MODELAR A FUNÇÃO AFIM CONSIDERANDO OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Sandra Magina
Universidade Estadual Santa Cruz e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
sandramagina@gmail.com

Rogério Fernando Pires
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e Universidade Federal de São Carlos
rfpires25@hotmail.com.br

Resumo:
Este artigo discute a contribuição que a psicologia cognitiva, por meio de suas diversas teorias, pode trazer para a construção e análise de um estudo intervencionista. Para promover tal discussão apresentamos, a título de exemplo, um estudo, de caráter quase-experimental, realizado com alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, com vistas promover a compreensão matemática desses alunos, no que tange à introdução do conceito de Função Afim. Os resultados apontam para uma intervenção de ensino bem sucedida, a qual foi conduzida em sala de aula ao longo de cinco encontros de duas horas/aula cada. A pesquisa envolveu dois grupos – experimental (GE), composto por 29 alunos, e controle (GC) composto por 24 alunos. A construção do estudo apoiou-se nas teorias da Educação Matemática, nomeadamente Modelagem e Modelação. Para efeito de nosso propósito, olharemos para os resultados na perspectiva de uma teoria cognitiva, especificamente os Registros de Representação Semiótica.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica; Função Afim; Intervenção de Ensino; Ensino Fundamental; Modelação.

1. Introdução

A Educação Matemática é um campo de investigação que já nasceu interdisciplinar; essa é certamente a sua característica intrínseca mais marcante. Seu próprio nome já indica isso, deixando claro que dela toma parte tanto a Educação quanto a Matemática. Se olharmos com mais acuidade veremos que ela rompe as fronteiras da Educação e da Matemática, adentrando em muitas outras ciências como a Psicologia, a História, a Antropologia, a Sociologia etc. E assim é que temos a Filosofia da Educação Matemática, a Historia da Educação Matemática e, talvez, a mais conhecida de todas, a Psicologia da Educação Matemática (PEM).

A PEM é um domínio de pesquisa relativamente recente – a primeira reunião científica internacional do grupo PEM foi em 1977 – que surgiu para trazer subsídios teóricos advindos da Psicologia para a pesquisa em Educação Matemática. Na busca de diferenciar a contribuição da Psicologia dos outros domínios que também subsidiam a Educação Matemática, Falcão (2003, p. 16) aponta três aspectos que a Psicologia reúne: (a) "uma clara preocupação com a atividade mental de um sujeito humano real", aqui incluindo as questões sócio-histórico-culturais e afetivas, (b) "uma preocupação com conceptualização em Matemática", e (c) "o compromisso com a construção do conhecimento científico" oferecendo para a Educação Matemática um "conjunto de premissas epistemológicas e teóricas" que subsidiam as interpretações das situações das pesquisas na área.

Sob esta ótica, dividimos a presente mesa redonda – *Diferentes Perspectivas a Respeito das Contribuições da Psicologia para a Educação Matemática* – a em dois enfoques: o primeiro, abordado por Alina Spinillo, foca a importância de se compreender como se caracteriza o raciocínio matemático que emerge em uma dada situação-problema. Esse enfoque lança mão de exemplos de procedimentos de resolução de problemas típicos das estruturas multiplicativas, adotados por alunos do Ensino Fundamental, ao resolverem um instrumento diagnostico. O Segundo enfoque, abordado aqui neste artigo, versa sobre estudos de intervenções que buscam desenvolver a compreensão matemática dos alunos, auxiliando a superar dificuldades experimentadas em relação a um dado conceito. Essas investigações, além de procurar desenvolver formas de raciocinar mais sofisticadas, procuram também testar a eficácia de propostas didáticas específicas conduzidas em sala de aula. A apresentação desta segunda perspectiva dar-se-á por meio da apresentação, de uma pesquisa de intervenção com alunos do ensino fundamental com o objetivo de, através da modelagem, desenvolver a compreensão acerca de função afim.

