REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES USANDO O WINPLOT[1]

Bruno Marcondes Umbezeiro
UEM – Universidade Estadual de Maringá
brunopitagoras@hotmail.com

Sérgio Carrazedo Dantas
UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná
sergio@maismatematica.com.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma reflexão das possibilidades de uso do software WINPLOT[2] no tratamento e conversão de registros de representação de funções. Baseados em resultados de estudos sobre registros de representações semióticas, especialmente naqueles em que estão contempladas as relações intrínsecas que existem entre as representações e os objetos matemáticos, constituímos o nosso referencial teórico. Fazemos em seguida uma breve explanação sobre o objeto matemático funções, voltada principalmente para o estudo de seus diferentes tipos de representações. Objetivando dinamizar os processos de tratamento e conversão das representações de funções, e mostrar que o software gráfico WINPLOT pode ser usado para esta finalidade. Na sequência, apresentamos duas atividades nas quais utilizamos o software WINPLOT para realizar construções e coordenações entre diferentes tipos de representação de funções, enfatizando juntamente com a sua análise, algumas contribuições da utilização do software nos processos de ensino e aprendizagem de funções.

Palavras chave: Semiótica; Representações; Funções; Winplot.

1. Introdução

Esse trabalho é uma síntese de nossa pesquisa de especialização, no qual buscávamos responder a seguinte pergunta: “De que maneira o software WINPLOT possibilita as várias representações do objeto matemático funções?”.

---

[1] Este artigo é resultado de uma monografia de mesmo título apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL no ano de 2012. Disponível em: http://www.maismatematica.com.br/monografiaumbezeiro.pdf

[2] Criado por *Richard Parris* da *Phillips Exeter Academy de New Hampshire* por volta de 1985, o WINPLOT é um programa para plotar gráficos de funções e de equações em duas e em três dimensões. Traduzido para o português, ele pode ser encontrado e baixado gratuitamente no site http://math.exeter.edu/rparris.

Em nossas pesquisas nos deparamos com outras questões, que nos remeteram ao estudo das relações existentes entre as representações e os objetos matemáticos. Para compreender como se davam tais relações, constituímos o nosso referencial teórico pautado principalmente na teoria dos registros de representações semióticas do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval e em trabalhos, como os de Silva (2008) e Dominoni (2005), que apresentaram reflexões e resultados da teoria de Duval.

Na sequência apresentamos diferentes formas representar funções, buscando estabelecer posteriormente com isso, um diálogo com os conceitos de tratamento e conversão da teoria de Duval.

Nossa principal contribuição com este estudo encontra-se nas reflexões feitas ao discutir os dois exemplos de atividades, cujos enunciados sugerem que tanto o professor quanto o aluno, estejam envolvidos em uma prática investigativa. E, na nossa compreensão, a exploração das funções com o software Winplot é potencializada em virtude da transição de representações possibilitada pelos recursos e ferramentas que disponibiliza.

2. Registros de representações semióticas em Matemática

A palavra semiótica vem do grego semeion, que significa signo, que por sua vez Peirce (2005) define como: "[...] algo, que para uma pessoa, toma o lugar de outra coisa (objeto), não em todos os aspectos desta coisa, mas somente de acordo com certa forma ou capacidade." Sintetizando, esta área de conhecimento se ocupa do estudo das representações dos objetos[3].

Kant (1996) em sua Crítica da Razão Pura defende que tudo o que se pode dizer sobre as coisas se deve apenas as formas como essas coisas se apresentam a nós, ou seja, com relação aos seus fenômenos[4]. Encontramos na semiótica uma importante aliada, no sentido de nos ajudar a compreender o mundo de acordo com aquilo que o filósofo Arthur Schopenhauer (1788-1860) propôs em sua obra "O mundo como vontade e como representação".

[3] Para Peirce (2005), um objeto "é uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir" (p. 48).

[4] Segundo Santaella (1988) Peirce diz que "A primeira instância de um trabalho científico é a fenomenológica", ou seja, para que se possa realizar um trabalho que tenha como fim a compreensão de um determinado conceito se faz necessário se ater primeiramente aos fenômenos que este possui, afim de que a partir do entendimento isolado de cada um dos fenômenos, possa-se idealizar algo que se aproxime ao máximo do significado real do objeto estudado.

