

REDESCOBRINDO O LILAVATI DE BHASKARA (1150)

Jussara Pereira Fernandes
Universidade de Brasília
jussarap.fernandes@gmail.com

Rodolpho Pinheiro D'Azevedo
Universidade de Brasília
rodolphopinheiro@live.com

Thafarel Rodrigues da Costa
Universidade de Brasília
thafarel.rodrigues@hotmail.com

Resumo:

Este minicurso foi elaborado a partir dos estudos da tradução do texto histórico escrito por Bhaskara em 1150 d.C: o *Lilavati*. Durante os estudos foram realizadas discussões sobre os algoritmos ensinados pelo mestre hindu e a produção de materiais didáticos lúdicos (apoio ao educador). O norteador dos estudos de pesquisa seguem as seguintes tendências em Educação Matemática: uso da História da Matemática e a Resolução de Problemas. Esses viabilizam recursos para o ensino e aprendizagem dando significado aos conceitos matemáticos abordados nas escolas. O objetivo deste trabalho é a reflexão e aplicação de algumas atividades desenvolvidas na pesquisa. Além disso, serão estabelecidas discussões a respeito dos métodos ensinados no livro de Bhaskara e compará-los aos algoritmos atualmente ensinados nas escolas. Por fim, o minicurso é destinado estudantes de matemática (ou áreas afins) e educadores do Ensino Fundamental 2 e Médio; o público estimado são 30 participantes.

Palavras-chave: *Lilavati*; Bhaskara; História da Matemática; Resolução de problemas.

1. O que é o Lilavati?

Na antiga Índia, Bhaskara¹ escreveu uma obra sobre astronomia o *Siromani Siddhanta*. Este era composto por quatro partes temáticas: *Grahaganita* (versa sobre o movimento planetário), *Goladhyaya* (sobre a esfera), *Bijaganitas* (sobre álgebra) e o *Lilavati* (que trata sobre aritmética).

A obra ganhou grande popularidade na Índia e foi realizada com grande estima no tempo do imperador Akbar (1556-1605). Foi sob a ordem desse imperador, que Abul Faizi, poeta da corte, preparou a tradução persa Tarjamah-i-Lilavati em 1587 d.C. e

¹ Diversas ortografias de tradução: Bháskara ou Bhaskaracharya, nasceu em 1114 na cidade indiana de Vijavapura e morreu em 1185 em Ujjain também na Índia. Ele era um importante matemático e astrônomo em seu tempo e foi o sucessor de Bhahmagupta no cargo de chefe do observatório astronômico de Ujjain.

provavelmente desmembrou a obra completa em livros independentes (BAG, 1980). Somente em 1817 o *Lilavati* foi traduzido pela primeira vez para o inglês por Henry Thomas Colebooke (FERNANDES, 2005). Além dessa, outras traduções foram realizadas: *Lilavati in Sanskrit* (1893); *Sanskrit texto of Lilāvati* (1927); *Lilavati* (1993); e *Lilavati de Bhaskaracarya* (2001). Este se encontra atualmente em comercialização (FERNANDES, 2013).

Conta à lenda – aparentemente introduzida na obra por Abul Faizi -, que Bhaskara tinha uma filha e seu nome era Lilavati (significa formosa e bela). Eis a tradução da lenda:

Lilavati era o nome da filha de Bhaskaracarya. Ao lançar o seu horóscopo, ele descobriu que o momento auspicioso para o casamento seria uma hora específica em um determinado dia. Bhaskaracarya marcou com o cilindro do tempo [os hindus mediam, calculavam e determinavam as horas do dia com o auxílio de um cilindro colocado num vaso cheio d'água. Esse cilindro era aberto apenas em cima e apresentava um pequeno orifício no centro da superfície da base para a entrada da água] a hora específica para o matrimônio. Quando tudo estava pronto e o cilindro do tempo iniciará a marcar a hora propícia para o casamento, Lilavati, de repente, por curiosidade, inclinou-se sobre o recipiente e uma pérola de seu vestido caiu no copo e bloqueou o buraco. A hora da sorte passou sem que o cilindro marcasse. Bhaskarachaya acreditava que a única maneira de consolar a filha abatida, que agora nunca iria se casar, era escrever-lhe um manual de matemática! (FERNANDES, 2005, p.3; traduzido e adaptado por FERNANDES, 2013).