2. Um pouco de Modelagem

Nos últimos tempos a modelagem matemática vem ganhando terreno como uma das boas abordagens pedagógicas para o ensino de Matemática. Tal visão já é compartilhada desde 1998 pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o qual sugere e valoriza o uso de atividades matemáticas utilizando tal aporte. De fato, o trabalho com modelagem se apresenta como um caminho que permite o despertar do interesse pela Matemática no estudante, já que ela permite investigar situações originárias da realidade ou do dia-a-dia das pessoas.

Basanese (2006) explica que a modelagem consiste essencialmente em transformar situações da realidade tangível em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Nessa direção, Pires (2009, p.42) é enfático ao afirmar que “a modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com a aproximação da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre as representações de um sistema ou parte dele”.

Assim, podemos entender que o modelo matemático é a representação de uma situação relacionada com o mundo real expressa em linguagem matemática, ou seja, que a modelagem refere-se a modelos criados com o objetivo de explicar as situações do cotidiano pela ótica matemática.

3. A Modelação

Podemos entender a modelação como um método que faz algumas adaptações na modelagem matemática para permitir o seu uso em sala de aula sem, contudo, deixar de cumprir o programa do curso regular da disciplina. Biembengut e Hein (2007: 18), explicam:

> Na modelação, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo a sua recriação em sala de aula, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto. (BIEMBENGUT e HEIN, 2007: 29).

Então, podemos afirmar que, diferentemente da modelagem, na modelação o professor pode ele próprio escolher os modelos com os quais quer trabalhar, sendo que estes modelos serão recriados pelos alunos com auxilio do professor.

4. Uma visão resumida da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (RRS)

Segundo Duval (2009) a RRS trata-se de uma teoria psicológica que busca descrever o funcionamento cognitivo por meio do qual o aluno compreende, efetua e controla os vários processos matemáticos presentes nas situações de ensino. Ele justifica o uso de tal teoria baseado em dois critérios:

1. Os objetos matemáticos (desde os números) não são diretamente perceptíveis; costumam estar ligados a sistemas de representação;

2. A Matemática usa uma grande gama de representações semióticas – sistema numérico, figuras geométricas, representação gráfica, língua natural, etc...

Uma das ideia centrais dessa teoria refere-se a duas transformações das representações semióticas: a *conversão* e o *tratamento*. Um *tratamento* acontece quando se trabalha com diferentes registros, mas todos dentro de um mesmo sistema, por exemplo:

$3 \text{ X } 4 = 2 \text{ X } 6 = 12 = 24 \div 2$ Aqui se tem o 12 em diferentes registros, mas todos dentro do sistema de numeração decimal, no campo dos naturais.

A *conversão* de uma representação semiótica acontece quando há uma mudança de sistema, embora se conserve a referência do objeto matemático. A figura baixo ilustra uma situação de transformação de registro por meio de conversão, quando se apresenta um exemplo de função afim em sua representação algébrica e ao lado essa mesma função representada tabularmente em uma situação específica.

Figura 2: Exemplo de uma conversão de representação semiótica em outra representação retirado de um dos protocolos coletado no âmbito do estudo que apresentaremos a diante.

$$f_{(x)} = 2x + 5$$

km rodado	1 km	3 km	5 km	7 km
Total cobrado em (R$)	7,00	11,00	15,00	19,00

Duval (2011) chama atenção para os fenômenos presentes nesse tipo de transformação; a congruência e a não congruência. Uma conversão se diz congruente quando é possível identificar uma correspondência semântica termo a termo entre os elementos do registro de partida e os elementos do registro de chegada e a conversão no sentido contrário acontece de forma direta. Já no fenômeno de não congruência, essa correspondência semântica não existe e a conversão no sentido contrário não acontece de maneira direta.

É muito comum, o aluno se deparar com atividades que na sua realização são feitas algumas conversões em que predominam o fenômeno da não congruência, e o que acaba acontecendo na maioria das vezes, caso o estudante não tenha domínio com relação ao objeto matemático envolvido em tal atividade, é um não reconhecimento de tal objeto ao término dessa atividade. Assim, ele não consegue estabelecer uma correspondência entre o registro de partida e o registro de chegada. Esse autor ainda defende a ideia de que apenas quando o aluno for capaz de trabalhar simultaneamente com, pelo menos, dois registros distintos do mesmo objeto, podendo transitar de um para o outro, é que se pode falar em aprendizagem.