Para Schopenhauer (2005) todas as coisas que existem no mundo só podem ser consideradas como parte da nossa realidade, pelo fato de ser possível poder representá-las e, por conseguinte dizer algo com relação as suas representações. Ou seja, se algo não pode ser representado, esse algo não existe, pois nada se pode dizer dele.

Ao estudarmos alguns conceitos e ideias de Peirce, Kant e Schopenhauer, percebemos o quanto as representações são importantes para a formulação e a compreensão de um conceito por parte do sujeito[5].

Para Duval[6] (2003, p.14) "[...] toda a comunicação em Matemática se estabelece com base em representações."

A citação acima nos remete novamente a palavra comunicação, "tornar comum, fazer saber". Mas desta vez analisando mais a fundo o discurso, podemos perceber que há um indício, uma pista na própria afirmação, de "como" de fato se dá a comunicação matemática e de como podemos ter "contato" com ela.

Apenas a partir de reflexões, estudos e ações didáticas sobre o papel das representações semióticas na Matemática, é que poderemos ter subsídios "concretos[7]" para conseguir melhorar a maneira que a Matemática é comunicada, e na grande maioria das vezes, incompreendida.

De acordo com Bonomi (2007, p.2),

> "[...] os objetos estudados em Matemática, normalmente não estão disponíveis para serem examinados ou manipulados [...] eles existem como construções mentais [...]".

Para Duval (2003), as construções mentais não existem ou não podem ser consideradas de maneira independente das representações semióticas, ou seja, não tem como separar o entendimento de um objeto matemático, bem como conceituá-lo sem que antes ele possa ser estudado a partir de suas representações.

Ainda com relação às representações semióticas em Matemática, Bonomi (2007) salienta que para Duval

> "[...] a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio, à

[5] Schopenhauer (2005) define sujeito da seguinte forma: "Aquele que tudo conhece, mas não é conhecido por ninguém é o SUJEITO. Este é, por conseguinte, o sustentáculo do mundo, a condição universal e sempre pressuposta de tudo o que aparece, de todo objeto, pois tudo o que existe, existe para o sujeito." (p. 45).

[6] "O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, considerando as mudanças de registros de representação semiótica." (Bonomi, 2007).

[7] No sentido de podermos ter contato.

> compreensão de textos e à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos, enfrenta três fenômenos que estão estreitamente relacionados: a diversidade dos registros de representação semiótica; a diferenciação entre representante e representado e a coordenação entre os diferentes registros [...]".

A coordenação de registros semióticos pode se dar de duas formas diferentes. Segundo Bonomi (2007), no interior de um mesmo registro ela recebe o nome de tratamento e, entre registros diferentes, conversão.

É importante frisar que, para Duval a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos. Portanto, neste trabalho abordamos a prática dessa atividade cognitiva, focando um objeto matemático em especial, algumas funções.

3. Funções e suas representações

Segundo Dominoni (2005, p. 32) o conceito de Função não tem uma origem precisa, ele foi se constituindo no decorrer da história humana em diferentes partes do globo até a sua conceitualização mais recente no século XX. E ainda, que diferentemente da forma como é apresentada nos livros didáticos, a sua evolução não se deu de forma linear, "[...] mas sim com períodos de evolução, estagnação, retornos e rupturas." (Dominoni, 2005, p. 32).

Zuffi (2001, apud Dominoni, 2005, p. 33) ressalta que

> "Alguns consideram que os Babilônios já possuíam um "instinto de funcionalidade", cerca de 2000 a.C., observado através de seus cálculos de tabelas sexagesimais de quadrados e raízes. Também os gregos, tinham tabelas, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, onde percebiam a ideia de dependência funcional. Há indícios também, na França de ideias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração constante."

De acordo com Iezzi (2002) a definição formal de função é a seguinte: "Se x e y são duas variáveis reais tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é função de x."

