

IDENTIFICANDO TEOREMAS EM AÇÃO MOBILIZADOS EM UM CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR

Valdinei Cezar Cardoso
Universidades Estaduais de Campinas e de Maringá
vccardoso@uem.br

Samuel Rocha de Oliveira
Universidade Estadual de Campinas
samuel.ime@unicamp.br

Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá
lakato@uem.br

Resumo:

Nesse trabalho apresentamos os resultados parciais de uma pesquisa cujo objetivo foi realizar uma investigação sobre teoremas em ação utilizados pelos alunos ao cursarem a disciplina de Álgebra Linear. Para tanto, foi elaborado e aplicado um instrumento diagnóstico para um grupo de onze estudantes de um curso de graduação em Física visando analisar os possíveis elementos constituintes da construção de falsos teoremas em ação e estudar a estabilidade desses teoremas buscando uma compreensão das dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra Linear. A análise destas atividades se deu à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

Palavras-chave: teoremas em ação; álgebra linear; teoria dos campos conceituais.

1. Introdução

O aprendizado da Álgebra Linear (AL) é fundamental para o sucesso em diversos cursos de graduação da área de ciências exatas, mas os tratamentos algébricos de questões matemáticas, inerentes a esta disciplina, pode torná-la não compreensível (ARTIGUE et al., 2000), já que a generalização de situações-problemas, em muitos casos, gera dificuldades no tratamento das representações necessárias para as suas compreensões e resoluções.

Por isso nos cursos superiores, a disciplina AL é tratada, por muitos estudantes, como um conjunto de conteúdos difíceis e desligados da realidade cotidiana (CELESTINO, 2000). Neste sentido pesquisas como a de Wang, Posey e Mahmoud (2011) buscam desenvolver metodologias que auxiliem no ensino e no aprendizado de conceitos relacionados a esta disciplina.

A proposta apresentada em nosso trabalho inclui aulas presenciais expositivas e dialogadas e pequenos vídeos com no máximo 25 minutos, construídos pelo professor da turma e primeiro autor deste trabalho, durante as aulas. Partindo das resoluções das atividades escritas produzidas pelos estudantes, buscamos identificar os teoremas em ação produzidos.

Participaram do nosso estudo, onze estudantes de um curso de graduação em Física, de uma universidade estadual do interior do Estado do Paraná, e a partir dele esperamos reunir elementos que permitam uma melhor compreensão da influência de tal metodologia sobre a construção de esquemas, no sentido de Vergnaud (1990), pelos acadêmicos supracitados.

A pergunta que buscaremos responder será: *“Quais teoremas em ação os estudantes mobilizam para resolver problemas aditivos e multiplicativos envolvendo matrizes?”*

Para tentarmos responder a esta pergunta vamos utilizar como fundamentação teórica a teoria dos campos conceituais (TCC) de Vergnaud (1990).

2. A teoria dos campos conceituais

A TCC, “é uma teoria cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente entre alguns conceitos com base no estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas” (VERGNAUD, 1990, p. 135).

A finalidade principal da TCC é compreender as relações entre as rupturas que ocorrem na construção dos conhecimentos, na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo. Segundo esta teoria, um conceito só tem sentido para os estudantes, a partir do momento em que este for aplicado em situações-problema e o estudante puder construir hipóteses e estratégias para resolvê-las. A adaptação do estudante às novas situações é que indica os caminhos para a aprendizagem durante suas ações.

Os estudantes utilizam diversos conhecimentos, ao resolverem uma situação-problema e estes conhecimentos são classificados por Vergnaud (1990) como operatórios e não-operatórios.

Para ser operatório, um conhecimento precisa fornecer ao sujeito mecanismos para tratar imediatamente uma situação, nesse caso o esquema utilizado é único e organizado. Em nosso trabalho, esta teoria nos auxiliará na categorização dos teoremas em ação adotados pelos estudantes.