5. O estudo.

O estudo foi realizado com duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública do interior Estado de São Paulo. A primeira turma constituiu o grupo controle (GC), composto por 24 sujeitos e a segunda, em que desenvolvemos a intervenção de ensino, o grupo experimental (GE), composto por 29 sujeitos.

A participação do GC na pesquisa resumiu-se a responder um teste inicial (pré-teste) e um teste final (pós-teste), ambos aplicados no mesmo dia em que foi aplicado ao GE. O GE ainda participou de uma intervenção de ensino conduzida em sala de aula ao longo de cinco encontros de duas horas/aula cada. Essa intervenção foi toda realizada por meio de resolução de problemas, os quais eram propostos por meio de fichas. Foram trabalhadas sete fichas, sendo que cinco delas nos encontros (uma por encontro) e duas propostas para casa (entre o 2º e 3º encontro e entre o 4 e o 5º encontro).

O pré-teste teve por objetivo diagnosticar os conhecimentos prévios desses alunos sobre o assunto em questão e o pós-teste de avaliar o que foi aprendido após a intervenção e de servir de parâmetro de comparação entre os grupos. Os dois testes foram constituídos por 10 questões, as quais apresentavam equivalências no conteúdo, no grau de dificuldade e nas contextualizações. No entanto, houve mudança na ordem de apresentação nos testes.

A intervenção partiu de uma situação efetivamente motivadora, escolhida pelos próprios alunos, qual seja a manipulação de três bombas de aquário idênticas, manipuladas pelos alunos nas aulas de Arte. Percebemos que a partir destas bombas poderiam surgir questões que gerariam problemas, cujas soluções poderiam ser encontradas por meio de uma função afim. Portanto, elaboramos uma intervenção de ensino cujos encontros discutiremos brevemente a seguir.

1º Encontro: Relação de dependência entre duas grandezas e expressões matemáticas que evidenciam esta relação – Neste encontro, desenvolvemos três atividades por meio de fichas.

2º Encontro: Construção de gráficos de uma função afim – Neste encontro procuramos desenvolver as habilidades necessárias para a construção de gráficos de uma função, partindo de uma tabela ou de uma expressão algébrica. Os alunos coletaram dados, observando o funcionamento das bombas e criaram modelos que permitiram a resolução do problema proposto.

3º Encontro: Do registro gráfico para o registro algébrico – O objetivo deste encontro foi trabalhar a mudança do registro gráfico para o registro algébrico e o reconhecimento do crescimento e o decrescimento de uma função afim por meio de sua representação gráfica.

4º Encontro: Noções de coeficiente angular e linear – Neste encontro trabalharam-se as noções de coeficiente angular e linear, e as alterações que o coeficiente angular acarreta no comportamento gráfico da função.

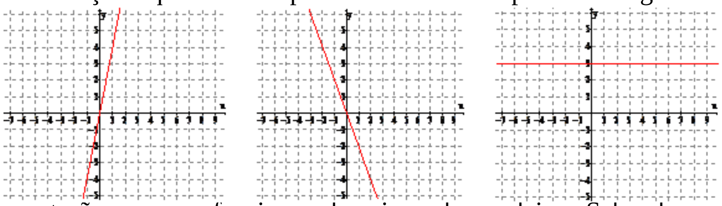
5º Encontro: Fechamento da intervenção – Planejado como o fechamento da intervenção de ensino, o encontro iniciou-se pela discussão da ficha 6, cujo objetivo foi o de explorar todos os conceitos trabalhados nos encontros anteriores.

Quadro 1: O teste utilizado como instrumento diagnóstico.

Atividade 01: Construa um gráfico de segmentos com os dados da tabela abaixo.

X	2	4	6	8
Y	3	6	9	12

Atividade 02: Classifique as funções que estão representadas abaixo pelos seus gráficos, como crescente, decrescente ou constante.