Para Abbagnano (2007) a ideia de relação consiste de uma significação para função. Que por sua vez é definida, considerando as atuais definições apresentadas por matemáticos, da seguinte forma

> "Função [...] se trata de uma regra que une as variações de certo termo ou de um grupo de termos com as variações de outro termo ou grupo de termos. [...] distingui-se a variável dependente, que é a própria F., e as variáveis independentes ou argumentos, cujas variações são consideradas determinadas ou determináveis arbitrariamente". (Abbagnano, 2007, p. 548)

Abbagnano (2007) ainda apresenta a ótica de Peirce com respeito à ligação intrínseca que existe entre função e relação

> "[...] Dizer que uma quantidade é a F. dada de certas quantidades que valem como argumentos significa dizer simplesmente que os valores deles estão em dada relação com os valores dos argumentos, ou que uma proposição dada é verdadeira em todo o conjunto de valores de sua ordem. [...]"(Abbagnano, 2007, p.549)

Estabelecida essa correspondência que existe entre os termos função e relação, os campos do conhecimento em que este conceito matemático se faz presente e necessário[8] ficam potencialmente ampliados pelas possibilidades de aplicação.

No entanto, a coordenação de tal conceito não pode ser considerada de forma independente de suas representações. Pois sendo função um conceito matemático, e a Matemática a ciência das construções mentais, nos reportamos novamente a Duval e a sua afirmação que diz que as construções mentais não existem ou não podem ser consideradas de maneira independente das representações semióticas.

Apresentamos a seguir os três principais tipos de representação de funções que são explorados em Matemática durante a Educação Básica, cada qual compreendendo algumas propriedades que quando trabalhadas de forma conjunta com as outras representações constituem um campo fértil para a apreensão de conceito matemático.

3.1 O registro de representação algébrico

Segundo Dominoni (2005, p. 40) o registro de representação algébrico

> "[...] se utiliza de um conjunto de operações entre coeficientes numéricos e variáveis, geralmente expressas por letras, como por exemplo, x e y, de tal maneira que possa representar a relação entre as variáveis."

Como alguns exemplos de registros de representação algébrica de funções, temos:

[8] No sentido de poder servir como ferramenta na previsão de fenômenos, uma vez que encontrada a regularidade se torna possível tomar decisões antecipadas com relação a este, a fim de se atingir certo objetivo.

[9] $f(x) = x^2 + 1$ ou $y = x^2 + 1$

$h(x) = x - 7$ ou $y = x - 7$

$g(x) = \cos x$ ou $y = \cos x$

Com esse tipo de representação aliada à representação gráfica torna-se possível que seja feita uma análise do comportamento da função a partir de seus parâmetros ou coeficientes. Podendo com isso ser analisado, por exemplo, o crescimento ou decrescimento[10] da função em questão.

3.2 O registro de representação tabular

Esse registro consiste em uma forma de organizar as variáveis x e seus respectivos valores f(x) em uma tabela constituída de linhas e colunas, conservando ainda, as propriedades da função estudada.

Um exemplo é a tabela formada pelos pontos da função $f(x) = x^2 + 1$:

x	f (x)
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

A função não está no desenho da tabela, mas sim na relação estabelecida entre as duas variáveis x e f(x). Para que possamos identificar função nesta tabela, devemos perceber além dos pares ordenados, as relações entre as variáveis, analisando as regularidades que ocorrem nesta relação.

3.3 O registro de representação gráfico

De acordo com Dominoni (2005) este tipo de representação envolve o plano cartesiano, em que estão dispostos dois eixos ortogonais 0x e 0y, com a mesma origem 0. Usamos este plano para localizar pontos, realizar construções geométricas como linhas e

[9] De acordo com Zuffi (2001) a notação f (x) foi introduzida pelo matemático suíço Leonard Euler (1707-1783).

[10] Característica essa que pode ser comprovada posteriormente quando estabelecida uma relação com o registro de representação gráfica.

curvas, que representam, por exemplo, uma função.