3. Encaminhamentos metodológicos

Este trabalho tratou da solução de problemas de Álgebra Linear, envolvendo os campos conceituais aditivo e multiplicativo. A questão central do estudo foi a compreensão dos conceitos de adição, subtração e multiplicação (entre matrizes e de matriz por escalar). O problema da pesquisa foi: "*Quais teoremas em ação os estudantes mobilizam para resolver problemas aditivos e multiplicativos envolvendo matrizes?*"

Este problema centra-se na nossa hipótese de que os erros cometidos pelos estudantes durante a resolução de problemas, envolvendo as operações com matrizes, podem estar diretamente relacionados com as dificuldades inerentes aos raciocínios que constituem os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Nesse sentido propomos investigar os teoremas em ação apresentados pelos estudantes durante a resolução de situações-problema relacionadas às operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes.

Inicialmente a turma investigada era composta por 24 estudantes, no entanto ao final do nosso trabalho de coleta de dados, optamos por analisar somente as atividades dos 11 estudantes que tinham participado de todas as atividades.

Os estudantes investigados cursavam o segundo semestre de um curso de graduação em Física, de uma universidade estadual do interior do Estado do Paraná. Todos cursaram o ensino básico em escolas públicas e um deles cursava a disciplina de AL pela segunda vez.

A escolha deste grupo de estudantes se justifica pelo curso de Licenciatura em Física, apresentar um grande número de desistências e reprovações, e conseqüentemente uma baixa taxa de alunos concluintes. Além disso, a maioria das desistências ocorre nos primeiros anos do curso, época em que são ministradas as aulas de Álgebra Linear. A escolha da disciplina se deu por ser uma das disciplinas que mais apresentam reprovações nos primeiros anos dos cursos de graduação (CELESTINO, 2000).

4. Procedimentos para a coleta de dados e Materiais

A presente pesquisa foi organizada em três momentos distintos, para a coleta de dados: no primeiro os estudantes resolveram, em duplas, um teste oral; no segundo resolveram de um teste escrito individualmente e no terceiro construíram um mapa conceitual, também de forma individual.

Todos os dados foram coletados durante um semestre letivo, nas aulas de um curso regular de AL, pelo próprio professor da disciplina e primeiro autor deste trabalho. As atividades do segundo e terceiro momentos foram aplicadas individualmente para os estudantes no horário normal das aulas e a atividade do primeiro momento foi aplicada separadamente para os estudantes, organizados em duplas, sendo a escolha da dupla feita de forma livre para cada um dos estudantes. Neste trabalho analisaremos apenas o problema P01: “Qual foi a receita obtida pelas vendas do jornal X durante uma semana de acordo com as informações dos Quadros 02 e 03?”

Quadro 02: Vendas do jornal X

Cidade	Número de exemplares vendidos do jornal X	
	de segunda-feira até sábado	Domingo
Maringá	248	46
Curitiba	93	32

Fonte: instrumento diagnóstico.

Quadro 03: Preços do jornal X por cidade

Cidade	Preço (em reais)
Maringá	1,50
Curitiba	2,00

Fonte: instrumento diagnóstico.

Este problema foi aplicado no segundo momento da nossa coleta de dados, às análises dos demais problemas deste e dos demais momentos então em processo de finalização.

Neste problema temos duas ações fundamentais para o sucesso na sua resolução, inicialmente os estudantes tinham que multiplicar as matrizes A e B , em seguida, do produto $A.B$, deveriam subtrair a matriz $-4.B$. O cálculo relacional necessário para a resolução desta situação é o mesmo envolvido na resolução de problemas aditivos de transformação, como por exemplo: “Paulo tem 7 bolinhas antes de jogar. Perdeu 4 bolinhas. Ele tem agora 3 bolinhas” (VERGNAUD, 2009, p. 203) o cálculo relacional envolvido é apresentado na Figura 01:

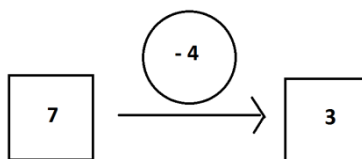


Figura 01: Cálculo relacionado do problema apresentado por Vergnaud (2009)

Fonte: Vergnaud (2009, p. 203)

Na Figura 01 os números 7 e 3, são representados dentro de quadrados porque são números naturais, o valor -4 é um número relativo e por isso é representado dentro de um círculo, que representa uma transformação aplicada no número 7 para obter o resultado 3.