Atividade 04: João é um artesão que confecciona chaveiros de madeira. Sabendo que ele é capaz de confeccionar 6 chaveiros em uma hora, quantos chaveiros ele confeccionará em:

5 horas (Espaço para os cálculos)

Resposta: ___________________

Atividade 05: Uma bomba é capaz de bombear 120 litros d'água por hora. Seja v=f(t) a função da quantidade d'água em função do tempo.

a) Construa, no espaço abaixo, o gráfico da quantidade d'água em função do tempo. Considere a quantidade de água em litros e o tempo em minutos.

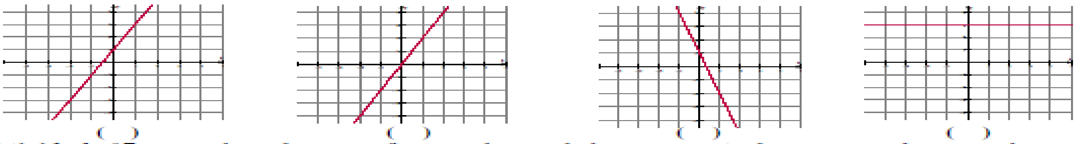
Cole aqui o seu gráfico

b) Qual é a quantidade de água bombeada após 10 minutos?

c) A função v=f(t) é crescente ou decrescente?

Atividade 06: Associe cada uma das funções abaixo as suas respectivas representações gráficas.

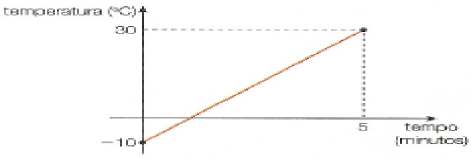
FUNÇÕES: **(I) y=2x** **(II) y=2x+1** **(III) y=-3x+1** **(IV) y=3**



( ) ( ) ( ) ( )

Atividade 07: Considerando que as funções da atividade anterior são do tipo y=ax+b, responda:
a) Quais são os coeficientes de cada uma destas funções?
(I) ________________ **(II)** ________________ **(III)** ________________ **(IV)** ________________
b) analisando as quatro funções apresentadas na atividade 06 e suas respectivas respostas, o que podemos concluir sobre o coeficiente a?
____
____

Atividade 08: Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10° C foi aquecida até 30° C. O gráfico representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nesta experiência:



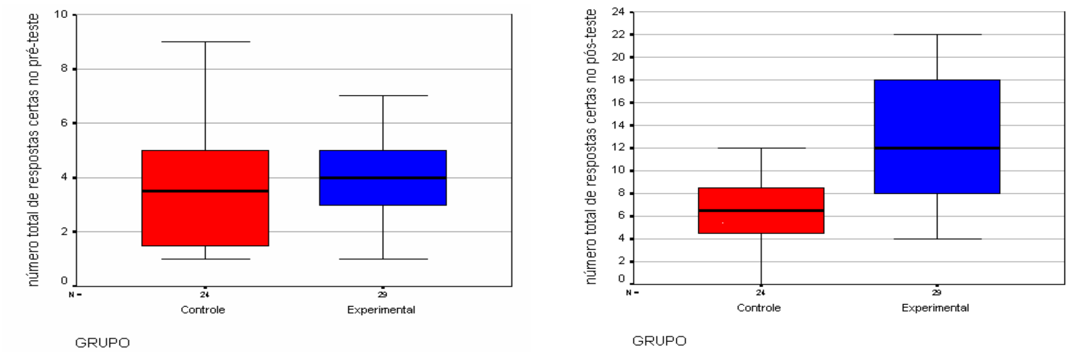
a) Determine a função que fornece a temperatura da barra de ferro em relação à variação do tempo. Ela é uma função crescente ou decrescente?
Resposta: ____
b) Em quanto tempo, após o inicio da experiência, a temperatura da barra atingiu 0° C?
Resposta: ____

Atividade 09: Um carro mantém uma velocidade constante de 72 km/h durante 10 segundos de seu movimento. Sejam v=f(t) e s=f(t) as funções da velocidade e da distância percorrida em função do tempo.
a) Construa, no espaço abaixo, o gráfico da velocidade em função do tempo.

b) Qual é a distância percorrida pelo carro nesses 10 segundos?
Resposta: ____
c) As funções v=f(t) e s=f(t) são crescente ou decrescente?
Resposta: ____

6. Análise dos Resultados

Iniciamos a análise apresentando os resultados quantitativos, em que se mostra que desempenhos iniciais dos dois grupos, GC e GE, foram similares no pré-teste, mas que isso muda no pós. Nota-se que, embora os dois grupos tenham crescido, o GE cresceu significativamente mais que o GC, como deixa bem claro o boxplot apresentado a seguir.