Alguns exemplos de registros gráficos de funções:

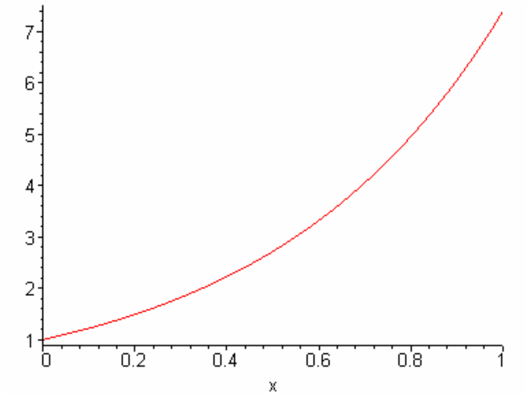

Figura 1 – Gráfico da função: $y = 6^x$

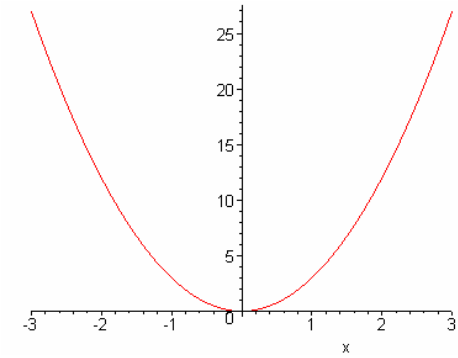

Figura 2 – Gráfico da função: $y = x^2$

Neste tipo de representação o estudo do Domínio e Imagem[11] de uma determinada função se torna mais claro, por conta da simplicidade que o desenho sugere.

4. Alguns exemplos de exercícios de funções utilizando o software WINPLOT

Nesta seção apresentamos algumas reflexões sobre as possibilidades de uso do software WINPLOT para explorar representações de funções com foco na Matemática do Ensino Médio. Para tanto, apresentamos duas atividades cujos enunciados permitem que tanto o professor quanto o aluno, estejam envolvidos em uma prática investigativa, em que a exploração do objeto matemático funções é potencializada em virtude da transição de representações[12], possibilitada pela utilização do WINPLOT.

4.1 Atividade 1 – Função Exponencial

Seja a função $f(x) = b^x$ em que b é um número real e $b > 0$ e $b \neq 1$.

a) Atribua os seguintes valores 50, 5; 0,5; 0,05 e descreva o comportamento da função.

[11] Segundo Santos *et al* (1998, p. 57) , seja a função f: A $\rightarrow$B, chamamos de domínio da função f (D(f)) o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f. E chamamos de imagem da função f (Im(f)) o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f.
[12] Algébrica, tabular e gráfica.

b) Alguma das funções obtidas no item a possui imagem com valores negativos? Por que?

Reflexões

Para responder os itens *a* e *b* dessa atividade primeiramente devemos plotar o gráfico de f(x) atribuindo os valores pedidos no item *a*.

Dessa forma as funções plotadas serão: $f(x) = 50^x$, $f(x) = 5^x$, $f(x) = 0,5^x$ e $f(x) = 0,05^x$.

Utilizando o software WINPLOT as funções apresentarão a seguinte interface gráfica, e inventário ao serem plotadas no mesmo Plano Cartesiano.

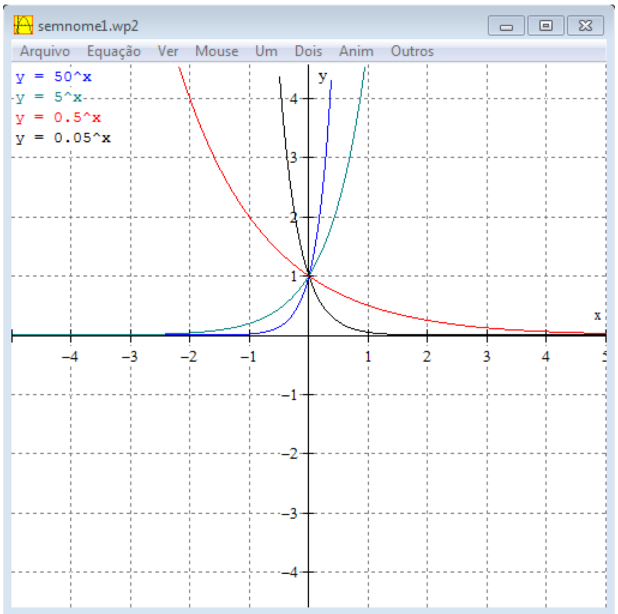

Figura 3 – Gráfico das funções $f(x) = 50^x$, $f(x) = 5^x$, $f(x) = 0,5^x$ e $f(x) = 0,05^x$.