No caso das matrizes, elas também podem representar grandezas, expressas por número naturais ou números inteiros, como no problema P01 apresentado anteriormente, em que a partir das informações dos Quadros 02 e 03, podemos fazer:

$$A = \begin{pmatrix} 248 & 93 \\ 46 & 32 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1,50 \\ 2,00 \end{pmatrix}$$

Como o produto $A.B$ é uma matriz, com a mesma ordem da matriz $-4.B$, é possível determinar a matriz $C = A.B - 4.B$. Note que se tivéssemos uma matriz A' com quatro linhas e duas colunas e uma matriz B' com quatro linhas e uma coluna, não seria possível determinar a matriz C , já que $A'.B'$ teria duas linhas e uma coluna e a matriz $-4.B'$ teria quatro linhas e uma coluna.

Considerando as situações em que é possível determinar a matriz C , entendemos que os raciocínios envolvidos tem relação com o cálculo relacional apresentado na Figura 01, já que neste problema o sujeito deve obter a matriz $A.B = \begin{pmatrix} 558 \\ 133 \end{pmatrix}$ e em seguida aplicar sobre esta matriz uma transformação representada por $-4.B = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

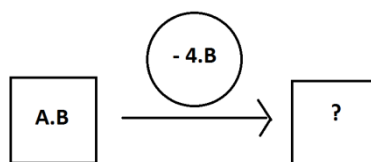


Figura 02: Cálculo relacional de um problema envolvendo matrizes.

Fonte: Instrumento diagnóstico.

O trabalho de Kato *et al.* (2013) mostrou que estudantes ingressantes em cursos de graduação de ciências exatas ainda apresentam dificuldades em alguns tipos de raciocínios do campo conceitual aditivo. Acreditamos que tais dificuldades possam interferir no rendimento dos estudantes em problemas envolvendo matrizes, daí a importância de identificarmos teoremas em ação do campo conceitual aditivo nas resoluções de problemas envolvendo matrizes.

5. Análise e discussão dos resultados parciais de nosso trabalho.

Ao ministrar aulas utilizando uma mesa digitalizadora, ao invés do quadro branco, observamos benefícios em algumas situações e dificuldades em outras. Entre os pontos positivos da metodologia adotada destacamos:

- A facilidade de integrar às aulas o uso de programas computacionais, como o Geogebra, que proporcionam um salto de qualidade nas imagens apresentadas pelo professor, durante as explicações aos estudantes.
- O acesso à internet que permite ao professor buscar imagens, animações ou vídeos para complementar as suas explicações.
- A possibilidade de gravar os momentos mais importantes da aula e disponibilizá-los na forma de vídeos para que os estudantes revejam, caso necessitem.

Entre os pontos negativos, destacamos os seguintes:

- Problemas técnicos como quedas de energia ou da conexão com a internet, travamentos do computador utilizado na aula, podem deixar o ritmo da aula mais lento, o que pode prejudicar o cumprimento do programa da disciplina e reduzir o tempo disponível para discussões entre o professor e os estudantes.

A partir do instrumento diagnóstico detectamos os teoremas em ação (TA) equivocados:

- TA01- Errou ao multiplicar duas matrizes.
- TA02- Confundiu adição de matrizes com multiplicação de matrizes.

O TA01 foi apresentado por mais de um sujeito e em diferentes situações-problema, entre os principais equívocos que levaram ao insucesso em problemas em que foram detectados o TA01, podemos destacar os casos em que os estudantes, em uma multiplicação de duas matrizes A e B , multiplicavam as colunas da matriz A pelas linhas da matriz B .

O TA02 também foi detectado nos protocolos de diferentes estudantes e em diferentes situações propostas, o que nos leva a crer que também é um teorema em ação equivocado, apresentado pelos estudantes por estenderem as propriedades de adição de duas matrizes também para a multiplicação de duas matrizes.

06. Considerações finais

Mesmo com os pontos negativos apontados, acreditamos que os pontos positivos foram mais significativos para o aprendizado dos estudantes. Notamos que o fato de o professor se dispor a gravar partes de suas aulas e disponibilizá-las aos seus estudantes, na forma de pequenos vídeos, passou a impressão, aos estudantes, de que o professor estava se esforçando para ensinar-lhes AL.

