4 + n - 1$) possibilidades. As alunas já tinham verificado os 5 últimos algarismos e por isso sabiam que existiam de fato 2504 possibilidades. Pedi a elas que conferissem 6 algarismos e de fato foram encontrados 12505 possibilidades, conforme a relação apresentada.

5. Vencidos pelo cansaço

De fato todos os alunos da turma já haviam dado seus palpites no problema dos três últimos algarismos. Visivelmente mais interessados no problema de aritmética de resíduos do que nas aulas Cálculo Integral e estávamos cansados, mas felizes pelos avanços na nossa pesquisa matemática particular.

Em grupo apresentaram uma solução:

$$2^{1000} = (2^{10})^{100} \equiv 24^{100} = (24^4)^{25} \equiv 776^{25} = (776^5)^5 \equiv 376^5 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Como os resultados obtidos até o momento, a duras penas, reproduziam os últimos algarismos de 2^{1000} os alunos se deram por vencidos e acatavam, respeitosamente, o resultado apresentado no artigo, elogiando o trabalho do autor na identificação, ainda que por intermédio da informática, de todos os 302 algarismos da potência.

6. Considerações Finais

As aulas de Cálculo Integral foram retomadas e os eventuais atrasos compensados dentro do horário das próprias aulas, principalmente porque todos contribuíram com dedicação aos exercícios. O grande ganho não foi o desenvolvimento da planilha, nem as discussões sobre aritmética modular ou se conseguíamos ou não estabelecer se os 302 algarismos apresentados no artigo da RPM estavam corretos ou não. O grande ganho foi trabalho colaborativo de todos os atores envolvidos, professor, alunos e alunas e principalmente a sensação de que podemos fazer matemática e desta forma, praticando-a, aprender matemática. Claro que alguns colegas dirão que por serem alunos de Engenharia estão mais habilitados, mais qualificados em se envolver em matemática.

Não vejo dessa forma.

Os alunos usaram as ferramentas que tinham a mão. E elas não fazem parte de um corpo avançado de matemática. Trabalhamos com conceitos simples e usando ferramentas simples, com apoio da tecnologia, mas da tecnologia com bom uso, em beneficio de todos.

Não tenho dúvidas de que um ambiente de aprendizagem colaborativo, fazendo uso da investigação matemática em sala de aula, propicia reforço nos relacionamentos dos participantes, com destaque ao respeito às habilidades e deficiências pessoais. Assim o professor não é autoritário, não é o centro do processo de ensino e aprendizagem, mas sim os alunos.

7. Referências

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores**. Tese de doutorado. Rio Claro: Unesp, 2001.

NUNES, L. F. Calculando a potência 2^{1000}. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 80, p. 46-48, Jan-Abr 2013. ISSN 0102-4981.

PONTE, J. P. D. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.