A obra de Bhaskara do século XII é escrita em versos e possui bases poéticas. Talvez a maior relevância do livro, além dos conteúdos matemáticos abordados, é que ele traz o entretenimento como forma de aprender matemática (FERNANDES, 2005).

Atualmente a obra foi traduzida para o português pelo projeto Lilavati do Laboratório de Matemática vinculado ao Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade (SAMAC) da Universidade de Brasília. Além disso, o grupo de pesquisa, sob a coordenação da Prof.^a Dr.^a Maria Terezinha Jesus Gaspar analisaram os métodos apresentados por Bhaskara e criaram diversas atividades pedagógicas (caderno de apoio didático), os quais serão utilizados neste minicurso.

O grupo de pesquisa utilizou estudo comparativo, quando necessário, porém o livro norteador da tradução para o português foi o *Lilavati Bhaskaracarya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition* (tradução para o inglês de Krishnaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Naimpally e Shyam Lal Singh. Delhi: Motilal Bernarsidass Publishers. 2008).

2. Fundamentação teórica

A teoria que norteia a formulação deste minicurso é a que atualmente seguem duas tendências na educação matemática: a Resolução de Problemas e a História da Matemática. Esta enfatiza o pensamento que constitui a evolução das ideias do homem, da cultura e da sociedade. Aquele diz respeito à capacidade do indivíduo em solucionar situações problemas em distintos contextos (reais e culturais) em diferentes tempos (SARDINHA et al, 2011).

Para Grabiner (1975), quanto à abordagem da História da Matemática em sala de aula, o educador pode realizá-la de modos distintos: o primeiro aparece implicitamente, ou seja, o objetivo principal não é a História, mas o modo pelo qual os caminhos são alcançados tendo como objetivo principal a pedagogia; o segundo aparece explicitamente, ou seja, o objetivo principal é a própria História, como sendo o meio didático, como por exemplo, o que acontecerá durante este minicurso.

Quanto às questões ditas ‘situações problemas’ e a arte em resolvê-las - em contextos escolares e com uso de recursos didáticos criativos: elas estimulam diversas percepções, como por exemplo, a atenção na capacidade de leitura; a seleção cuidadosa das informações importantes fornecidos pelo problema e a organização dos dados; elas procuram pela real interpretação matemática instigada pelo problema e as possíveis aplicações empíricas dos conceitos abordados no dia a dia nas escolas (CHARLES, 1995; POLYA, 1995; MUNIZ, 2009).

O objetivo geral é a reflexão e aplicação dos materiais pedagógicos (caderno de apoio didático) criados e desenvolvidos a partir do texto histórico de Bhaskara. Ainda será possível, através deste minicurso: aliar a História da matemática à Resolução de Problemas, contextualizando por meio dos versos fornecidos pelo texto histórico; aplicar algoritmos diferenciados - daqueles aprendidos nas escolas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental - com uso dos dados fornecidos por Bhaskara; comparar algoritmos atuais com os constantes no texto histórico; compreender a relevância da História da Matemática e a Resolução de Problemas como recursos pedagógicos válidos para o ensino e aprendizagem da Matemática.

3. Justificativa e motivação

As razões que justificam o uso da História da Matemática no minicurso e nas escolas: demonstrar aos educandos a existência da evolução de conceitos matemáticos (científicos) durante o decorrer da História da humanidade, o que ajuda na organização do currículo; possibilitar a retomada das intuições dos processos de ensino e aprendizado de diversos conteúdos matemáticos; ajudar na reflexão crítica sobre os meios para se utilizar no dia a dia os conteúdos aprendidos nas escolas (transposição para a realidade interdisciplinar); dentre outros (FAUVEL, 1991).