O resultado disso foi a turma assumir uma postura de maior responsabilidade com o seu próprio aprendizado, a maioria dos estudantes sentiu-se motivada a se esforçar para aproveitar o material adicional (os vídeos) e com isso passou a demonstrar mais segurança nas dúvidas apresentadas durante as aulas presenciais.

Alguns estudantes, que geralmente não faziam perguntas durante as aulas, após a disponibilização dos vídeos, começaram a participar mais ativamente das aulas, questionando pontos dos vídeos que não tinham compreendido.

Os vídeos podem motivar o estudo individual dando mais segurança aos estudantes, mas muitos estudantes tendem a aplicar literalmente as ideias presentes nos vídeos em problemas relacionados, sem generalizar aquilo que se aprendeu antes de aplicar em uma situação nova.

Para os estudantes que têm dificuldades em anotar aquilo que é visto nas aulas, a possibilidade de gravar partes das aulas e disponibilizá-las pela internet pode ser uma oportunidade de revisão, daquilo que não se tinha compreendido durante tais aulas.

Ao utilizar vídeos como material de apoio para momentos de estudo, fora da sala de aula, o professor economiza tempo com explicações sobre o mesmo conteúdo para diferentes estudantes que o procuram para tirar dúvidas. Além disso, os vídeos podem ser utilizados como material de pesquisa, pelos estudantes, o que pode contribuir para o desenvolvimento da autonomia e da independência destes na produção do seu próprio conhecimento.

Durante o nosso trabalho, foram produzidos 72 vídeos com até 25 min de duração, o material atendeu aos estudantes do grupo investigado e à outros estudantes interessados, provenientes de diversas universidades do Brasil e do exterior. Isso foi possível porque o material encontra-se disponível em um blog aberto¹ criado para esta experiência de ensino.

Acreditamos que a possibilidade de auxiliar outros estudantes, seja um motivador para que mais professores aventurem-se em experiências desse tipo, produzindo materiais

¹ www.v13dinei.blogspot.com

didáticos que sirvam de referência para os seus alunos e também para estudantes e outros professores de diversas partes do mundo.

Esperamos que até a conclusão deste trabalho possamos estabelecer algumas considerações acerca dos teoremas em ação relacionados ao estudo de AL e os raciocínios dos campos aditivo e multiplicativo.

A argumentação do professor, gravada na forma de vídeo digital, parece ter exercido um papel importante para ajudar os estudantes a produzirem relações entre aquilo que estudaram nas aulas presenciais e aquilo que estudaram nos livros especializados. Tivemos a impressão de que tais mídias favoreceram a construção de vínculos entre teoremas em ação desorganizados dos estudantes e a linguagem abstrata presente na AL.

Por fim, acreditamos que a natureza e a estrutura das tarefas propostas podem influenciar, na construção de invariantes operatórios (Vergnaud, 1990), que por sua vez influenciam diretamente na construção de esquemas relacionados a estas tarefas. Sobre isso trataremos nas etapas seguintes do nosso trabalho.

Nas palavras de Moreira (2012, p. 15) a “aprendizagem é uma atividade idiossincrática que pode não ser consequência necessária do ensino recebido”, mas para sabermos se um determinado grupo de estudantes aprendeu algo é preciso avaliá-lo. Neste processo busca-se uma melhor compreensão daquilo que os estudantes sabem sobre o tema ensinado e sobre os procedimentos adotados para ensinar.

07. Agradecimentos

Este trabalho conta com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes).

08. Referências

ARTIGUE, Michéle; ASSUDE, Teresa; GRUGEON, Brigitte; LENFANT, Agnès. Teaching and learning algebra: approaching complexity through complementary perspective. In: ICM, Beijing, 2002. **Anais eletrônicos**, Beijing, 2002. Disponível em: <http://www.mathunion.org/Publications/historic-material>

CELESTINO, Marcos Roberto. **Ensino-Aprendizagem de Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2000.

KATO, Lilian Akemiet al.. Estratégias de resolução em problemas do Campo Conceitual Aditivo: um estudo com alunos ingressantes nos Cursos de Ciências Exatas. **Boletim GEPEM**. nº 62 jan/jun 2013. Rio de Janeiro: UFRJ, 2013.

VERGNAUD, Gérard. **La teoría de los campos conceptuales**. Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. **A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.