Do ponto de vista da análise qualitativa, foi possível identificar, a partir das estratégias utilizadas pelos alunos, oito tipos de erros, apresentados no quadro a seguir:

Quadro 2: tipos de erros encontrados nas respostas dos alunos do GE

Erro 1 (E1) – erro relativo à proporcionalidade/operação
Erro 2 (E2) – referente à ideia de variável,
Erro 3 (E3) – relativo à construção de gráficos,
Erro 4 (E4) – não reconhece no gráfico as informações sobre a função afim,

Erro 5 (E5) – não conhece os coeficientes de uma função afim,
Erro 6 (E6) – desconhecimento da relação do coeficiente angular com o crescimento/decrescimento
Erro 7 (E7) – não reconhece a expressão algébrica de uma função afim por meio de sua representação gráfica,
Erro 8 (E8) – obtenção de informações (explícitas ou implícitas) presentes no gráfico da função

A tabela a seguir mostra o comportamento, nos pré e pós-testes, dos alunos do GE com relação a esses erros, chamando atenção para o comportamento desses alunos no que diz respeito aos E4 e E7, ambos que envolvem conversão entre dois registros de representação.

Tabela 1**:** Número de tipos de erros no GE no pré e no pós-teste.

Tipos de erros	Pré teste	Pós teste	Diferença entre os erros do pré para o pós-teste
E1	5	3	2
E2	26	24	2
E3	73	41	32
E4	52	18	34 Ausência de conversão
E5	69	55	14
E6	9	11	-2
E7	115	59	56 Ausência de conversão
E8	50	11	39
Total	399	222	177

Tendo a teoria RRS em mente, principalmente quando esta afirma que é preciso que o sujeito seja capaz de transitar pelo menos por dois registros de representação distintos para poder se falar em apropriação de conceito, podemos interpretar os resultados do estudo indicam que a intervenção de ensino foi bem sucedida. É lógico que cinco encontros não é um intervalo de tempo suficiente para que o conceito de função afim esteja dominado por completo, mas o comportamento dos alunos, determinado pela queda (algumas vezes bastante expressivas) no na quantidade de erros, aponta para a eficiência da sequência.

Conclusão

Iniciamos nossa conclusão considerando que é perfeitamente possível introduzir com êxito a função afim no 7º ano do Ensino Fundamental e talvez até antes, se consideramos usar as transformações de representações semióticas propostas na teoria RRS, principalmente no que tange a transitar entre a representação *gráfica* e a algébrica e/ou, ainda, entre as representações tabular e algébrica.

Defendemos a ideia de que esta a intervenção de ensino seja realizada por meio da resolução de problemas modelados, iniciando pela função linear, possibilitando inclusive a associação entre a representação gráfica e a proporcionalidade.

Por fim, gostaríamos de fechar este artigo afirmando o quão importante foi poder analisar os comportamentos dos alunos frente às questões dos instrumentos diagnósticos a luz da teoria RRS. De fato, por meio dessa ótica pudemos compreender o que significava, em termos de apropriação do conceito de função afim, as diversas ações dos alunos, tanto no pré quanto no pós-testes e, principalmente, as mudanças acontecidas de um para o outro. É sob essa ótica, de auxiliar na compreensão dos raciocínios, analisados a partir das ações, que compreendemos a contribuição da Psicologia para a Educação Matemática.

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto Editora, 2006.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto Editora, 2007.

BRASIL/SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. L. F. Levy e M. R. A. da Silveira (Trads.). São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, R. *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica*. M. A. Dias (Trad.). São Paulo: PROEM, 2011.

PIRES R. F. *O uso da modelação matemática na construção do conceito de função.* Dissertação de Mestrado não-publicada. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo, SP: PUC-SP, 2009.