A justificativa da criação de situações e resoluções de problemas através do texto histórico de Bhaskara são as seguintes: evidenciar pontos fortes e fracos dos educandos, norteando, desse modo, o que deve ser mais instigado nos conteúdos; uso de algumas alternativas possíveis das estratégias de resolução de problemas, mas incentivar a iniciativa criativa e participativa dos educandos; gerenciamento e planejamentos de atividades lúdicas experimentais como estratégias de ensino nas escolas; uso de diferentes representações - histórica, estímulo das relações interpessoais, etc. (CHARLES, 1995; POLYA, 1995; MUNIZ, 2009).

4. Metodologia

As atividades serão ministradas basicamente em três momentos: no primeiro, apresentação – o que é o *Lilavati*? O método utilizado será conto ou encenação teatral (Imagem 6) e divisão dos 30 participantes em três grupos (A, B e C); no segundo, serão aplicadas as seguintes atividades – Definições e Tabelas do *Lilavati* de Bhaskara, Métodos para Encontrar o Cubo e Equações Quadráticas; no terceiro, após o intervalo, serão aplicadas as seguintes atividades – Oito operações com Frações, Regra de Três Composta e Proporção Inversa. Todas as atividades foram desenvolvidas com base no texto histórico de Bhaskara e na arte de resolver problemas. Cada grupo participará de todas as atividades descritas abaixo e o tempo total estimado para o minicurso será de 3,5 horas, conforme a Tabela 1.

Indicação do nível de ensino destinado para o minicurso: Ensino Fundamental 2 (a partir do sexto ano) e Ensino Médio.

5.1 Apresentação das atividades

5.1.1 Definições e Tabelas

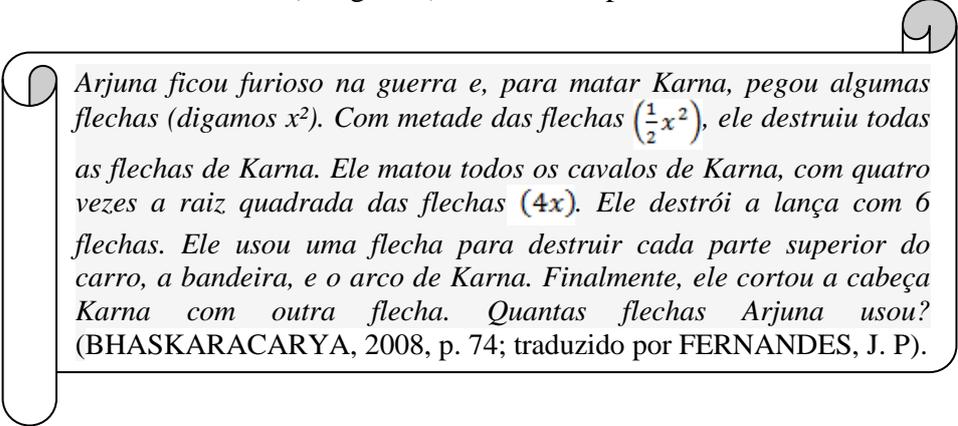
Bhaskara fornece alguns dados de conversões métricas utilizadas no século XI e XII na antiga Índia, que hoje podem ser comparados aos dados fornecidos pelo Sistema Internacional de Unidades (SI). Esse tema trata sobre os seguintes assuntos: moedas, medidas para o ouro, unidades de comprimento, medidas de volume para grãos e medidas alternativas de tempo. A atividade desenvolvida foi o jogo lúdico pedagógico Definições e Tabelas do Lilavati de Bhaskara (Imagem 1).

5.1.2 Métodos para Encontrar o Cubo

Os métodos descritos por Bhaskara para encontrar o cubo de um número levou a construção dos materiais concretos (Imagem 2) que permitem encontrar expressões algébricas para $(a + b)^3$. Como facilitador e organizador dos dados são utilizadas tabelas para preenchimento e representação do número procurado.