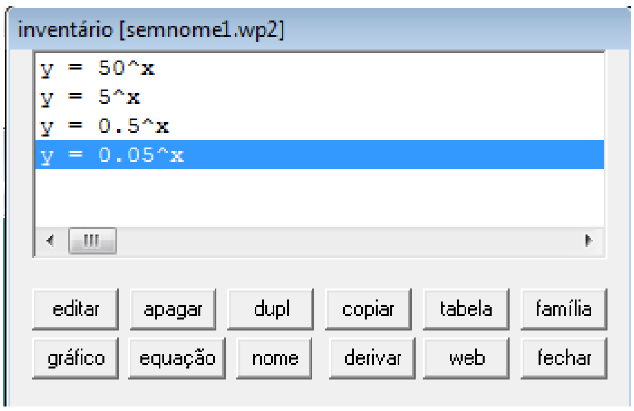

Figura 4 – Inventário das funções $f(x)=50^x$, $f(x)=5^x$, $f(x)=0,5^x$ e $f(x)=0,05^x$.

Analisando primeiramente o que foi solicitado no item *a* dessa atividade, podemos concluir que para bases maiores que 1 os gráficos serão crescentes e, para bases compreendidas no intervalo 0 < x < 1 os gráficos apresentarão o formato decrescente. E ainda, que todos gráficos interceptarão o eixo y no ponto de ordenada 1.

Já no item *b*, a questão é analisar se alguma das funções plotadas apresentam imagens negativas e por que. Para responder a essa questão podemos tanto utilizar a representação gráfica já pronta, ou então analisar as imagens nas tabelas dos pontos que compõem os gráficos plotados.

A forma mais simples de se estudar a questão das imagens negativas consiste em observar a representação gráfica e com isso, verificar se há algum desenho dos gráficos abaixo do eixo das abscissas. Como podemos perceber nessa atividade todos os gráficos foram plotados acima do eixo x, portanto respondendo o item *b*, não há funções que possuem imagens negativas. A justificativa para essa não ocorrência de imagens negativas reside no fato de que, no início da atividade foi restringida a base da função para valores positivos diferentes de 1. Sabendo que qualquer potência de base positiva sempre resultará em um número positivo, então a imagem de qualquer função que tenha uma base positiva sempre será positiva.

4.2 Atividade 2 – Função Trigonométrica

Seja a função $g(x)=a.sen(bx+c)+d$ em que a, b, c e d são coeficientes reais. Estude o efeito de cada um deles na função g.

Reflexões

Para fazer a investigação do papel gráfico dos parâmetros, optamos por realizar um estudo no WINPLOT plotando o gráfico de $g(x)=sen(x)$ sofrendo alterações gradativas nos valores de a, b, c e d em gráficos separados, a fim de que as modificações gráficas possam ser percebidas em cada parâmetro.

Antes de iniciar a investigação dos parâmetros, devemos primeiramente configurar o plano cartesiano para a plotagem de gráficos de funções trigonométricas, configurando o eixo x com a graduação de $\frac{\pi}{2}$.

Para fazer tal graduação devemos proceder da seguinte forma no WINPLOT. Abrir a área de plotagem do software, escolher o menu Ver e em seguida, a opção Grade.

O programa retornará a seguinte caixa em que poderão ser realizadas alterações nas graduações e configurações dos eixos x e y.