5.1.3 Equação Quadrática

Essa atividade apresenta métodos para resolver equações quadráticas e diversos problemas que podem ser modelados por meio das equações do segundo grau. Bhaskara fornece o algoritmo diferenciado do abordado nas escolas. O texto histórico, deste tema, é composto por seis versos desafiadores (Imagem 3), como exemplo o Verso LXXVI:



Arjuna ficou furioso na guerra e, para matar Karna, pegou algumas flechas (digamos x^2). Com metade das flechas ($\frac{1}{2}x^2$), ele destruiu todas as flechas de Karna. Ele matou todos os cavalos de Karna, com quatro vezes a raiz quadrada das flechas ($4x$). Ele destrói a lança com 6 flechas. Ele usou uma flecha para destruir cada parte superior do carro, a bandeira, e o arco de Karna. Finalmente, ele cortou a cabeça Karna com outra flecha. Quantas flechas Arjuna usou? (BHASKARACARYA, 2008, p. 74; traduzido por FERNANDES, J. P).

5.1.4 Oito Operações com Frações

Bhaskara ensina vários métodos para resolver operações com frações. Dentre elas, as frações “Addo” – aquelas que resultam da soma de um número inteiro por uma fração simples –, as frações “Dedo” – aquelas que são resultado da subtração de uma fração simples de um número inteiro. A atividade pedagógica desenvolvida foi o jogo lúdico pedagógico (Imagem 4).

5.1.5 Regra de Três Composta

Nesta atividade, há o problema que envolve unidades de medidas históricas utilizadas por Bhaskara. Este conteúdo é abordado geralmente de forma algébrica nas escolas. O método, muitas vezes, é passado para os educandos de forma mecanizada. Com

auxílio do material concreto (Imagem 5), o participante será capaz de responder a questão proposta no Verso XCIII de forma intuitiva por meio de uma abordagem geométrica.

5.1.6 Proporção Inversa

Bhaskara apresenta versos/problemas os quais, embasados na proporção, um valor cresce o outro decresce. O método é a proporção inversa que aplica a regra de 3 invertida para se achar o resultando. Os versos utilizam exemplos de aplicações na sociedade da Índia antiga e por meio de operações algébricas é possível chegar ao resultado numérico.



Imagem 1: o jogo Definições e Tabelas do *Lilavati*

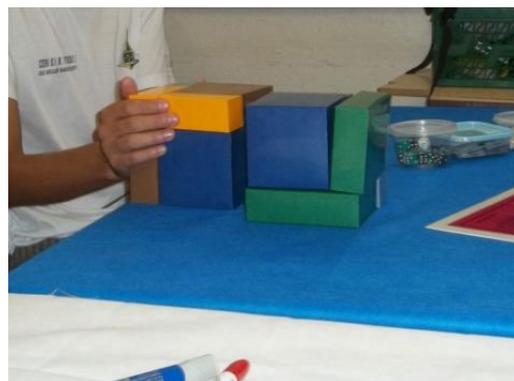


Imagem 2: aplicação Métodos para Encontrar o Cubo.



Imagem 4: aplicação Caderno Equações Quadráticas



Imagem 3: o jogo Oito Operações



Imagem 5: aplicação Regra de Três Composta



Imagem 6: Encenação Teatral, a lenda do *Lilavati* de Bhaskara

Tabela 1: Cronograma do Minicurso

REDESCOBRINDO O LILAVATI DE BHASKARA (1150)				
8:00	1º tempo (0,5 horas)	Apresentação: o que é o Lilavati? (conto ou encenação) Separação dos 3 grupos, com 10 participantes cada.		
2º tempo: cada grupo participa durante 0,5 horas de cada atividade.				
1,5 hs	Tipificação das atividades	8:30 hs	9:00 hs	9:30 hs
	5.1.1 - Definições e Tabelas do <i>Lilavati</i>	Grupo "A"	Grupo "C"	Grupo "B"
	5.1.2 – Método para Encontrar o Cubo	Grupo "B"	Grupo "A"	Grupo "C"
	5.1.3 – Equações Quadráticas	Grupo "C"	Grupo "B"	Grupo "A"
10:00	Intervalo			
3º tempo: cada grupo participa durante 0,5 horas de cada atividade.				
1,5 hs	Tipificação das atividades	10:30 hs	11:00 hs	11:30 hs
	5.1.4 – Oito Operações com Frações	Grupo "A"	Grupo "C"	Grupo "B"
	5.1.6 – Regra de Três Composta	Grupo "B"	Grupo "A"	Grupo "C"
	5.1.6 – Proporção Inversa	Grupo "C"	Grupo "B"	Grupo "A"
12:00	Horário de finalização das atividades			

5. Discussão das repercussões esperadas pelo minicurso

Espera-se, ao final deste minicurso, que os participantes sejam capazes de: refletirem criticamente sobre os materiais pedagógicos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa; realizarem a aliança entre a História da Matemática e à Resolução de Problemas; contextualizarem as situações problemas através dos versos fornecidos por Bhaskara; sejam capazes de realizar comparações reflexivas sobre os algoritmos ensinados pelo mestre (há mais de nove séculos) e os ensinados nas escolas.