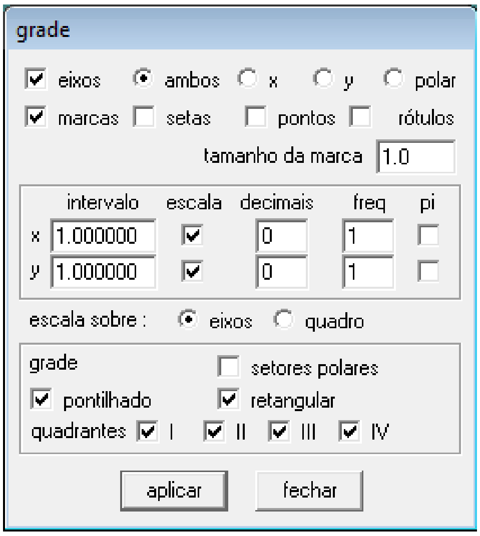

Figura 5 – Caixa grade

Para definir a graduação do eixo x basta apagar o valor 1.000000 que se encontra no campo intervalo x e, em seguida inserir o valor aproximado de $\frac{\pi}{2}$ com seis casas decimais que é 1.570796 deixando também ativa a caixa pi. Clicando no botão aplicar, o eixo x aparecerá graduado da seguinte forma.

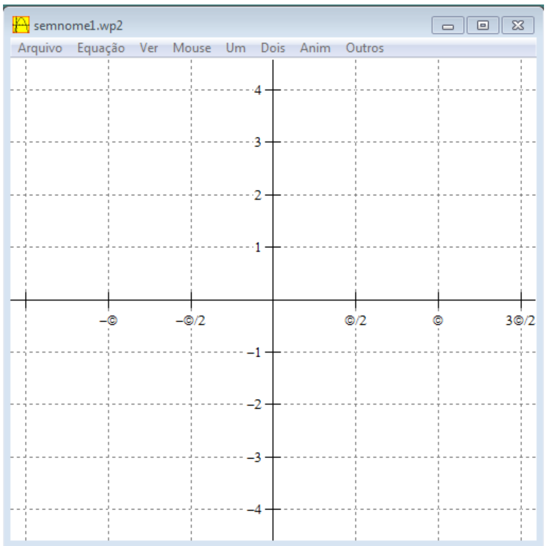

Figura 6 – Eixo x graduado em $\frac{\pi}{2}$

Configurado o eixo iniciamos então o estudo pretendido. Primeiramente investigamos o parâmetro a, plotando em um mesmo Plano Cartesiano os gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $g_1(x) = 2sen(x)$.

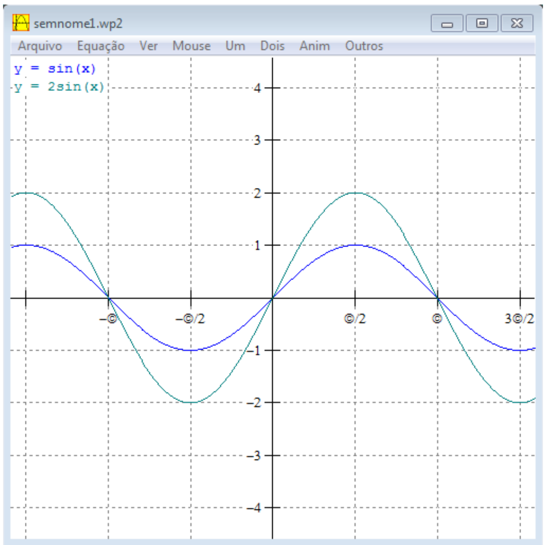

Figura 7 – Gráficos das funções $g(x) = sen(x)$ e $g_1(x) = 2sen(x)$

A partir da observação do gráfico podemos perceber que o parâmetro a representa uma modificação da imagem de g(x), que antes tinha como imagem o intervalo $-1 \leq y \leq 1$ e agora quando foi multiplicada por 2 teve o intervalo de sua imagem dobrado para

$-2 \leq y \leq 2$. Portanto o efeito do coeficiente a no gráfico da função trigonométrica é a multiplicação do intervalo de sua imagem.

De forma análoga a que fizemos no estudo do parâmetro a, também faremos na investigação do b, plotando no mesmo Plano Cartesiano os gráficos de $g(x) = sen(x)$ e $g_2(x) = sen(2x)$.

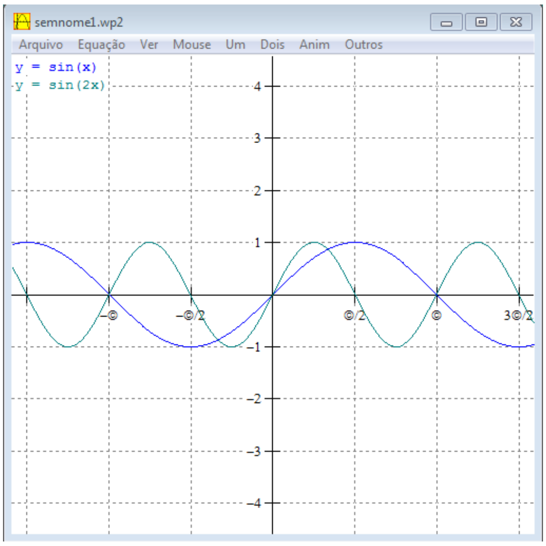

Figura 8 – Gráficos das funções $g(x) = sen(x)$ e $g_2(x) = sen(2x)$

Observando os gráficos da figura 8 percebemos que a mudança causada pelo parâmetro dessa vez foi no período da função seno. Que antes era 2π, e que agora passa a ser π. Ou seja, o coeficiente b, que nesse caso em especial foi 2, impactou na representação gráfica a divisão do período por 2. Dessa forma, o efeito de b é então a multiplicação do período da função por $\frac{1}{b}$.

Na análise do parâmetro c, obtemos o seguinte gráfico contendo as funções $g(x) = sen(x)$ e $g_3(x) = sen(x+1)$.

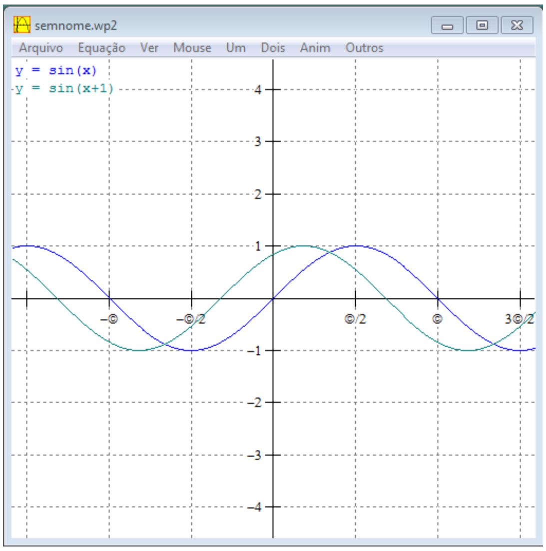

Figura 9 – Gráficos das funções $g(x) = sen(x)$ e $g_3(x) = sen(x+1)$

Dessa vez é possível perceber que o gráfico de $g_3(x)$ não apresentou alterações nem na imagem e nem no período, como ocorreu com os parâmetros a e b respectivamente. Mas, no entanto, uma mudança de deslocamento pôde ser notada, um deslocamento horizontal à esquerda com relação à g(x). Portanto quando um valor é somado ao argumento de uma função trigonométrica, esta apresenta um deslocamento de igual valor para a esquerda e, analogamente, quando o valor é subtraído o deslocamento é para a direita. Sendo assim, o papel do parâmetro c é o de deslocamento horizontal no gráfico da função trigonométrica.

Finalizando, apresentamos um gráfico para o estudo do efeito do parâmetro d, com as funções $g(x) = sen(x)$ e $g_4(x) = sen(x)+1$