Logo, espera-se que seja possível a compreensão da relevância da História da Matemática e a Resolução de Problemas como recursos pedagógicos válidos para o ensino e aprendizagem da Matemática.

7. Considerações Finais

O documento histórico escrito por Bhaskara em 1150 servirá de base para abordar alguns conceitos do Ensino Fundamental 2 e Médio: conversões de unidades de medidas, operações com frações, equações quadráticas, formas de achar o cubo, regra de três composta e etc. Por fim, o *Lilavati* pode significar uma nova proposta de ensino e aprendizagem da Matemática. Ao final, da obra em versos, Bhaskara exalta o fato dos tópicos tratados no livro serem situações do cotidiano e enfatiza a objetividade dos métodos e regras propostas. Além disso, diz a lenda: aquele que dominar *Lilavati* será feliz e próspero (RODRIGUEZ et al, 2013).

8. Referências

- BAG, A. K. **Indian Literature on Mathematics during 1400-1800 A.D.** Indian Journal of History of Science, 15 (1), p. 79-93, May 1980. Disponível em: <http://www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20005af2_79.pdf> Acesso em: 15 Out. 2012.
- BHASKARACARYA. **Lilavati Bhaskaracarya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition.** Tradução de Krishnaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Naimpally e Shyam Lal Singh. Dethi: Motilal Bernardidass Publishers. 2008.
- CHARLES, R. L., Mason, R. P. & Martin, L. **Problem-Solving Experiences In Mathematics.** Addison-Wesley. USA. 1995.
- FAUVEL, J. **Using History in Mathematics Education.** For the Learning of Mathematics, v. 11, p. 3-6, Junho 1991.
- FERNANDES, J. P. **O Lilavati de Bhaskaracarya e o Sistema Métrico Moderno: Qual o denominador comum para o Ensino de Ciências e Matemática? Trabalho de Conclusão de Curso em licenciatura em Ciências Naturais.** Orientador: José Eduardo Castilho. Universidade de Brasília, Faculdade UnB Planaltina: Planaltina. Fevereiro de 2013.
- FERNANDES, Xavier. **Lilavati in the history of mathematics.** Examensarbeten I matematik 10 , poäng. Handledare: Paul Vaderlind. 2005. Disponível em: <<http://www2.math.su.se/gemensamt/grund/exjobb/matte/2005/rep4/report.pdf>> Acesso em: 12 Out. 2012.
- GRABINER, J. V. **Matemático e o Historiador - Historia Mathematica**, v. 2, p. 439-447, 1975.
- MUNIZ, C. A. **Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações.** In: GUIMARÃES, G.; BORDA, R. (Org.). Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. Volume 6. Recife: SBEM. p. 101 - 118. 2009.
- POLYA, G. A. **Arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência. 196p. 1995.
- RODRIGUEZ, R. D.; FERNANDES, J.P.; SARDINHA, A.G.O.; SILVA, R.M. **O Lilavati de Bhaskara:** utilizando a História da Matemática e a Resolução de Problemas como Recursos Pedagógicos. X Seminário Nacional de História da Matemática (X SNHM). Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Campinas: São Paulo. 2013.
- SARDINHA, A. G. de O.; ALVES, D. da S.; ANTUNES, D. A.; FERNANDES, J. P.; RODRIGUEZ, R. D.; D' AZEVEDO, R. P. **Lilavati:** uma proposta de ensino-aprendizagem da Matemática utilizando a História e a resolução de problemas como recursos pedagógicos. Anais V EBREM: Educação Matemática e Criatividade. Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Distrito Federal. Set/2011.