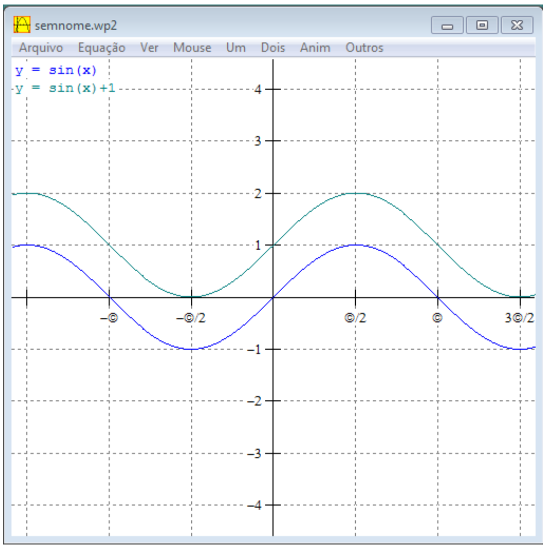

Figura 10 – Gráficos das funções $g(x) = sen(x)$ e $g_4(x) = sen(x) + 1$

Da mesma forma como o ocorrido com o parâmetro c, o d não reflete mudanças no período da função, porém, o intervalo da imagem é alterado por conta do efeito que d gera no gráfico da função, o de transladação vertical. Quando o número d é somado à representação algébrica da função trigonométrica, o gráfico sofre um deslocamento para cima e, da mesma forma, quando ocorre uma subtração, a transladação é para baixo.

5. Resultados da Pesquisa (Parciais ou Finais)

No momento em que definimos que nosso trabalho versaria sobre as representações semióticas em Matemática, nos questionamos inicialmente sobre como a ciência Semiótica se aplicava às ideias matemáticas. Ao realizar um estudo bibliográfico sobre a relação existente entre elas, pudemos perceber que sem o estudo das representações, o acesso ao objeto matemático se tornaria impossível. Já, que em nosso entendimento, os objetos em Matemática são definidos enquanto construções mentais, ou seja, não são observáveis e, portanto, nem comunicáveis. Dessa forma, tudo o que poderíamos conhecer deles se resumia as propriedades de suas representações.

Portanto, sendo as representações o “caminho” que nos levaria ao objeto matemático, nada mais coerente com a compreensão do mesmo do que estudar as representações aplicadas no âmbito da Matemática. Nesse caminho, as teorias de registros de representações semióticas de Duval foram o que nos ajudaram. Nelas, ele apresentou os conceitos de tratamento e conversão de registros, juntamente com os resultados de seus estudos sobre os benefícios que uma correta coordenação de registros traz para a compreensão dos objetos matemáticos.

A fim de procurar sanar a falta de praticidade que professores de Matemática enfrentam há algum tempo na tarefa de ensinar funções, pudemos perceber que o uso de softwares matemáticos, especialmente o WINPLOT, tornaria o processo de ensino mais dinâmico. Tornando mais espontânea as tarefas de tratamento e conversão de registros de representação, a apreensão do conceito matemático Função seria mais clara e significativa.

A relevância deste trabalho para a Educação Matemática reside principalmente no fato de que, a partir da reflexão da pergunta: "De que maneira o software WINPLOT possibilita as várias representações do objeto matemático Funções?", pudemos realizar uma análise de como a construção, o tratamento e a conversão das representações de funções se tornam mais dinâmicas com a utilização do software.

Concluindo, esperamos que o uso da informática no ensino da Matemática, explorado aqui mais especificamente com o uso do software WINPLOT, propicie novas reflexões e trabalhos de mesma natureza, objetivando novas ideias em professores e futuros professores de como ensinar Matemática de uma maneira mais dinâmica.

6. Referências

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**; tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por Alfredo Bossi; revisão da tradução e tradução dos novos textos Ivone Castilho Benedetti. – 5ª Ed. – São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BONOMI, Maria Cristina. Matemática: objetos e representações. **Seminários de Estudo em Epistemologia e Didática (SEED)**. Programa de Pós-Graduação em Educação da USP – Universidade de São Paulo, 2007.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de Diferentes Registros de Representação: um estudo envolvendo Funções Exponenciais**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, p.11-34, 2003.

IEZZI, G. et all. **Matemática: volume único**. São Paulo: Atual, 2002.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. Tradução: Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

PEIRCE, Charles S. **Semiótica**. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos).

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. Coleção primeiros passos. 6ª edição. Editora Brasiliense. São Paulo, 1988.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Editora Ática, 1998.

SCHOPENHAUER, Arthur. **O mundo como vontade e como representação**, Iº tomo/ Arthur Schopenhauer; tradução, apresentação, notas e índices de Jair Barboza. – São Paulo: Editora UNESP, 2005.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Modelagem matemática e semiótica : algumas relações.** 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ZUFFI, E.M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de Função**. (artigo). Educação Matemática em Revista – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – ano 8 – nº 9/10. Abril 2001.